

Esame di Geometria BAER
Appello del 19/1/2021 testo A

Cognome e Nome Firma

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare. Segnare in basso sul retro del foglio eventuali date nelle quali per VALIDI MOTIVI non si è disponibili per sostenere l'esame orale.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si trovi una base del nucleo e una dell'immagine di f . (3 punti)

(b) Si trovi una matrice diagonale D e una matrice M tale che $M^t A M = D$ (4 punti).

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice canonica di f . (4 punti)

(b) Se esiste, trovi l'inversa di f (motivare la non esistenza, o, se l'inversa esiste ma non si riesce a calcolarla, dire perchè esiste dà un punto). (3 punti)

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Sia $V = \text{Mat}(2)$ lo spazio delle matrici due per due a coefficienti reali, posto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

consideriamo i sottospazi

$$E = \{X \in V \mid BX = XB\} \qquad F = \{X \in V \mid BX = -XB\}$$

- (a) Si trovino le dimensioni e basi di E e di F . (2 punti)
- (b) Si trovino le dimensioni e basi di $E \cap F$ e $E + F$. (2 punti)
- (c) Si trovi, se possibile, un esempio di una matrice non nulla C e di una matrice non nulla X tale che si abbia sia $CX = XC$ e $CX = -XC$. La matrice C può essere invertibile? Spiegare perchè. (4 punti)

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia). Si consideri il piano $\pi : x + 2y - z + 2 = 0$ e le rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

- (a) Si trovino equazioni cartesiane della retta r , contenuta in π e perpendicolare ed incidente a r_1 . (4 punti)
- (b) Si determini la posizione reciproca di r_1 e r_2 e si trovi l'equazione del piano parallelo a r_2 contenente r_1 . (2 punti)
- (c) Si trovi la proiezione ortogonale di r_2 sul piano $\pi' : x + y + z = 0$. (2 punti)