

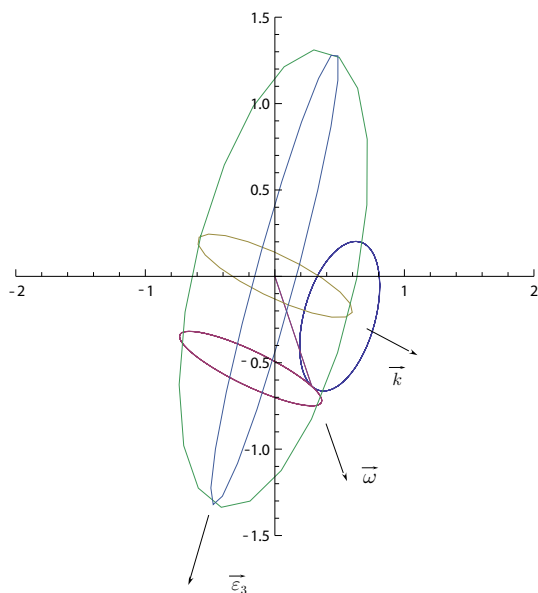
Come complementi alle varie simulazioni presentate nel Cap. 5 del mio libro, vengono qui di seguito elencate, per le stesse o analoghe simulazioni, alcuni ulteriori grafici, e con un maggiore dettaglio, che possano illustrare la dinamica del corpo rigido in moto secondo Poincot.

Prima di iniziarne l'esame è tuttavia opportuno premettere alcune considerazioni.

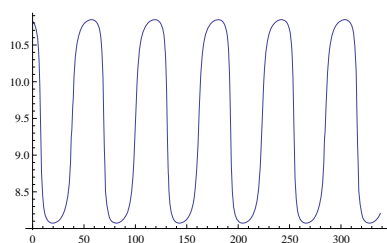
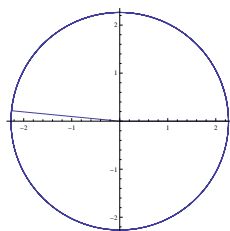
Innanzitutto è necessario rimarcare che ciascuna simulazione va considerata come un caso e se stante. I diversi valori delle condizioni strutturali rendono difficile ogni tipo di paragone specifico, almeno per quanto riguarda l'andamento, in funzione del tempo, delle diverse variabili coinvolte. Anche se con condizioni iniziali uguali la dinamica dipende dalle grandezze inerziali, e dunque le velocità risultano diverse fra loro. Inoltre va tenuto presente che gli angoli di Eulero, con i quali viene descritto il moto, sono angoli "di laboratorio", e cioè sono riferiti a una direzione a scelta dell'osservatore e non a una specifica direzione con alcun significato specifico per l'oggetto. Dunque, per esempio, l'anomalia  $\theta$  oscilla arbitrariamente, come deve, rispetto alla direzione della "verticale" (che qui, contrariamente all'esempio della trottola, non ha alcun particolare significato o ruolo) e non rimane costante, come invece avverrebbe se tale anomalia fosse riferita alla direzione di  $\vec{K}_G$ . L'oscillazione della nutazione di laboratorio significa solo che il "polo N" dell'ellissoide d'inerzia, quello al quale viene diretto il versore  $\vec{e}_3$  del riferimento solidale, oscilla avviandosi prima nella direzione delle  $z$  crescenti, poi in quella delle  $z$  decrescenti, secondo una dinamica dovuta a tutto il sistema. Nello stesso modo si spiegano le oscillazioni delle altre due coordinate, ed in particolare delle loro derivate  $\dot{\psi}$  e  $\dot{\phi}$ .

In secondo luogo va sempre ricordato che la simulazione numerica, in particolare in quanto sono coinvolte grandezze trigonometriche, non è certo libera da errori o approssimazioni. Ne è un esempio il comportamento apparentemente discontinuo di alcune funzioni, cosa senz'altro non plausibile.

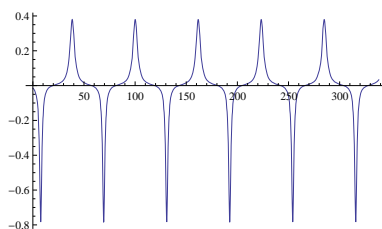
In terzo luogo si deve notare che nella ricostruzione grafica delle figure, da soggetti  $3D$  a soggetti sul piano della "fotografia", sono state necessarie alcune trasformazioni di coordinate, e ovviamente proiezioni, che ne hanno deformato o riscalato i valori. Dunque non è possibile "leggere" gli effettivi valori delle variabili dalle figure che rappresentano il corpo: questo è invece possibile solo nei grafici delle variabili espresse come funzioni del tempo, ma non nei loro valori di picco i quali, per quanto detto sopra, non possono essere considerati strettamente affidabili.



