Programma del corso Metodi Matematici – Ingegneria Meccanica

E.N.M. Cirillo – Anno Accademico 2001–2002

Numeri complessi

Proprietà del campo complesso; isomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Re}\,\mathbb{C}$; operazioni su $\mathbb{C}$; modulo e argomento principale; interpretazione geometrica, forma polare e forma esponenziale dei numeri complessi; radice di un numero complesso, equazioni di secondo grado e scomposizione di un polinomio di secondo grado. Metrica del campo complesso, proprietà topologiche (aperti, chiusi, punti limite, frontiera, ..., e relative proprietà).

Curve nel piano complesso

Funzioni complesse di variabile reale: limite, continuità, derivabilità e relative proprietà. Curve nel piano complesso. Insiemi connessi e semplicemente conenssi. Teorema di Jordan (senza dimostrazione).

Successioni, serie e funzioni elementari

Successioni di numeri complessi, definizioni di convergenza, legame con le successioni della parte reale e di quella immaginaria, condizione di Cauchy (completezza di $\mathbb{C}$), Teorema sulle operazioni e relazioni tra la convergenza della successione e quella delle successioni dei moduli e degli argomenti. Serie di numeri complessi, definizioni di convergenza, legame con le serie della parte reale e di quella immaginaria, condizione sufficiente per la convergenza, Teorema sulle operazioni e relazione tra la convergenza della serie e quella della serie dei moduli. Successioni e serie di funzioni: definizioni di convergenza puntuale e uniforme, criterio di Cauchy per l'uniforme convergenza delle successioni, criterio di Weirstrass per l'uniforme convergenza della serie. Convergenza uniforme della serie $\sum_n z^n/n!$, definizione di $\exp\{z\}$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, principali proprietà delle funzioni elementari.

Funzioni complesse

Funzioni complesse di variabile complessa. Limiti e continuità: relazione con la parte reale e quella immaginaria, Teorema sulle operazioni, continuità delle funzioni elementari. Funzioni differenziabili e olomorfe: definizione, condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità, Teorema sulla continuità delle funzioni differenziabili, Teorema di Cauchy–Riemann, Teorema sulle operazioni. Condizioni di Cauchy–Riemann in coordinate polari, funzione logaritmo come inversa della funzione esponenziale, differenziabilità dei rami monodromi della funzione logaritmo (cenni). Funzioni olomorfe e serie di potenze.

Integrali di funzioni complesse

Integrale di una funzione complessa di variabile reale: definizione, legame con l'integrale della parte reale e di quella immaginaria, lunghezza di una curva regolare. Integrale di una funzione complessa di variabile complessa: definizione, Teorema sull'integrale come somma di integrali di forme differenziali, Teorema integrale di Cauchy in forma debole e forte (dimostrazione di Goursat). Formula integrale di Cauchy. Calcolo degli integrali di funzioni razionali. Alcuni tipi di integrali reali riconducibili a integrali complessi: $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ikx}\, dx$.

Serie di Fourier

Funzioni a quadrato sommabile, spazio $\mathcal{L}^2$, prodotto scalare in $\mathcal{L}^2$, dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz–Holder, norma e distanza in $\mathcal{L}^2$. Convergenza in norma delle successioni e delle serie di funzioni di $\mathcal{L}^2$. Base, coefficienti e serie di Fourier. Teorema sulla convergenza in norma della serie di Fourier (senza dimostrazione). Teorema sul passaggio al limite sotto il segno di integrale per successioni e serie convergenti in norma, relazioni tra la convergenza in norma, quella puntuale e quella uniforme, teoremi relativi alla convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier (senza dimostrazione), Teorema sull'unicità dello sviluppo in serie di Fourier. Teorema sulla migliore approssimazione finita. Serie di Fourier in soli seni e in soli coseni sull'intervallo $[0, \pi]$. Legami tra basi di Fourier e problemi di Sturm–Liouville (cenni). Applicazione della seria di Fourier allo studio di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (circuiti RC). Forma esponenziale della serie di Fourier.

