Esercizio 2.2.2

Un elemento pesante E di massa $\mathfrak{M}$ è vincolato senza attrito a una guida rigida parabolica di equazione $z = h\,\xi^2$ che ruota attorno all'asse z verticale diretto verso l'alto e fisso rispetto a terra.

Detto $\vec{\varepsilon}_1 = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2$ il versore dell'asse ξ, ed eseguendo il calcolo nello spazio di riferimento terrestre, determinare la velocità di rotazione $\dot\theta$ necessaria affinché sia uniforme lungo la guida il moto di E uscente dalle condizioni iniziali $P_0 \equiv O$ e $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{\varepsilon}_1$, con $v_0 > 0$.

Calcolare la reazione vincolare esercitata dalla guida quando E *transita* in una posizione individuata da un'ascissa di equilibrio $\xi^* \neq 0$. $\square$

Risoluzione dell'Esercizio 2.2.2 Sia (O, ξ, η, ζ) il riferimento solidale alla guida, con η ortogonale al piano della guida e $\zeta = z$ verticale ascendente e fisso rispetto a terra. Siano $\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ la base dei versori di tali assi, ed $\mathcal{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base degli assi solidali a terra. Si chiamino $\theta = \theta(t)$ l'anomalia fra i versori $\vec{e}_1$ ed $\vec{\varepsilon}_1$, e $\zeta(\xi) = h\,\xi^2$. Ne seguono

$$\dot\zeta \;=\; 2\,h\,\xi\,\dot\xi\,, \qquad \ddot\zeta \;=\; 2\,h\,\dot\xi^2 + 2\,h\,\xi\,\ddot\xi\,.$$

Sia σ l'ascissa curvilinea della guida; con la scelta $\sigma_0 = \xi_0 = 0$ si hanno

$$\begin{aligned}
\dot\sigma \;&=\; sign(\dot\xi)\,\sqrt{\dot\xi^2 + \dot\zeta^2} \;=\; \dot\xi\,\sqrt{1 + 4\,h^2\,\xi^2} \;=\; \dot\xi\,\sigma' \\
\ddot\sigma \;&=\; \ddot\xi\,\sigma' + \dot\xi^2\,\sigma'' \;=\; \frac{1}{\sigma'}\,\Big((1 + 4\,h^2\,\xi^2)\,\ddot\xi + 4\,h^2\,\xi\,\dot\xi^2\Big) \quad \text{giacché} \quad \sigma'\sigma'' = 4h^2\xi\,,
\end{aligned}$$

e dunque $\quad \sigma(\xi) \;=\; \displaystyle\int_0^\xi \sqrt{1 + 4\,h^2\,x^2}\;d\,x\,;$

inoltre, essendo $\overrightarrow{OP} = \xi\,\vec{\varepsilon}_1 + \zeta\,\vec{\varepsilon}_3$, il versore tangente alla guida risulta

$$\vec{T}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,h^2\,\xi^2}}\,\Big(\vec{\varepsilon}_1 + 2\,h\,\xi\;\vec{\varepsilon}_3\Big) \qquad \text{ovvero} \qquad \Big(\vec{T}\Big)_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sigma'}\begin{pmatrix}1\\0\\2\,h\,\xi\end{pmatrix}\,,$$

e siccome la guida è piana e convessa, ed introducendo $\boxed{\vec{v}^{rel} := \dot\xi\,\vec{\varepsilon}_1 + \dot\zeta\,\vec{\varepsilon}_3}$, ne seguono

$$\vec{B} \;=\; -\vec{\varepsilon}_2\,, \qquad \vec{N} \;=\; \vec{B}\times\vec{T} \;=\; \frac{1}{\sigma'}\;(\vec{\varepsilon}_3 - 2\,h\,\xi\;\vec{\varepsilon}_1)$$

$$\Big(\vec{v}^{rel}\Big)_{\mathcal{E}} \;:=\; \begin{pmatrix}\dot\xi\\0\\\dot\zeta\end{pmatrix} \;=\; \dot\xi\,\begin{pmatrix}1\\0\\\zeta'\end{pmatrix} \;=\; \dot\sigma\,\Big(\vec{T}\Big)_{\mathcal{E}}\,.$$