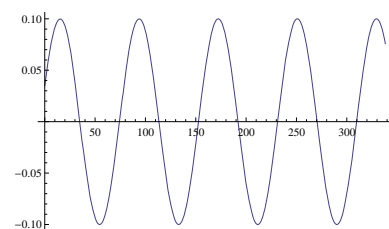
$$(s33) \quad A = 0.1, \quad B = 0.1, \quad C = 0.02, \\ \omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.1$$



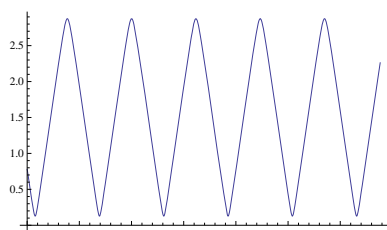
$\psi(t)$



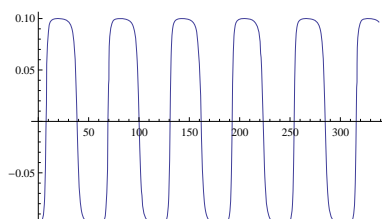
$\dot{\psi}(t)$



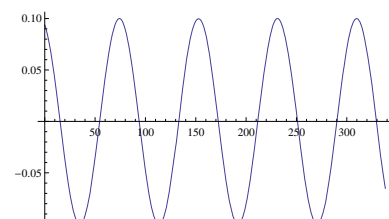
$\omega_\xi$



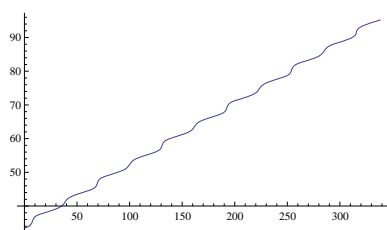
$\theta(t)$



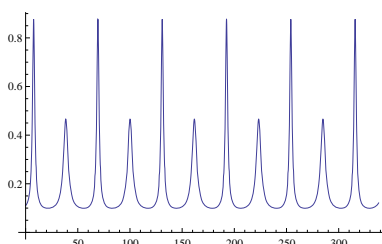
$\dot{\theta}(t)$



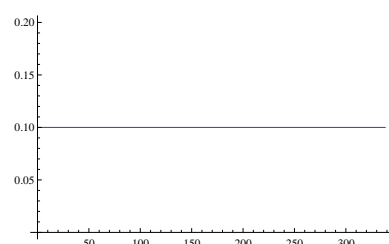
$\omega_\eta$



$\phi(t)$

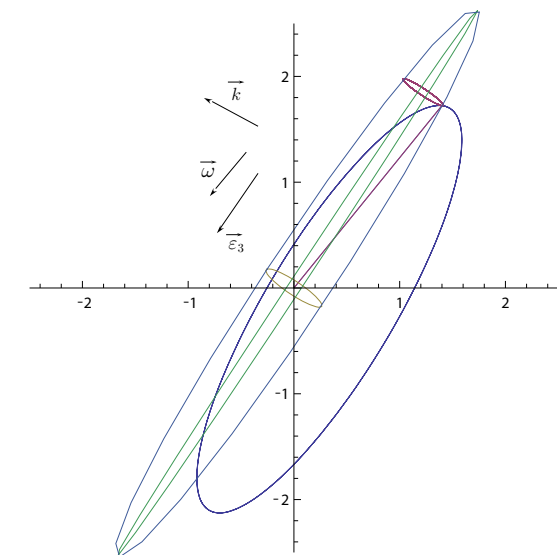


$\dot{\phi}(t)$

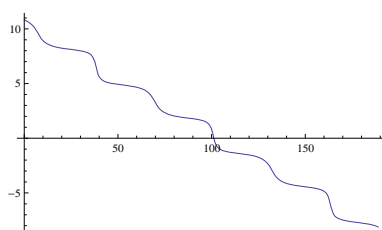
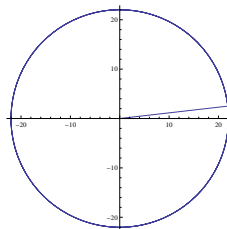


$\omega_\zeta$

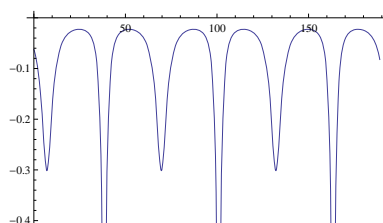
Questo è il primo, e più facilmente immaginabile, caso di moto del Poincaré. Il moto di un giroscopio abbandonato con dati iniziali “medi” è evidentemente quello dovuto al moto privo di strisciamento di due coni del Poincaré rotondi che si toccano a partire dal loro vertice comune. Nella figura in alto si può vedere la retta lungo la quale avviene la tangenza, e cioè l'asse istantaneo di rotazione, tracciato fino al punto nel quale esso interseca l'ellissoide e dove le due curve Polodía ed Erpolodía.



