

### **Programma di massima**

- A. Prerequisiti di algebra lineare [1, 5, 6] e richiami di geometria [1, 5, 6]. Introduzione alla teoria dei tensori [7].
- B. Cinematica degli osservatori e moti relativi [1, 2].
- C. Leggi della meccanica, sollecitazioni e campo momento totale [2, 11].
- D. Dinamica e statica dell'elemento libero e vincolato [1, 12].
- E. Sistemi conservativi unidimensionali: ritratto di fase e diagramma di stabilità [1, 8].
- F. Dinamica dei sistemi [1, 2].
- G. Dinamica dei sistemi olonomi: equazioni di Lagrange [1, 2].
- H. Statica dei sistemi olonomi: equilibrio e stabilità [1, 2].
- I. Cinematica del corpo rigido: il moto e l'atto di moto [1, 2].
- J. Corpo rigido: geometria delle masse [1, 2].
- K. Dinamica e statica del corpo rigido: formalismo lagrangiano [1, 2].
- L. Oscillatori interagenti lineari e non lineari: piccole oscillazioni [1].
- M. Dinamica del corpo rigido e statica: equazioni cardinali [1, 2].
- N. Corpo rigido con un asse fisso: cerniera ideale e bilanciamento dinamico [1, 2].
- O. Corpo rigido con un punto fisso: moti alla Poincaré e trottola [1, 2].
- P. Corpo rigido appoggiato a una superficie [1].

### **Modalità di svolgimento dell'esame**

L'esame consiste in una prova scritta e un colloquio orale. La prova scritta consta di problemi relativi all'intero programma con particolare attenzione ai sistemi olonomi e ai sistemi rigidi. Il colloquio orale si svolge immediatamente dopo la correzione della prova scritta sulla base del calendario predisposto dal docente.

Durante la prova scritta non è possibile usare né appunti (scritti a mano, fotocopiati, stampati, etc.) di nessuna natura né dispositivi elettronici. Gli studenti possono consultare esclusivamente e brevemente le copie del libro di testo (o di eventuali altri testi usati per la preparazione dell'esame) preventivamente poste sulla cattedra.

## Testi consigliati

- [1] Emilio N.M. Cirillo, “Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l’Ingegneria.” Edizioni CompoMat, 2018, Configni (Ri).
- [2] P. Benvenuti, P.G. Bordoni, G. Maschio, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).

## Testi suggeriti per eventuali approfondimenti

- [3] V.I. Arnold, “Metodi Matematici della Meccanica Classica.” Editori Riuniti, 1986.
- [4] P. Benvenuti, G. Maschio, “Esercizi di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2011, Configni (Ri).
- [5] A. Bichara, F. Dell’Isola, “Elementi di Algebra Tensoriale con Applicazioni alla Meccanica dei Solidi.” Società Editrice Esculapio, 2005, Bologna.
- [6] W.E. Deskins, “Abstract Algebra.” The MacMillian Company, 1964, New York.
- [7] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, “Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi.” Volume primo. Editori Riuniti, Edizioni Mir, Mosca, 1986.
- [8] G. Gallavotti, “Meccanica elementare.” Boringhieri, Torino, 1986.
- [9] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2005, Bologna.
- [10] L. Landau, E. Lifchitz, “Meccanica,” tomo 1 della collezione “Fisica Teorica.” Mir, 1964, Mosca.
- [11] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2012, Configni (Ri).
- [12] M. Lo Schiavo, “Appunti di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).
- [13] E. Olivieri, “Appunti di Meccanica Razionale.” UniTor, 1991, Roma.
- [14] J.R. Taylor, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2006, Bologna.

## Diario delle lezioni

Lezioni 1 – 3, ore effettive 1 – 3 (24 settembre 2018)

A. Richiami di algebra. Gruppo, spazi vettoriali, sottospazio lineare. Sistemi di vettori indipendenti, basi e coordinate controvarianti. Spazi pseudo-euclidei. spazi euclidei,

prodotto scalare, norma o modulo, componenti covarianti, basi ortonormali, cambiamento di base tra basi ortonormali, matrici del gruppo  $O(3)$  e del sottogruppo  $SO(3)$ . Orientazione positiva o levogira. Prodotto vettoriale e vettori assiali.