D'altra parte sono

$$\Big(\vec{\varepsilon}_1\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}, \qquad \Big(\vec{\varepsilon}_2\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix}, \qquad \Big(\vec{\varepsilon}_3\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\Big(\overrightarrow{OP}\Big)_{e} = \Big(\xi\,\vec{\varepsilon}_1 + \zeta\,\vec{\varepsilon}_3\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}\xi\,\cos\theta\\\xi\,\sin\theta\\\zeta\end{pmatrix},$$

e quindi, siccome $\dot{\vec{\varepsilon}}_1 \;=\; \dot\theta\,\vec{\varepsilon}_2 \;=\; \dot\theta\,\vec{\varepsilon}_3\times\vec{\varepsilon}_1$ ed $\dot{\vec{\varepsilon}}_2 \;=\; -\dot\theta\,\vec{\varepsilon}_1$, si hanno anche

$$\Big(\dot{\overrightarrow{OP}}\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}\dot\xi\,\cos\theta\\\dot\xi\,\sin\theta\\\dot\zeta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\xi\,\dot\theta\,\sin\theta\\\xi\,\dot\theta\,\cos\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\Big(\ddot{\overrightarrow{OP}}\Big)_{e} \;=\; \begin{pmatrix}\ddot\xi\,\cos\theta\\\ddot\xi\,\sin\theta\\\ddot\zeta\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\dot\xi\,\dot\theta\,\sin\theta\\\dot\xi\,\dot\theta\,\cos\theta\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\ddot\theta\,\xi\,\sin\theta\\\ddot\theta\,\xi\,\cos\theta\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dot\theta^2\,\xi\,\cos\theta\\\dot\theta^2\,\xi\,\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

Alternativamente, ponendo $\vec\omega := \dot\theta\,\vec\varepsilon_3$ le stesse relazioni si possono anche scrivere come segue

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\overrightarrow{OP}}\right)_e &= \left(\dot\xi\,\vec\varepsilon_1 + \dot\zeta\,\vec\varepsilon_3 + \xi\,\dot\theta\;\vec\varepsilon_3\times\vec\varepsilon_1\right)_e \\
\left(\ddot{\overrightarrow{OP}}\right)_e &= \left(\ddot\xi\,\vec\varepsilon_1 + \ddot\zeta\,\vec\varepsilon_3 + 2\dot\xi\,\dot\theta\,\vec\varepsilon_3\times\vec\varepsilon_1 + \xi\,\ddot\theta\,\vec\varepsilon_3\times\vec\varepsilon_1 + \dot\theta\,\vec\varepsilon_3\times\left(\dot\theta\,\vec\varepsilon_3\times\xi\,\vec\varepsilon_1\right)\right)_e \\
&= \left(\ddot\xi\,\vec\varepsilon_1 + \ddot\zeta\,\vec\varepsilon_3 + 2\vec\omega\times\dot\xi\,\vec\varepsilon_1 + \dot{\vec\omega}\times\overrightarrow{OP} + \vec\omega\times\left(\vec\omega\times\overrightarrow{OP}\right)\right)_e
\end{aligned}$$

e queste permettono di controllare che $\left(\ddot{\overrightarrow{OP}}\right)_\varepsilon = \begin{pmatrix}\ddot\xi - \xi\,\dot\theta^2\\ 2\,\dot\xi\,\dot\theta + \xi\,\ddot\theta\\ \ddot\zeta\end{pmatrix}$, e di motivare l'introduzione della

$\boxed{\vec v^\tau := \xi\,\dot\theta\;\vec\varepsilon_3\times\vec\varepsilon_1}$. Inoltre, con $\dfrac{1}{r(\xi)} := \left|\dfrac{d\vec T}{d\,\xi}\right|$, equivalente all'analoga $\dfrac{1}{\rho(\sigma)} := \left|\dfrac{d\vec T}{d\,\sigma}\right|$

e dunque $\dfrac{1}{r(\xi)} = \dfrac{\sigma'}{\rho(\sigma(\xi))}$, risultano anche