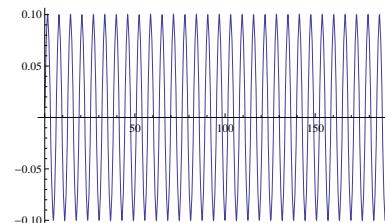
$$(566) \quad A = 0.1, \quad B = 0.1, \quad C = 0.001, \\ \omega_\xi^0 = 0.0, \quad \omega_\eta^0 = 0.1, \quad \omega_\zeta^0 = 1.0$$



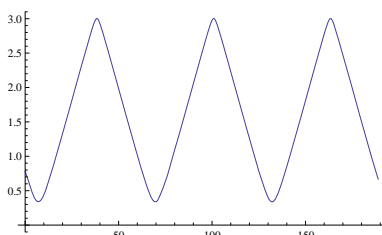
$\psi(t)$



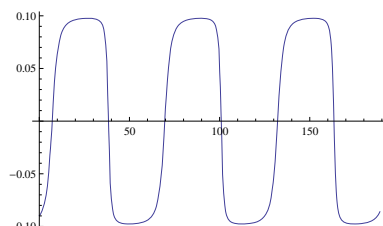
$\dot{\psi}(t)$



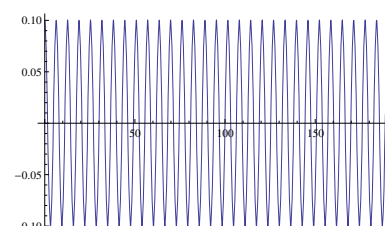
$\omega_\xi$



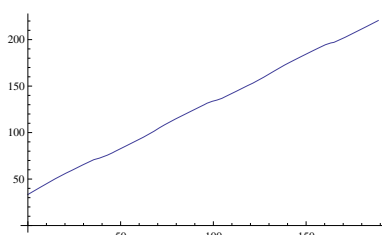
$\theta(t)$



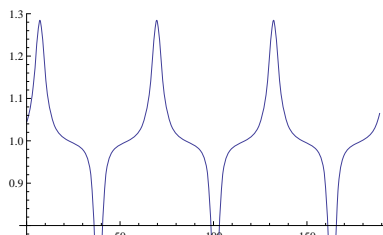
$\dot{\theta}(t)$



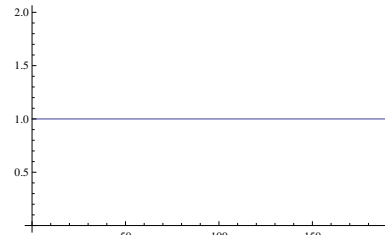
$\omega_\eta$



$\phi(t)$

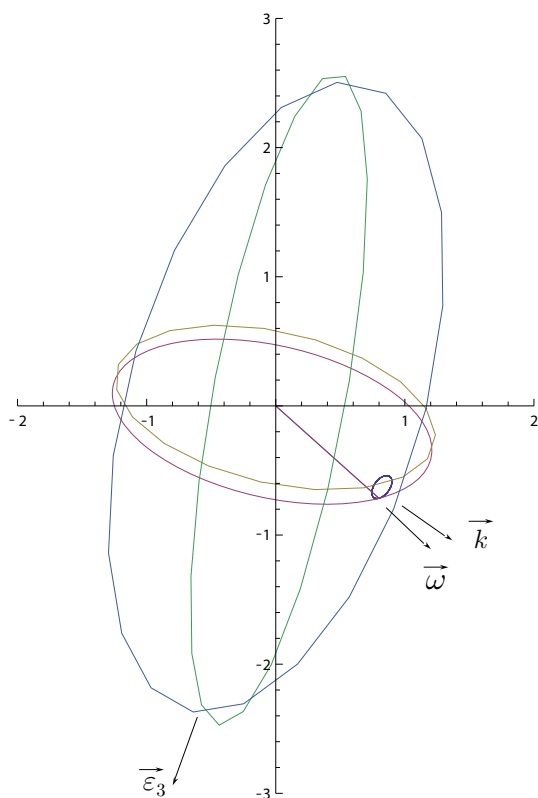


$\dot{\phi}(t)$

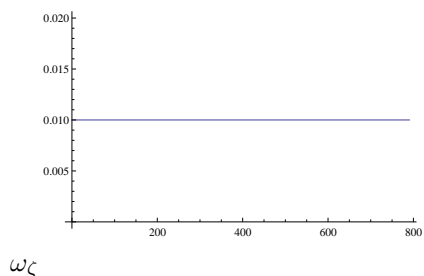
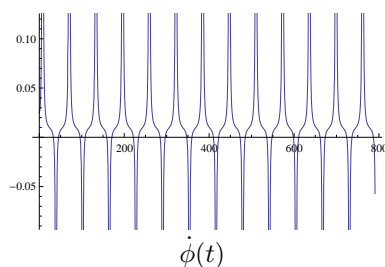
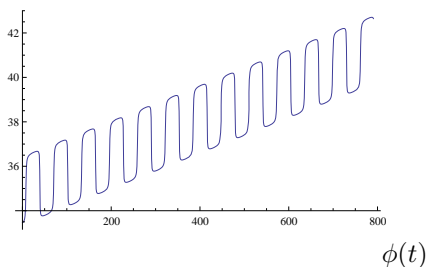
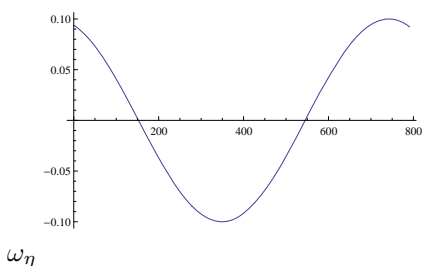