Spazio affine o puntuale euclideo, sottospazi, rette e piani, riferimenti cartesiani, coordinate cartesiane, assi coordinati, piani coordinati, distanza euclidea, semiretta, angolo convesso, funzione coseno e funzione seno, identità dell'uno trigonometrico, ampiezza dell'angolo, modulo del prodotto vettoriale, angoli orientati, coseni direttori.

Lezioni 4 – 6, ore effettive 4 – 6 (26 settembre 2018)

**A.** Omomorfismi e isomorfismi tra strutture algebriche. Applicazioni lineari, isomorfismi e isometrie tra spazi vettoriali. Isometrie tra spazi puntuali euclidei.

Curve nello spazio puntuale euclideo, curve regolari, vettore tangente, ascissa curvilinea, versore tangente, parametrizzazione con ascissa curvilinea e esempi. Curve rettilinee, curvatura, raggio di curvatura, versore normale principale. Curva piana, curva sghemba, piano osculatore e sua interpretazione geometrica.

Lezioni 7 – 8, ore effettive 7 – 8 (28 settembre 2018)

**A.** Versore binormale, triedro principale, torsione e sua interpretazione geometrica, formule di Frenet. Esempi.

Atlante, carta, coordinate curvilinee, coordinate cilindriche, coordinate polari.

Lezioni 9 – 11, ore effettive 9 – 11 (1 ottobre 2018)

**C.** Osservatore, posizione, moto, moti componenti, traiettoria, orbita, velocità, accelerazione, legge oraria. Descrizione intrinseca, cilindrica e polare del moto. Sistema di particelle libere, richiami sulle leggi del moto per un sistema libero e isolato, leggi di Newton e principio di relatività galileano; sollecitazione interna. Sistema libero e non isolato; sollecitazione esterna. Equazione fondamentale della statica per sistemi liberi. Classificazione dei moti: rettilineo, piano, circolare, uniforme, uniformemente accelerato, vario. Esempi: moto del grave e moto armonico semplice, moto circolare, moto circolare uniforme, composizione di moti armonici, figure di Lassajou. Problema della parabola di sicurezza.

Sollecitazioni, somma e momento totale, campo momento totale, formula fondamentale, trinomio invariante, asse della sollecitazione, campo momento circolare e elicoidale.

Lezioni 12 – 14, ore effettive 12 – 14 (3 ottobre 2018)

**B.** Trasformazione di coordinate cartesiane, rotazione e traslazione. Esempi di trasformazione di coordinate cartesiane. Angoli di Cardano e angoli di Eulero.

Lezioni 15 – 16, ore effettive 15 – 16 (5 ottobre 2018)

**B.** Moto di trascinamento, riferimento fisso e mobile, punto e vettore solidale. Velocità angolare, regola di trasformazione. Formule di Poisson, derivata di un vettore, esempi.

Lezioni 17 – 19, ore effettive 17 – 19 (8 ottobre 2018)

**B.** Legge di composizione delle velocità angolari (senza dimostrazione). Esempi e esercizi.

Classificazione dei moti di trascinamento. Quietè. Moto traslatorio, moto traslatorio uniforme. Esempi di moto traslatorio, trasformazioni di Galileo. Moto sferico. Moto rota-

torio. Condizioni necessarie e sufficienti per i diversi moti; equazione della trasformazione di coordinate associata ai riferimenti fisso e mobile. Composizione delle velocità angolari: velocità angolare di un moto sferico in termini degli angoli di Eulero e di Cardano.

Lezioni 20 – 22, ore effettive 20 – 22 (10 ottobre 2018)

**B.** Moto delle immagini dei punti solidali all'osservatore mobile: legge oraria, velocità e accelerazione. Moto assoluto e moto relativo di un elemento: relazione tra le equazioni componenti del moto assoluto e di quello relativo.

Teorema del moto relativo, velocità di trascinamento, esempio del pick-up tangenziale. Teorema di Coriolis e accelerazione di Coriolis. Esempio: moto dei pianeti relativo alla Terra; moto retrogrado. Esempio della ruota panoramica.