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\vec T &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma'}\,(\vec\varepsilon_1 + 2h\,\xi\;\vec\varepsilon_3)\right) = \dot\xi\,\frac{d}{d\xi}\,\vec T + \vec\omega\times\vec T =: \frac{\dot\xi}{r(\xi)}\,\vec N + \vec\omega\times\vec T \\
\left(\frac{d}{dt}\,\vec T\right)_\varepsilon &= \frac{d}{dt}\,\left(\vec T\right)_\varepsilon + \left(\vec\omega\times\vec T\right)_\varepsilon = \dot\xi\,\left[-\frac{\sigma''}{(\sigma')^2}\begin{pmatrix}1\\0\\2h\,\xi\end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma'}\begin{pmatrix}0\\0\\2h\end{pmatrix}\right] + \frac{1}{\sigma'}\begin{pmatrix}0\\ \dot\theta\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

che implicano

$$\frac{1}{r}\,\left(\vec N\right)_\varepsilon = \frac{1}{r\,\sigma'}\begin{pmatrix}-2h\,\xi\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\sigma''}{(\sigma')^2}\begin{pmatrix}1\\0\\2h\,\xi\end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma'}\begin{pmatrix}0\\0\\2h\end{pmatrix}$$

da cui $\boxed{\dfrac{1}{r} = \dfrac{2h}{1+4h^2\xi^2}}$ insieme con

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\vec v^{rel} &= \frac{d}{dt}\left(\dot\xi\;\vec\varepsilon_1 + \dot\zeta\;\;\vec\varepsilon_3\right) \qquad \text{e dunque} \\
\left(\frac{d}{dt}\,\vec v^{rel}\right)_\varepsilon &= \begin{pmatrix}\ddot\xi\\0\\ \ddot\zeta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \dot\xi\,\dot\theta\\0\end{pmatrix} \qquad \text{ovvero} \\
\frac{d}{dt}\,\vec v^{rel} &=: \vec a^{rel} + \vec\omega\times\vec v^{rel}\ ,
\end{aligned}$$

ove si è introdotta la $\boxed{\vec a^{rel} = \ddot\xi\;\vec\varepsilon_1 + \ddot\eta\;\vec\varepsilon_2 + \ddot\zeta\;\vec\varepsilon_3}$ In particolare, con

$$\frac{d^{rel}}{dt}\,\vec T = \dot\xi\,\frac{d}{d\xi}\,\vec T = \frac{\dot\sigma}{\sigma'}\,\frac{d}{d\xi}\,\vec T = \dot\sigma\,\frac{d}{d\sigma}\,\vec T = \frac{\dot\sigma}{\rho(\sigma)}\,\vec N = \frac{\dot\xi}{r(\xi)}\,\vec N\ ,$$

e con

$$\frac{d}{dt}\,\vec v^\tau = \frac{d}{dt}\left(\xi\,\dot\theta\;\vec\varepsilon_2\right) = \xi\,\ddot\theta\;\vec\varepsilon_2 + \dot\xi\,\dot\theta\;\vec\varepsilon_2 - \xi\,\dot\theta^2\;\vec\varepsilon_1\ ,$$

si confermano le seguenti

$$\begin{aligned}
\vec a^{rel} &= \frac{d^{rel}}{dt}\left(\dot\sigma\;\vec T\right) = \ddot\sigma\;\vec T + \frac{\dot\sigma^2}{\rho(\sigma)}\,\vec N \\
\dot{\vec T} &= \frac{\dot\sigma}{\rho(\sigma)}\,\vec N + \vec\omega\times\vec T\ ,
\end{aligned}$$