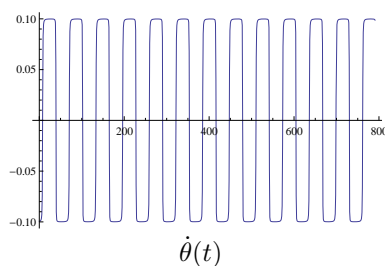
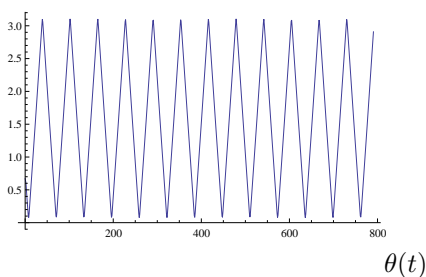
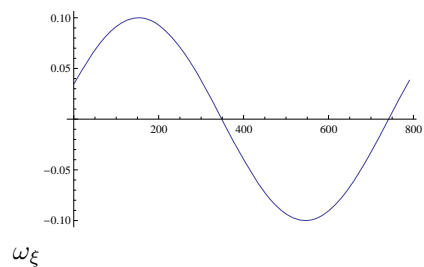
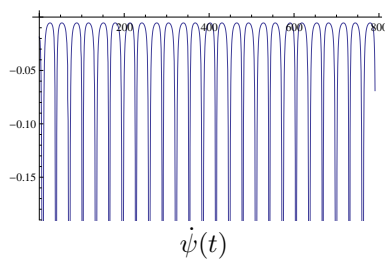
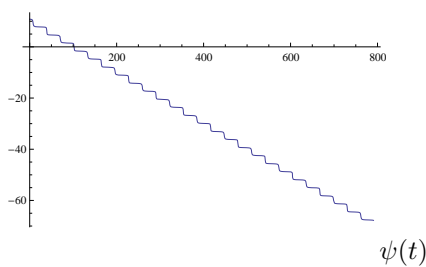
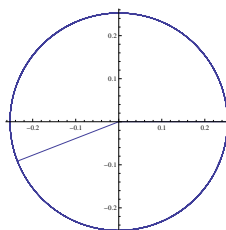


$\omega_\zeta$

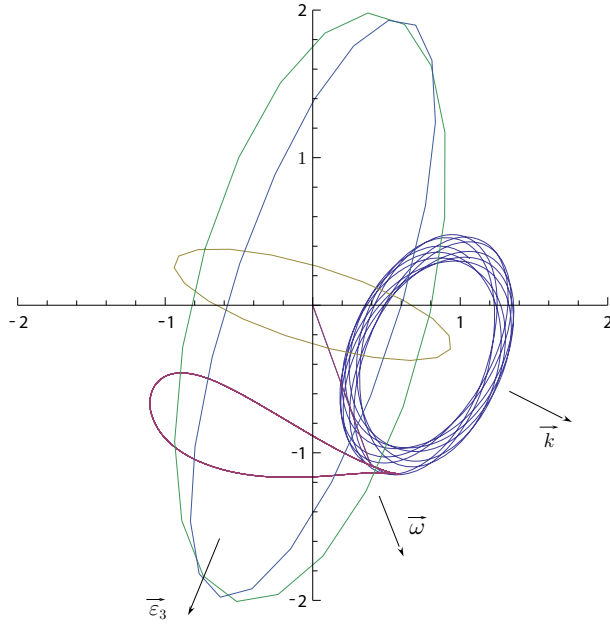
Questa simulazione mostra che sebbene la velocità angolare si mantenga “vicina” al suo valore iniziale eppure la tolleranza che è sufficiente a renderla tale non lo è per assicurare la stabilità del moto: il valore iniziale della  $\vec{\varepsilon}_3$  ha potuto essere scelto del tutto diverso dal versore  $\vec{k}$ , come invece non avrebbe potuto se, in tale istante, la  $\vec{\omega}^0$  fosse risultata strettamente parallela (o molto più “vicina”) a  $\vec{\varepsilon}_3$ .



