Esercizi 1. Sisti

Richiami

(Scusate per la compilazione sbagliata degli accenti ed eventuali errori)

Esercizio 1
Disegna le seguenti curve e scrivine l'espressione in forma parametrica e cartesiana:
1.a) γ_1: Circonferenza Centro $\boldsymbol{C} = (0, -2)$ e Raggio $r = \frac{1}{2}$
1.b) γ_2 Circonferenza Centro $\boldsymbol{C} = (2, 0)$ e Raggio $r = 1$
1.c) γ_3 Circonferenza Centro $\boldsymbol{C} = (-3, -1)$ e Raggio $r = 3$
1.d) γ_4 Metá sinistra della Circonferenza Centro $\boldsymbol{C} = (1, 1)$ e Raggio $r = \frac{3}{4}$

Svolgimento 1.a
La circonferenza é l'insieme di punti $\boldsymbol{P} = (x, y)$ a distanza $r = \frac{1}{2}$ da un punto fissato chiamato centro $\boldsymbol{C} = (0, -2)$.
In formule:

$$dist(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}) = \frac{1}{2};$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2)^2)} = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = \frac{1}{2}$$

da cui prendendo il quadrato arriviamo ad un espressione cartesiana implicita della circonferenza:

$$\gamma_1 : x^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{4}$$

Se avessi voluto solo la meta superiore avrei aggiunto la condizione $(y+2) \geq 0$

Per la forma parametrica, considero il vettore che congiunge il centro con un punto $\boldsymbol{P} = (x, y)$ che appartiene alla circonferenza. Definisco t come l'angolo che l'asse orizzontale passante per il centro forma con il suddetto punto.
Ogni punto (vettore) della circonferenza lo ottengo sommando il vettore centro $(0, -2)$ al vettore che parte dal centro e arriva al punto generico dlla Circonferenza, ovvero:

$$\gamma_1 : (0, -2) + (\frac{1}{2}\cos(t), \ \frac{1}{2}\sin(t)) \ t \in [0, 2\pi) \ \text{ Ovvero :}$$
$$\gamma_1 : (\frac{1}{2}\cos(t), \ -2 + \frac{1}{2}\sin(t)) \ t \in [0, 2\pi)$$

Se avessi voluto solo la meta superiore avrei messo : $t \in [0, \pi]$

Esercizio 2
Disegna le seguenti curve e scrivine l'espressione in forma parametrica e cartesiana:
2.a) β_1: Segmento di estremi $(1, -2)$ e $(4, -2)$

2.b) β_2: Segmento di estremi $(5,-1)$ e $(5,3)$
2.c) β_3: Segmento di estremi $(1,3)$ e $(-2,5)$

Cenni Svolgimento 2

I primi 2 sono diretti, per il terzo, trovere l'eq. cartesiana esplicita della retta che passa per due punti, e dire per quale estremi di x (o y se preferite) va considerata, per la rappresentazione parametrica essendo una forma cartesiana esplicita basta porre $x = t$ e sostituire

Esercizio 3

Trova il vettore tangente $\hat{\boldsymbol{t}}$ e il vettore normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ alle curve indicate [1], nel punto $\boldsymbol{Q} = (x_Q, y_Q)$
3.a) Vettore tangente e normale alla curva γ_1 in $\boldsymbol{Q} = (0, -\frac{3}{2})$
3.b) Vettore tangente e normale alla curva γ_2 in $\boldsymbol{Q} = (3,0)$
3.c) Vettore tangente e normale alla curva γ_3 in $\boldsymbol{Q} = \gamma(t = \frac{\pi}{4})$
3.d) Vettore tangente e normale alla curva γ_4 in $\boldsymbol{Q} = (1, \frac{7}{4})$

3.e) Vettore tangente e normale alla curva β_1 in $\boldsymbol{Q} = (3,-2)$
3.f) Vettore tangente e normale alla curva β_2 in $\boldsymbol{Q} = (5,1)$
3.g) Vettore tangente e normale alla curva β_2 in $\boldsymbol{Q} = (5,2)$
3.h) Vettore tangente e normale alla curva β_3 in $\boldsymbol{Q} = (10,2)$
3.i) Vettore tangente e normale alla curva β_3 in $\boldsymbol{Q} = (-2,5)$