e, con $\rho\,(\sigma(\xi)) \equiv \sigma'\ r(\xi)$, le

$$\begin{aligned}
\overset{\cdot\cdot}{\overrightarrow{OP}} &= \ddot\sigma\ \vec T + \dot\sigma\ \left(\dot\xi\ \frac{d\vec T}{d\xi} + \vec\omega\times\vec T\right) + \frac{d}{dt}\ \vec v^{\tau} \\
&= \ddot\sigma\ \vec T + \frac{\dot\sigma^2}{\rho(\sigma)}\ \vec N + \vec\omega\times\vec v^{rel} + \left(\vec a^{\tau} + \vec\omega\times\vec v^{rel}\right) \\
&= \frac{\ddot\sigma}{\sigma'}\ \left(\vec\varepsilon_1 + 2h\,\xi\,\vec\varepsilon_3\right) + \frac{\dot\sigma^2}{\sigma'\rho(\sigma)}\ \left(-2h\,\xi\,\vec\varepsilon_1 + \vec\varepsilon_3\right) + \dot\xi\,\dot\theta\ \vec\varepsilon_2 \\
&\quad + \left(-\xi\,\dot\theta^2\ \vec\varepsilon_1 + (\xi\,\ddot\theta + \dot\xi\,\dot\theta)\,\vec\varepsilon_2\right)
\end{aligned}$$

$$\ddot\xi = \frac{\ddot\sigma}{\sigma'} - \frac{\dot\sigma^2\sigma''}{(\sigma')^3} \ = \ \frac{\ddot\sigma}{\sigma'} - 4h^2\xi\ \frac{\dot\sigma^2}{(\sigma')^4} \ = \ \frac{\ddot\sigma}{\sigma'} - 2h\,\xi\ \frac{\dot\sigma^2}{\sigma'\rho(\sigma)}$$

$$\ddot\zeta = 2h\dot\xi^2 + 2h\,\xi\,\ddot\xi \ = \ 2h\,\xi\ \frac{\ddot\sigma}{\sigma'} + \frac{\dot\sigma^2}{\sigma'\rho(\sigma)}\ .$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\left(\vec a\cdot\vec T\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+4\,h^2\,\xi^2}}\ \left(\vec\varepsilon_1 + 2\,h\,\xi\ \vec\varepsilon_3\right) \quad \cdot \\
&\quad \cdot\left(\ddot\xi\,\vec\varepsilon_1 + \ddot\zeta\,\vec\varepsilon_3 + 2\vec\omega\times\overset{\cdot}{\overrightarrow{OP}} + \dot{\vec\omega}\times\overrightarrow{OP} + \vec\omega\times\left(\vec\omega\times\overrightarrow{OP}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sigma'}\ \left(\ddot\xi - \omega^2\,\xi + 2h\,\xi\ (2h\,\dot\xi^2 + 2h\,\xi\,\ddot\xi)\right).
\end{aligned}$$

Nelle applicazioni è spesso più conveniente riferirsi allo spazio solidale alla guida, nel quale agiscono sull'elemento E la forza peso $-m\,g\,\vec\varepsilon_3$, la centrifuga $m\,\omega^2\,\xi\,\vec\varepsilon_1$ (qualora sia $\dot{\vec\omega} = 0$), la forza di deviazione $-2\,m\,\vec\omega\times\vec v^{rel} = -2m\,\dot\theta\,\dot\xi\,\vec\varepsilon_2$, e la reazione vincolare $\vec f^{v}$.

Proiettando l'equazione della dinamica $\overset{\cdot\cdot}{\overrightarrow{OP}} \ = \ \vec g + \frac{1}{m}\ \vec f^{v}$ lungo la tangente alla guida si ottiene dunque la

$$\ddot\xi - \omega^2\,\xi + 2h\,\xi\ (2h\,\dot\xi^2 + 2h\,\xi\,\ddot\xi) \ \equiv\ (\sigma')^2\ddot\xi - \omega^2\,\xi + \sigma'\,\sigma''\,\dot\xi^2 \ \equiv\ \sigma'\,\ddot\sigma - \omega^2\,\xi \ = \ -2\,g\,h\,\xi\ ,$$

e la condizione che sia $\ddot\sigma = 0$ comporta quindi che siano $\omega^2 - 2\,g\,h \ = \ 0$ oppure $\xi \ = \ 0$.