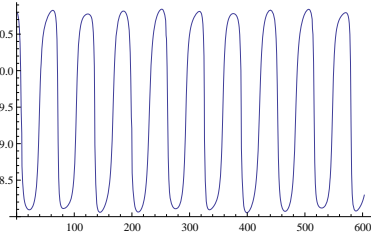
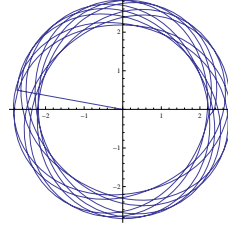
(463)  $A = 0.1, \quad B = 0.1, \quad C = 0.02,$   
 $\omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.01$



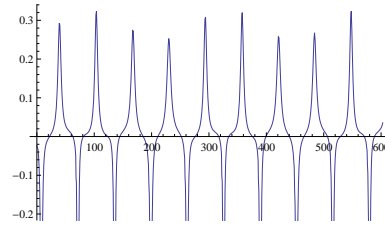
Nella simulazione si può vedere che i moti di un giroscopio con una velocità angolare iniziale parallela a un suo asse principale *ma non giroscopico* non sono stabili neanche per quanto riguarda la sola velocità angolare: sebbene con una lentezza che dipende dalla sua distanza dal piano degli assi principali identici (qui il piano  $(\xi, \eta)$ ) a lungo andare il giroscopio modifica totalmente il suo orientamento.



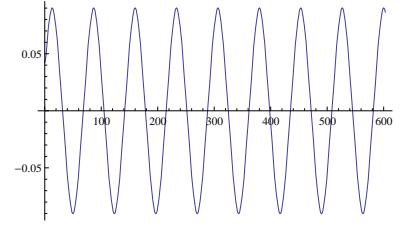
(s70)  $A = 0.1, \quad B = 0.09, \quad C = 0.02,$   
 $\omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.1$