Lezioni 23 – 24, ore effettive 23 – 24 (12 ottobre 2018)

**C.** Moto rispetto a un osservatore non inerziale; sollecitazione fittizia, di trascinamento, di Coriolis e centrifuga. Esempi.

**D.** Elemento libero isolato e non isolato: elemento libero rispetto a un osservatore inerziale e rispetto a uno in moto rotatorio uniforme, moto in presenza di campi elettrici. Elemento libero sulla superficie terrestre, peso, caduta libera rispetto a osservatori in caduta libera.

Lezioni 25 – 27, ore effettive 25 – 27 (15 ottobre 2018)

**D.** Elemento libero isolato e non isolato: moto in presenza di campi elettrici e magnetici, effetto della forza di Coriolis sulla caduta del grave, Il problema delle maree, effetto del Sole e della Luna.

Lezioni 28 – 30, ore effettive 28 – 30 (17 ottobre 2018)

**E.** Sistemi meccanici conservativi unidimensionali, legge di conservazione, piano delle fasi, orbita o traiettoria di fase, ritratto delle fasi, punti fissi o critici, stabilità dei punti fissi, formula di quadratura. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali, analisi qualitativa, curve di livello dell'energia generalizzata, periodo delle orbite periodiche, separatrice, orbite asintotiche, omoclina ed eteroclina. Oscillatore lineare e quartico. Calcolo del periodo.

Lezioni 31 – 32, ore effettive 31 – 32 (19 ottobre 2018)

**E.** Ritratto di fase del pendolo. Diagramma di biforcazione.

**C.** Vincoli di posizione e di mobilità. Esempi. Sistema di elementi vincolato: reazione e sollecitazione vincolare. Equazione fondamentale della statica per sistemi vincolati. Vincoli di posizione. Sistemi olonomi: coordinate lagrangiane, vincoli scleronomi, vincoli reonomi, gradi di libertà, coordinate lagrangiane essenziali.

Lezioni 33 – 35, ore effettive 33 – 35 (22 ottobre 2018)

**C.** Sistemi olonomi: equazioni di vincolo, spostamento possibile, spostamento effettivo, spostamento virtuale. Vincoli unilaterali: configurazioni ordinarie e di confine, spostamento possibile e virtuale. Vincoli anolonomi: vincolo integrabile e vincolo propriamente anolonomo. Velocità lagrangiane.

Modelli di vincolo. Vincolo ideale: lavoro elementare possibile, lavoro elementare virtuale, componenti lagrangiane della sollecitazione, lavoro elementare effettivo. Appoggio

e appartenenza di un elemento a una superficie: coefficiente di attrito statico e dinamico, legge di Coulomb–Morin.

**D.** Elemento vincolato: guida liscia e scabra, guida rettilinea scabra in presenza di una forza esterna costante, moto incipiente, retta inclinata.

Lezioni 36 – 38, ore effettive 36 – 38 (24 ottobre 2018)

**D.** Elemento vincolato: guida liscia e scabra, guida rettilinea scabra in presenza di una forza esterna costante, moto incipiente, retta inclinata. Pendolo semplice, pendolo cicloidale. Elemento appoggiato a una superficie liscia e scabra: superficie piana in moto rispetto a un osservatore terrestre, statica su superficie sferica liscia e scabra, statica dell'elemento appoggiato a una superficie sferica scabra. Pendolo sferico: problema del distacco. Oscillatore armonico smorzato, forzato e risonanza.

Lezioni 39 – 40, ore effettive 39 – 40 (26 ottobre 2018)

**D.** Pendolo sferico: problema del distacco. Oscillatore armonico smorzato, forzato e risonanza.

**F.** Quantità di moto, momento della quantità di moto o momento angolare, energia cinetica. Centro di massa, moto del centro di massa, velocità e accelerazione del centro di massa.

Lezioni 41 – 43, ore effettive 41 – 43 (31 ottobre 2018)

**F.** Osservatore del centro di massa, legame tra le grandezze cinematiche del moto assoluto del sistema e del moto relativo all'osservatore del centro di massa. Equazioni globali della dinamica dei sistemi, leggi di conservazione per i sistemi isolati e liberi, sollecitazione autonoma, teorema del centro di massa. Seconda equazione globale con polo mobile.