Svolgimento 3

Per calcolare la tangente e la normale facciamo come sappiamo fare fin'ora: (vedremo in seguito modo piu veloce in coordinate cartesiane implicite)

- mettiamo la curva in coordinate parametriche;
- vediamo per quale "t" la curva vale $\boldsymbol{Q} = (x_Q, y_Q)$, (in genere questo t lo chiamo t_Q)
- calcoliamo la tangente per questo t_Q

Ricordiamo che data la curva generica $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, il vettore tangente alla curva nel punto individuato da $t = t_Q$ vale: $\hat{\boldsymbol{t}} = (\dot{x}(t_Q), \dot{y}(t_Q))$
dove $\dot{x}(s) = \frac{d}{dt}x(t = s)$.
Il vettore normale $\hat{\boldsymbol{n}} = (-\dot{y}(t_Q), \dot{x}(t_Q))$

Svolgimento 3.a)

Punto $\boldsymbol{Q} = (x_Q, y_Q) = (0, -\frac{3}{2})$.
Curva in coordinate parametriche: $(\frac{1}{2}\cos(t),\ -2 + \frac{1}{2}\sin(t))$;
Cerchiamo il t_Q: $x(t_Q) = x_Q$ per $\frac{1}{2}\cos(t_Q) = 0$, quindi $t_Q = \frac{\pi}{2}$ oppure $t_Q = \frac{3}{2}\pi$, peró vale anche: $y(t_Q) = y_Q$, cioé $-2 + \frac{1}{2}\sin(t_Q) = -\frac{3}{2}$, questa vale solo per $t_Q = \frac{3}{2}\pi$
Calcolo il vettore tangente generico $\hat{\boldsymbol{t}} = (-\frac{1}{2}\sin(t), \frac{1}{2}\cos(t))$ quindi la normale generica $\hat{\boldsymbol{n}} = (-\frac{1}{2}\cos(t)), -\frac{1}{2}\cos(t))$; infine calcolo la normale al punto $\boldsymbol{Q}$: $\hat{\boldsymbol{n}} = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{3}{2}\pi), -\frac{1}{2}\sin(\frac{3}{2}\pi)) = (0,1)$

[1] (svolte negli esercizi precedenti)

Esercizio 4

Date Le seguenti funzioni $f(x,y)$, disegna e scrivi in forma cartesiana e parametrica i seguenti insiemi di livello $I_c f$.

$f_1(x,y) = y + 2x^2$, $f_2(x,y) = 3x^2$, $f_3(x,y) = 2y + x - 3$, $f_4(x,y) = \frac{1}{3}y$, $f_5(x,y) = e^{(x^2+y^2)}$, $f_6(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2}$

4.a) $I_c(f_1)$ per $c = -2; 3; 5$. Se possibile anche al variare di c generico.

4.b) $I_c(f_2)$ per $c = 1; 2; -1$. Se possibile anche al variare di c generico.

4.c) $I_c(f_3)$ per $c = -2; -1; 3$. Se possibile anche al variare di c generico.

4.d) $I_c(f_4)$ per $c = -1; 0; 3$. Se possibile anche al variare di c generico.

4.e) $I_c(f_5)$ per $c = 3; -3, e^2, e^{-4}$. Se possibile anche al variare di c

4.f) $I_c(f_6)$ per $c = 2; -1; 3$. Se possibile anche al variare di c generico.

Svolgimento 4.a

$I_{-2}(f_1):\ y + 2x^2 = -2$, ovvero:

$y = -2x^2 - 2$, che rappresenta una parabola con vertice in $(0, -2)$ rivolta verso l'alto. Al variare di c cambia il vertice della parabola ma rimane uguale la sua ampiezza.

Esercizio 5

Scrivere a quale linea di livello di f (definite nell'esercizio precedente), appartiene il punto $\boldsymbol{P} = (x_P, y_P)$

Scrivere la direzione in cui devo muovermi a partire da $\boldsymbol{P}$ perche la funzione abbia la variazione massima (ovvero perche la quota vari il piu possibile)

5.a) $f = f_1(x,y)$; $\boldsymbol{P} = (1,3)$

5.b) $f = f_2(x,y)$; $\boldsymbol{P} = (2,-1)$

5.c) $f = f_3(x,y)$; $\boldsymbol{P} = (0,2)$

5.d) $f = f_7(x,y)$; $\boldsymbol{P} = (4,1)$

Svolgimento 5.a)

$f_1(x,y) = y + 2x^2$ e $\boldsymbol{P} = (1,3)$.

