Inversa di una matrice con l'algoritmo di Gauss

Cominciamo con una semplice osservazione: una matrice quadrata $n \times n$ a scalini può avere al più n pivot (uno per riga); in questo caso sarà una matrice triangolare superiore in cui nessun elemento della diagonale è nullo, quindi il determinante sarà diverso da zero e la matrice sarà invertibile. Altrimenti la matrice a scalini avrà meno di n pivot, e quindi almeno una riga nulla (per definizione il pivot è il primo elemento non nullo di una riga, se in una riga non cadono pivot allora la riga ha solo elementi nulli) e dunque non sarà invertibile.

Ora vediamo con un esempio come si può usare l'algoritmo di Gauss per invertire una matrice. Cominciamo con una matrice già in forma a scalini. Scriviamo la matrice e accanto scriviamo la matrice identità, ottenendo una matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Usando le operazioni elementari di riga posso trasformare la matrice sulla sinistra nella matrice identità; le stesse operazioni le effettuerò anche sulla parte destra della matrice. (ovvero effettuerò le operazioni su tutta la matrice composta dai due blocchi). Ad esempio con l'operazione $R_2 \to R_2 - 2R_3$ ottengo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Continuando con le operazioni $R_1 \to R_1 - 2R_2$, $R_1 \to R_1 - 3R_3$, $R_1 \to \frac{1}{2}R_1$ arrivo alla matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il blocco a destra della matrice è l'inversa della matrice di partenza.

Se la matrice A di cui cerchiamo l'inversa non è già a scalini, il procedimento è lo stesso: si effettua l'algoritmo di Gauss sulla matrice a blocchi $(A|I)$ fino ad arrivare ad una matrice a blocchi $(A'|B)$ dove A' è una matrice a scalini equivalente per righe ad A. A questo punto se A' ha almeno una riga nulla significa che né A', né A sono invertibili, se invece A' è invertibile allora si continua come nell'esempio appena visto fino ad arrivare ad una matrice a blocchi del tipo $(I|B')$ e si avrà $B' = A^{-1}$.

Vediamo questi casi in due esempi: cominciamo con la matrice a blocchi

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

scambiando le prime due righe della matrice ottengo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Con le due operazioni di riga $R_2 \to R_2 - 3R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$ arrivo alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto con un'ulteriore operazione di riga $R_3 \to R_3 - \frac{1}{4}R_2$ il blocco a sinistra è una matrice con una riga nulla, quindi non invertibile. Allora anche la matrice A non è invertibile.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se consideriamo la matrice a blocchi $(A|I)$ ed effetuiamo le operazioni di riga $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - 3R_1$, $R_3 \to R_3 - R_2$ otteniamo la matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

dove il blocco a sinistra è a scalini ed è invertibile. Dunque anche la matrice A sarà invertibile. Per trovare l'inversa di A proseguiamo facendo le operazioni di riga $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$, $R_2 \to R_2 - \frac{8}{5}R_3$, $R_1 \to R_1 - 2R_2$, $R_1 \to R_1 - 2R_3$ ed arriviamo ad una matrice a blocchi, dove il blocco a sinistra è la matrice identità, il blocco di destra è la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 2 & \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è proprio l'inversa di A.

Concludiamo con una breve dimostrazione del perchè il metodo funziona: abbiamo visto negli esercizi che ogni operazione elementare di riga su una matrice A può essere effettuata moltiplicando a sinistra A per un'opportuna matrice R. Inoltre si può vedere come ulteriore esercizio che il determinante di tutte le matrici corrispondenti ad operazioni di riga è diverso da zero. Applicare una serie di operazioni elementari di riga ad una matrice a blocchi $(A|I)$, corrisponde quindi a moltiplicare a sinistra le matrici A ed I per un prodotto di matrici $R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1$. Quindi, se alla fine arriviamo ad una matrice a blocchi del tipo (I, B), abbiamo

$$R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1 \cdot A = I \quad \text{e} \quad R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1 \cdot I = R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1,$$

dunque

$$B = R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1 = A^{-1}.$$

Se invece riducendo A in una forma a scalini troviamo una matrice A' non invertibile, allora

$$0 = \det(R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1 \cdot A) = \det(R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1) \det(A).$$

Ma il determinante del prodotto delle R_i non può essere 0 in quanto hanno tutte determinante non nullo, dunque il determinante di A deve essere zero e A non è invertibile.