**G.** Sistema olonomo a vincoli perfetti: velocità, accelerazione ed energia cinetica in termini delle coordinate lagrangiane, matrice di massa e proposizione sulle relative proprietà (senza dimostrazione).

Lezioni 44 – 45, ore effettive 44 – 45 (2 novembre 2018)

**G.** Seconda forma delle equazioni di Lagrange e loro sufficienza per la descrizione dei moti del sistema olonomo a vincoli perfetti. Esempi: pendolo semplice e pendolo sferico, analisi qualitativa, calcolo della forza vincolare.

Lezioni 46 – 48, ore effettive 46 – 48 (5 novembre 2018)

**G.** Equazione simbolica della dinamica e prima forma delle equazioni di Lagrange. Deduzione della seconda forma delle equazioni di Lagrange.

Sollecitazioni a lavoro virtuale nullo, sollecitazioni posizionali, sollecitazioni conservative. Energia potenziale di una sollecitazione conservativa. Equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi conservativi. Esempi: sollecitazione elastica esterna e interna.

Lezioni 49 – 51, ore effettive 49 – 51 (7 novembre 2018)

**G.** Esempi di sollecitazione conservativa: peso e sollecitazione centrifuga.

Definizione di momento coniugato, energia meccanica generalizzata ed energia meccanica totale. Relazione tra energia e energia generalizzata; variazione dell'energia gen-

eralizzata lungo i moti naturali. Integrali primi: momenti coniugati, energia meccanica generalizzata ed energia meccanica totale.

Esempio del pendolo rotante: sistema reonomo con lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo.

Lezioni 52 – 53, ore effettive 52 – 53 (9 novembre 2018)

**G.** Esempio: pendolo sferico, analisi qualitativa, moti particolari, calcolo della forza vincolare, problema del distacco.

Lezioni 54 – 56, ore effettive 54 – 56 (12 novembre 2018)

**H.** Statica dei sistemi olonomi: principio dei lavori virtuali. Statica di sistemi olonomi a vincoli scleronomi: caso dei sistemi olonomi conservativi. Stabilità dell'equilibrio: definizione di equilibrio stabile e instabile, teorema di Dirichlet–Lagrange (senza dimostrazione), teorema di Liapunov (senza dimostrazione). Esempi: moto del pendolo sottoposto all'azione di una forza elastica. Esempi: moto del pendolo rotante rispetto all'osservatore terrestre e a quello non inerziale. Diagrammi di stabilità e biforcazione.

Lezioni 57 – 59, ore effettive 57 – 59 (14 novembre 2018)

**I.** Corpo rigido, riferimento solidale, elemento, retta, piano solidale, rappresentazione cartesiana, numero di gradi di libertà, velocità angolare, velocità del generico elemento. Esempio: disco vincolato a un piano. Classificazione dei moti rigidi: traslatorio, sferico e rotatorio. Proprietà.

Atto di moto rigido, formula fondamentale della cinematica rigida, trinomio invariante. Classificazione dell'atto di moto rigido: traslatorio e rotatorio. Asse istantaneo di rotazione. Teorema di Mozzi e asse di Mozzi. Campo circolare e elicoidale.

Lezioni 60 – 61, ore effettive 60 – 61 (16 novembre 2018)

**I.** Moto rigido di contatto, velocità di strisciamento, atto di moto senza strisciamento, di puro rotolamento e di imperniamento. Velocità assoluta e relativa del punto di contatto.

Vincolo di assenza di strisciamento come vincolo anolonomo integrabile e non integrabile. Esempi: ruota sulla rotaia rettilinea, ruota sulla rotaia circolare.

Lezioni 62 – 64, ore effettive 62 – 64 (19 novembre 2018)

**I.** Esempi moto con assenza di strisciamento: sfera appoggiata sul piano, cilindro appoggiato su un piano e cono appoggiato su un piano.

Moto rigido piano: definizione. Proprietà dell'atto di moto rigido di un moto rigido piano. Centro di istantanea rotazione. Teorema di Chasles. Base e rulletta, moto rigido piano come moto rigido di contatto. L'ellissografo.