Trasformata di Fourier

Dalla serie all'integrale di Fourier: argomento euristico. Teorema sull'integrale di Fourier: esistenza della trasformata, continuità, limitatezza, comportamento all'infinito (Lemma di Riemann–Lebesgue), integrale di Fourier. Teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier: trasformata della funzione traslata, derivata

della trasformata e trasformata della derivata. Applicazioni della trasformata di Fourier: soluzione di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, funzione di trasferimento in circuiti RC, reticoli di diffrazione.

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine quasi–lineari. Interpretazione geometrica: direzioni caratteristiche e curve caratteristiche. Teorema sull'appartenenza di una curva caratteristica a una superficie integrale. Metodo delle caratteristiche per la soluzione del relativo problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione semilineare. Metodo di Lagrange.

Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine quasi–lineari. Problemi di Dirichelet e di Neumann. Problemi ben posti secondo Hadmard: il controesempio di Hadamard. Equazioni della fisica matematica: Laplace, d'Alambert (onde), calore e Schröedinger. Classificazione in base agli autovalori della matrice parte principale: equazioni ellittiche, iperboliche e paraboliche. Teorema sulla classificazione. Forma canonica delle equazioni ellittiche, iperboliche e paraboliche. Invarianza dell'equazione di Laplace sotto traslazioni e rotazioni. Non invarianza ell'equazione di d'Alambert sotto trasformazioni di Galileo, invarianza sotto trasformazioni di Lorentz. Riduzione in forma canonica: caso parabolico, iperobolico e ellittico a coefficienti costanti.

Operatori differenziali

Richiami sugli operatori differenziali: gradiente, divergenza, rotore, laplaciano di una funzione scalare e laplaciano di un vettore. Proprietà. Teorema di Gauss (della divergenza) e Teorema di Stokes (senza dimostrazione). Deduzione del carattere ondulatorio della propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto a partire dalle equazioni di Maxwell. Operatori differenziali in coordinate polari sul piano, cilindriche e polari nello spazio.

Equazione di Laplace

Introduzione all'equazione di Laplace, applicazioni fisiche: potenziale elettrostatico, distribuzione stazionaria delle temperature. Teoremi della media per le funzioni armoniche, principio del massimo forte e debole, Teorema di unicità per il Problema di Dirichelet. Esistenza della soluzione del problema di Dirichelet sul disco: Teorema integrale di Poisson. Problema di Dirichelet e di Neumann sul rettangolo: metodo di separazione delle variabili. Problema di Dirichelet in un dominio a simmetria polare nel piano: metodo di separazione delle variabili e equazione di Cauchy–Euler. Equazione agli autovalori per l'operatore Laplaciano nel piano in un rettangolo, equazione di Helmholtz.

Equazione delle onde

Equazione di d'Alambert in una, due e tre dimensioni. Onde elettromagnetiche piane: deduzione dell'equazione di d'Alambert a partire dalle equazioni di Maxwell. Equazione di d'Alambert per le piccole oscillazioni di una corda sottile. Deduzione alla Lagrange e alla d'Alambert. Teorema di conservazione del funzionale energia. rema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$: formula di d'Alambert, interpretazione fisica della soluzione. Soluzione dell'equazione di d'Alambert sulla semiretta. La corda finita, metodo della separazione delle variabili, il caso libero, smorzato e forzato. Vibrazioni in una membrana bidimensionale. Densità di modi normali di vibrazione in dimensione uno e due. Soluzione dell'equazione della corda illimitata in forma integrale per mezzo della trasformata di Fourier: deduzione della formula di d'Alambert, applicazione alla corda illimitata forzata. Propagazione di un pacchetto d'onda, relazione di dispersione, Relazione di dispersione per l'equazione $u_{xx} - (1/c^2)u_{tt} = \lambda^2 u$ e "broadening" del pacchetto. I solitoni e l'equazione di Koteweg–de Vries.

Equazione del calore

Introduzione all'equazione del calore: deduzione alla Fourier dell'equazione del calore, Principio del massimo, unicità della soluzione del problema di Dirichelet e buona dipendenza dalle condizioni iniziali. Riferimente ai problemi ben posti secondo Hadamard. Possibili problemi ai limiti. Metodo della separazione delle variabili per la sbarra limitata; metodo della trasformata di Fourier per la sbarra illimitata. Riscaldamento di una parete.