Posizioni di equilibrio esistono sempre:

se $\omega^2 \ \neq\ 2\,g\,h$ c'è solo la posizione $\xi = 0$, che però è non solo di equilibrio relativo ma anche assoluto (e cioè anche rispetto a terra);

se $\omega^2 \ =\ 2\,g\,h$ (e allora è senz'altro $\dot{\vec\omega} = 0$) ogni posizione sulla guida è posizione di "equilibrio" in quanto solo di equilibrio relativo. È questa l'unica possibilità perché sia $\ddot\sigma = 0$ con $\dot\sigma \neq 0$, e cioè che si abbia un moto uniforme *lungo la guida* e uscente da dati iniziali $\vec v_0 = v_0\,\vec\varepsilon_1$ con $v_0 \neq 0$.

Per calcolare la reazione vincolare $\vec f^{v}$ si usano le altre due proiezioni dell'equazione della dinamica lungo la terna intrinseca *del moto sulla guida*. A partire dal fatto che $\ddot\theta = 0$, e che $\vec\omega\times\vec v^{rel} = \dot\theta\,\vec\varepsilon_3\times\dot\xi\,\vec\varepsilon_1$, le due proiezioni lungo $\vec N$ e $\vec B$ della

$$\vec f^{v} \ = \ m\,\overset{\cdot\cdot}{\overrightarrow{OP}} - m\vec g \ = \ m\ \left(\vec a^{rel} - m\omega^2\xi\,\vec\varepsilon_1 + 2m\,\vec\omega\times\vec v^{rel}\right) - m\,\vec g,$$

sono

$$\begin{cases} f^v_N \ = \ \dfrac{m\dot\sigma^2}{\rho(\sigma)} \ + \dfrac{1}{\sqrt{1+4\,h^2\,\xi^2}}\ \left(m\,g\ + 2m\,h\,\omega^2\,\xi^2\right) \\[2ex] f^v_B \ = \ 2m\,\dot\theta\,\dot\xi\ . \end{cases}$$

Infine dato che, come si è visto, risulta $\dfrac{m\dot\sigma^2}{\rho(\sigma)} = \dfrac{m(\sigma'\,\dot\xi)^2}{\rho(\sigma(\xi))}$, si può anche ricavare $\rho(\sigma(\xi))$ dalle

$$\frac{m(\sigma')^2\dot\xi^2}{(\rho(\xi))^2} \;=\; \left(\left|\overrightarrow{OP}''\right|^2 - (\sigma'')^2\right) \;, \qquad \left(\overrightarrow{OP}\right)_{\mathcal{E}} \;=\; \begin{pmatrix}\xi\\0\\h\xi^2\end{pmatrix},$$

$$\left(\overrightarrow{OP}'\right)_{\mathcal{E}} \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\\2h\xi\end{pmatrix}, \qquad \left(\overrightarrow{OP}''\right)_{\mathcal{E}} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\2h\end{pmatrix}.$$

Infatti, giacché è $\sigma'\sigma'' = 4h^2\xi$, si ha

$$\rho(\xi) \;=\; \frac{(\sigma')^2}{\sqrt{\left|\overrightarrow{OP}''\right|^2 - (\sigma'')^2}} \;=\; \frac{(1+4h^2\xi^2)^{3/2}}{2h}\;,$$

che fornisce $\dfrac{1}{\rho} \;=\; \dfrac{2h}{(\sigma')^3} \;=\; \dfrac{1}{r\ \sigma'}$ ovvero $\dfrac{\dot\sigma^2}{\rho(\sigma)} = 2h\,\dfrac{\dot\xi^2}{\sigma'}$, cosa questa più facile da vedere calcolando il prodotto $\vec{N}\cdot\vec{a}^{rel}$.