Lezioni 65 – 67, ore effettive 65 – 67 (21 novembre 2018)

**J.** Centro di massa di un corpo rigido, proprietà di ubicazione, corpi forati. Momento d'inerzia di un corpo rigido, Teorema di Huygens. Momento d'inerzia di un corpo rigido, proprietà di additività e corpi forati. Matrice d'inerzia.

Lezioni 68 – 69, ore effettive 68 – 69 (23 novembre 2018)

**J.** Matrice d'inerzia, prodotti d'inerzia, tensore d'inerzia, diagonalizzazione del tensore d'inerzia, riferimento, assi e momenti principali e centrali d'inerzia, corpi a simmetria

sferica, corpi a simmetria cilindrica o giroscopica, matrice d'inerzia per i corpi piani, proprietà di simmetria della distribuzione della massa e assi principali d'inerzia, ellissoide d'inerzia. Energia cinetica di un corpo in moto rigido; esempi: cilindro che rotola senza strisciare e cono che rotola senza strisciare.

Lezioni 70 – 72, ore effettive 70 – 72 (26 novembre 2018)

**J.** Energia cinetica e momento totale della quantità di moto di un corpo rigido in moto sferico.

**K.** Esempi di applicazione del formalismo lagrangiano ai sistemi rigidi. Modelli di vincolo perfetto per i sistemi rigidi: rotolamento senza strisciamento, appoggio liscio, giunto ideale, cerniera.

Lezioni 73 – 75, ore effettive 73 – 75 (28 novembre 2018)

**K.** Esempi di applicazione del formalismo lagrangiano ai sistemi rigidi. Moto rotatorio di un corpo rigido pesante sottoposto a una forza elastica rispetto a un osservatore terrestre e a uno non inerziale, moto rotatorio di un corpo rigido pesante sottoposto a una coppia costante, moto di una sbaretta pesante vincolata mediante uno snodo liscio e sottoposta all'azione di una forza elastica, moto del bipendolo, moto di puro rotolamento di un cilindro rispetto a un osservatore terrestre e rispetto a un osservatore non inerziale, sistemi con sollecitazioni dipendenti dal tempo.

Lezioni 76 – 77, ore effettive 76 – 77 (30 novembre 2018)

**K.** Esempi di applicazione del formalismo lagrangiano ai sistemi rigidi.

**L.** Piccole oscillazioni: lagrangiana ridotta, oscillatori interagenti, modi normali di oscillazione.

Lezioni 78 – 80, ore effettive 78 – 80 (10 dicembre 2018)

**M.** Sufficienza delle equazioni cardinali per il corpo rigido libero. Sollecitazioni equivalenti: peso e sollecitazione centrifuga.

**N.** Corpo rigido con asse fisso: bilanciamento statico e dinamico.

Lezioni 81 – 83, ore effettive 81 – 83 (12 dicembre 2018)

**I.** Coni di Poinot. Moto rigido di precessione: asse di precessione e asse di figura.

**J.** Ellissoide d'inerzia e proprietà.

**O.** Moto rigido con un punto fisso. Moti alla Poinot: equazioni di Eulero e leggi di conservazione. Teorema di Poinot.

Lezioni 84 – 85, ore effettive 84 – 85 (14 dicembre 2018)

**O.** Moti alla Poinot: rotazioni permanenti e loro stabilità.

Lezioni 86 – 88, ore effettive 86 – 88 (17 dicembre 2018)

**O.** Trottola di Lagrange: discussione euristica basata sulla seconda equazione cardinale, leggi di conservazione, equazioni pure del moto, analisi qualitativa del moto. Trottola lanciata velocemente.

Lezioni 89 – 91, ore effettive 89 – 91 (19 dicembre 2018)

**P.** Corpo rigido appoggiato a una superficie liscia: caratterizzazione della sollecitazione vincolare. Statica. Dinamica: equazioni pure. Caso del corpo rigido sottoposto al solo peso.

**G.** Esercizi sui sistemi olonomi: deduzione delle equazioni di Lagrange e analisi dei moti.

Lezioni 92 – 92, ore effettive 92 – 92 (21 dicembre 2018)

**A.** Introduzione alla teoria dei tensori: trasformazione di coordinate, vettore, covettore. Definizione di tensore. Esempi: tensore d'inerzia, tensore degli sforzi e tensore di deformazione.