Esame di Geometria BAER
Appello del 15/6/2021 testo A

Cognome e Nome .... Firma ....

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare. Gli orali si terranno il 21 e il 22 Giugno.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Sia E_0 lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema $S = \mathrm{Sol}\{x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 2x_1 + x_3 + x_4 = 0$, e lo spazio affine $E = \{\underline{v} + E_0\}$ dove $\underline{v} = (1, -2, 1, 1)$

a) Si dica se il vettore $\underline{w} = (15, -32, 17, 33)$ appartiene a E (3 punti)

b) Si trovino equazioni cartesiane del sottospazio parallelo a E per $\underline{w}$ (4 punti)

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to M(2)$ ($M(2)$ spazio delle matrici due per due a coefficienti reali)

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y - z & 2z \\ x - y & x \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M(2)$ (3 punti)

b) trovare l'antiimmagine della matrice (4 punti)

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) trovare una matrice diagonale D (2 punti) e una matrice invertibile P (3 punti) tali che $P^t AP = D$.

b) Esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{v}^t A\underline{v} > 0$? Se esiste trovarne uno, se non esiste si dica perchè (3 punti)

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia). Dati i piani

$$\pi_1 : x + y + z - h = 0 \qquad \pi_2 : x + ky = 0 \qquad \pi_3 : x + y - z - 1 = 0$$

a) Studiare, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ la loro posizione reciproca (2 punti).

b) Posto $h = 1, k = -1$, consideriamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Trovare le equazioni della retta s simmetrica di r rispetto al piano π_3 (3 punti).

c) Trovare l'equazione della sfera passante per il punto P di coordinate $(3, 1, 1)$ e tangente π_3 in Q di coordinate $(1, 1, 1)$ (3 punti)