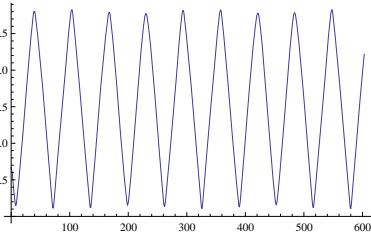
$\psi(t)$



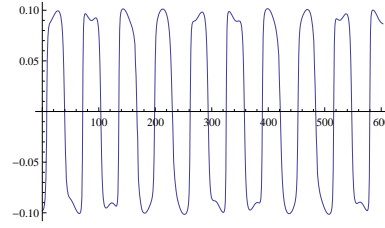
$\dot{\psi}(t)$



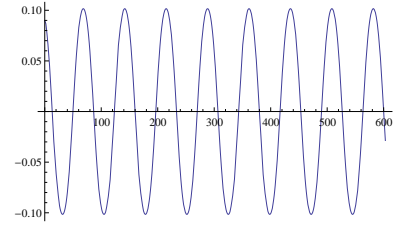
$\omega_\xi$



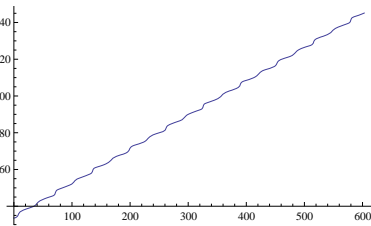
$\theta(t)$



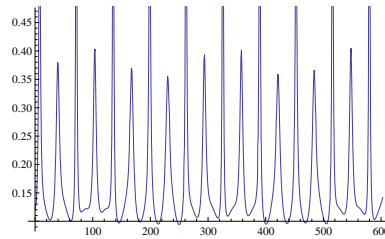
$\dot{\theta}(t)$



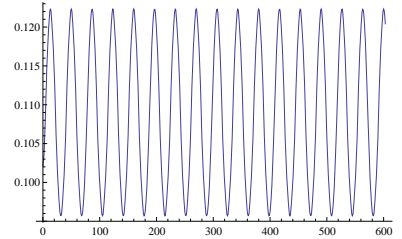
$\omega_\eta$



$\phi(t)$

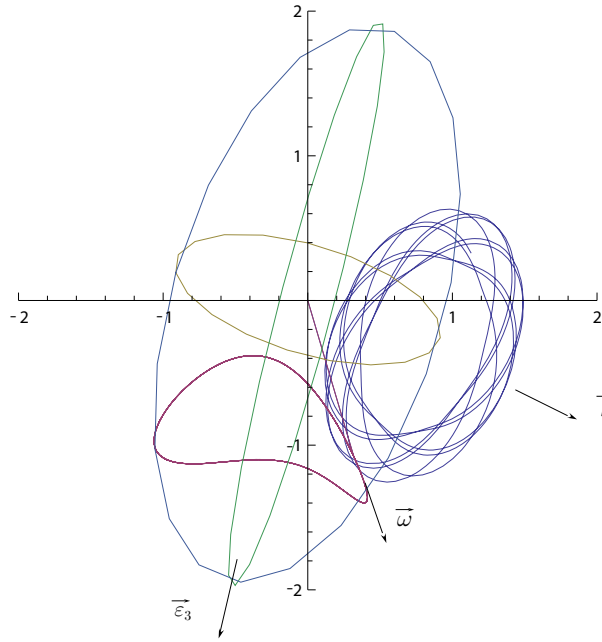


$\dot{\phi}(t)$

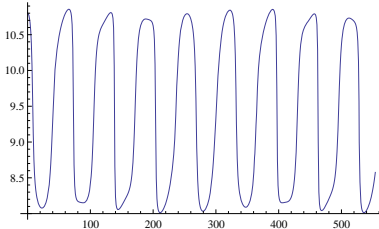
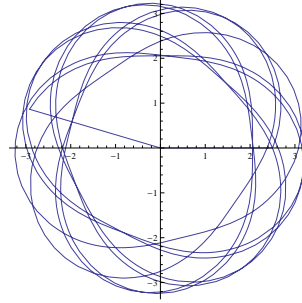


$\omega_\zeta$

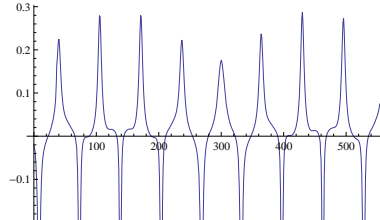
In questa, e nelle seguenti tre simulazioni, si è rappresentato il moto di un corpo non giroscopico, e per valori gradualmente decrescenti del suo secondo momento d'inerzia (gli altri due sono stati conservati uguali alle simulazioni precedenti). Il primo risultato sensibile è quello di rendere la Polodia una curva non più piana, come lo è nel caso del giroscopio; essa anzi, si deforma sempre di più avvicinandosi al punto intersezione del piano diametrale dell'ellissoide con il secondo asse centrale, e cioè quello dal quale, diminuendo il corrispondente momento d'inerzia, si sta allontanando la superficie dell'ellissoide. Come risultato quest'ultimo si inclina sempre di più rispetto a  $\vec{k}$  data la sua necessità di rimanere tangente al piano fisso  $(G', \vec{k})$ . In tali simulazioni la forma non simmetrica delle curve di velocità mostra chiaramente la carenza di precisione numerica.



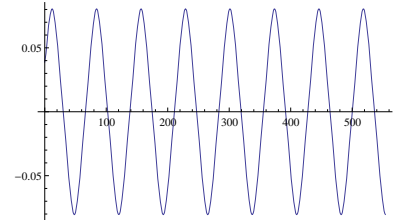
$$(467) \quad \begin{aligned} A &= 0.1, & B &= 0.08, & C &= 0.02, \\ \omega_\xi^0 &\sim 0.03, & \omega_\eta^0 &\sim 0.09, & \omega_\zeta^0 &= 0.1 \end{aligned}$$