L'insieme di livello generico é la curva: $I_c(f):\ y = -2x^2 + c$.

Un punto $\boldsymbol{P} = (x_P, y_P)$ appartiene ad una curva se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva.

Nel nostro caso perche $\boldsymbol{P} = (1,3) \in I_c(f)$ deve valere:

$3 = -2(1)^2 + c$, ovvero $c = 5$.

Quindi $\boldsymbol{P} = (1,3)$ appartiene alla curva di livello $I_5(f)$ cioé $y = -2x^2 + 5$

La direzione in cui devo muovermi da $\boldsymbol{P}$ per variazione e massima di f é la direzione normale alla linea di livello $I_5(f)$ nel punto $\boldsymbol{P} = (1,3)$. Ricordiamo infatti che muoversi nella direzione della linea di livello (ovvero nella direzione tangente alla linea di livello) mi fa mantenere vicino alla linea di livello quindi pressoche alla stessa quota.

Per calcolare la normale seguendo i Cenni svolgimento Esercizio 3, metto la curva in forma parametrica: $(x(t) = t,\ y(t) = -2t^2 + 5)$;

$x(t_P) = x_P$ per $t_p = 1$.

Calcolo il vettore tangente $\hat{\boldsymbol{t}} = (1, -4t)$ quindi la normale $\hat{\boldsymbol{n}} = (4t, 1)$ e dunque la normale nel puto desiderato $\hat{\boldsymbol{n}}(t = 1) = (4, 1)$

Esercizio 6

Date le seguenti funzioni $f(x, y)$ e le seguenti curve γ; Calcolare e disegnare qualitativamente la restrizione di f su γ; Tale restrizione si indica con $f(\gamma)$.
$f_1 = -2y^2 + x^2$; $f_2 = -2x^2 - 5y + y^2$; $f_3 = -2x + y + 3$; $f_4 = \frac{xy}{x^2+y^2}$;
$f_5 = x - \frac{y^4}{x} + \frac{x^2-3y^4}{x}$
$\gamma_1 : x = 0$; $\gamma_2 : y = 0$; $\gamma_3 : y = -x$; $\gamma_4 : x = -3y$; $\beta_1 : x = y^2$;
6.a) Calcola f_1 su tutte le curve γ
6.b) Calcola f_2 su tutte le curve γ
6.c) Calcola f_3 su tutte le curve γ
6.d) Calcola f_4 su tutte le curve γ
6.a) Calcola f_5 su tutte le curve γ e sulla curva β

Svolgimento 6.a)

$f_1(\gamma_1) = f_1(0, y) = -2y^2$. Quindi se siamo su questa curva (che corrisponde all'asse y) la funzione é una funzione di una variabile rappresentata da una parabola rivolta verso il basso.
$f_1(\gamma_4) = f_1(-3y, y) = -2y^2 + (-3y)^2 = 7y^2$. Quindi se siamo su questa curva (che corrisponde alla retta $x = -3y$) la funzione ristretta é una funzione di una variabile rappresentata da una parabola rivolta verso l'alto.
La stessa curva γ_4 potevamo scriverla come $y = -\frac{1}{3}x$ e studiare la restrizione in questo modo: $f_1(\gamma_4) = f_1(x, -\frac{1}{3}x) = -2(-\frac{1}{3}x)^2 + x^2 = -\frac{2}{9}x^2 + x^2 = \frac{7}{9}x^2$.
quindi $f_1(\gamma_4) = \frac{7}{9}x^2$.
Ovviamente coincide con la curva trovata prima, é solo scritta in funzione della variabile x. Infatti dato che siamo sulla curva $x = -3y$ possiamo riscriverla in funzione di y e ritrovare : $f_1(\gamma_4) = \frac{7}{9}x^2 = \frac{7}{9}(-3y)^2 = 7y^2$.