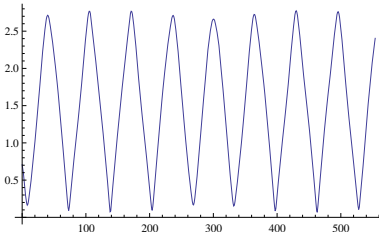
$\psi(t)$



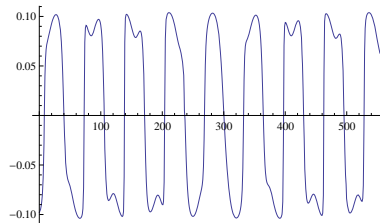
$\dot{\psi}(t)$



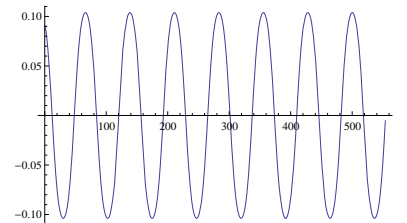
$\omega_\xi$



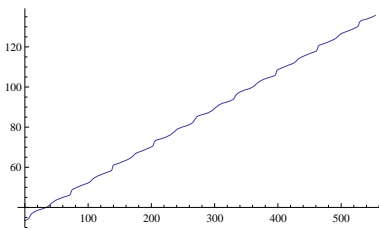
$\theta(t)$



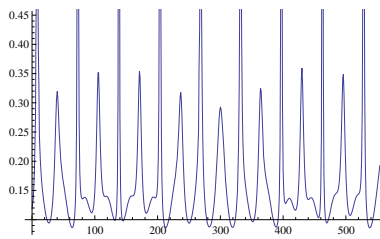
$\dot{\theta}(t)$



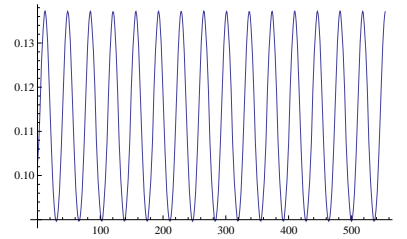
$\omega_\eta$



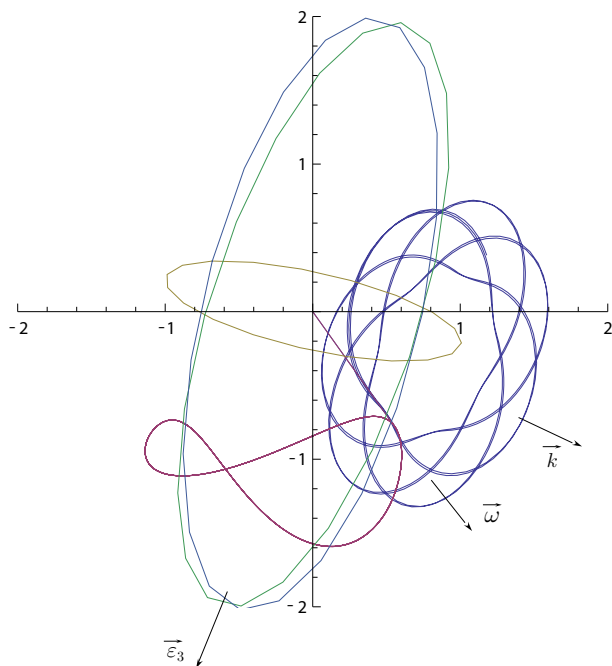
$\phi(t)$



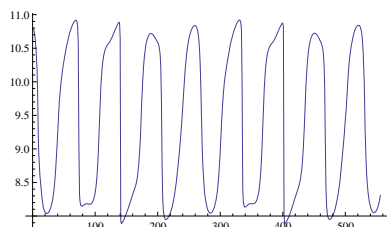
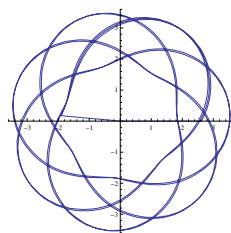
$\dot{\phi}(t)$



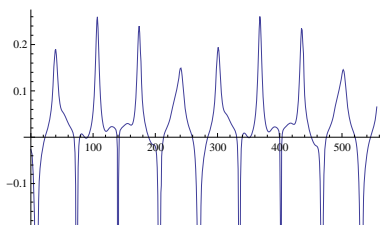
$\omega_\zeta$



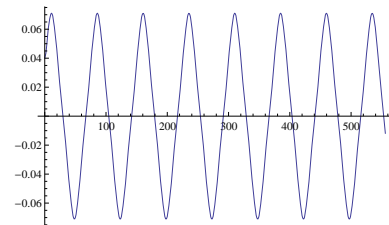
(268)  $A = 0.1, \quad B = 0.07, \quad C = 0.02,$   
 $\omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.1$



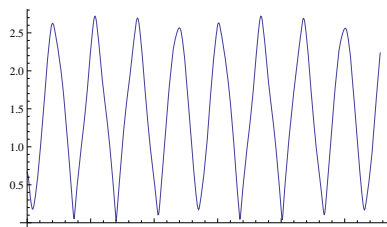
$\psi(t)$



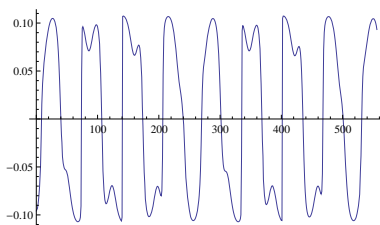
$\dot{\psi}(t)$



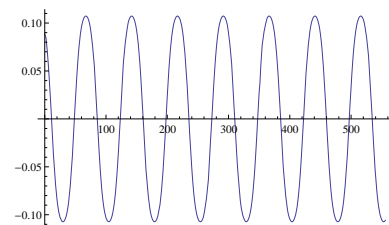
$\omega_\xi$



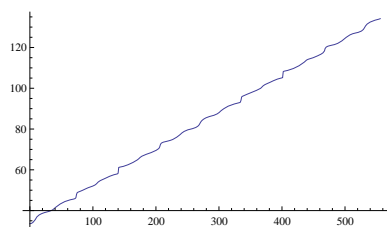
$\theta(t)$



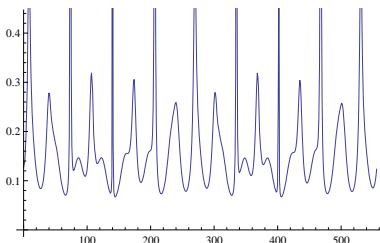
$\dot{\theta}(t)$



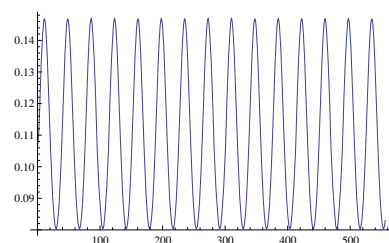
$\omega_\eta$



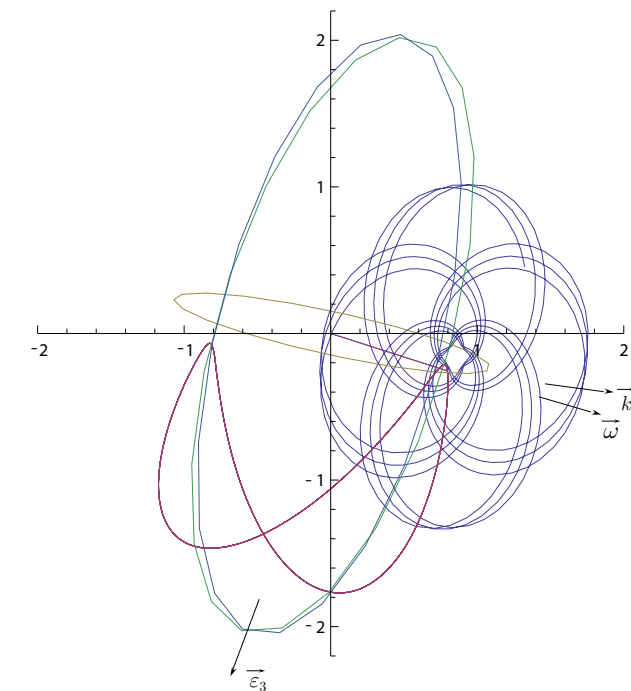
$\phi(t)$



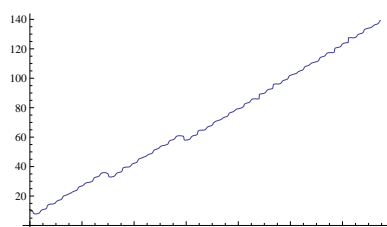
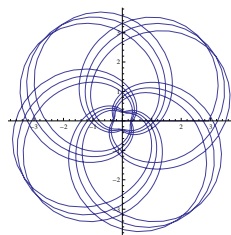
$\dot{\phi}(t)$



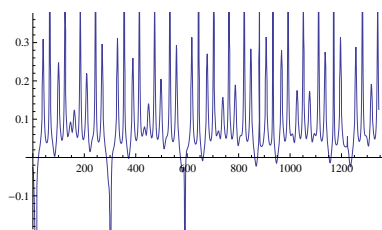
$\omega_\zeta$



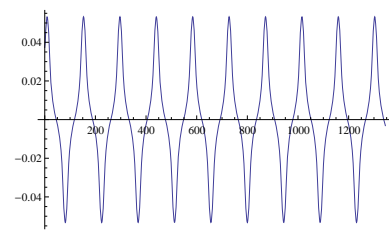
(s69)  $A = 0.1, \quad B = 0.05, \quad C = 0.02,$   
 $\omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.1$



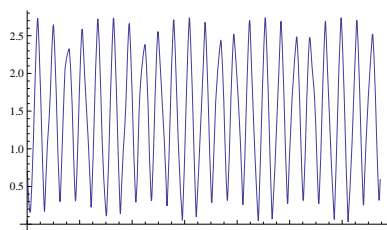
$\psi(t)$



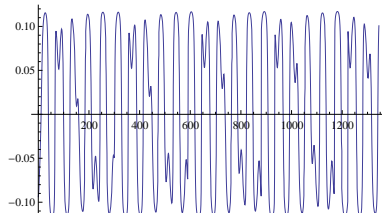
$\dot{\psi}(t)$



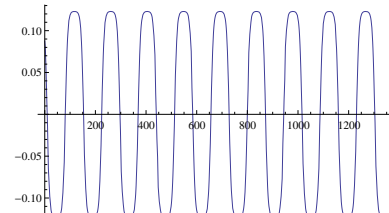
$\omega_\xi$



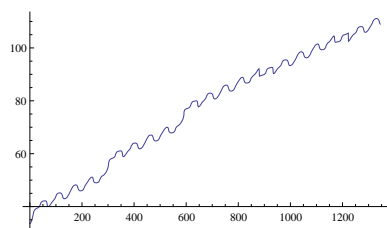
$\theta(t)$



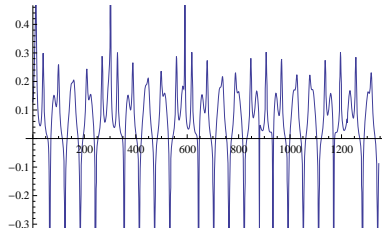
$\dot{\theta}(t)$



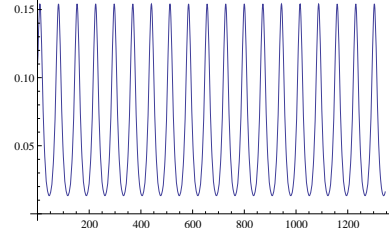
$\omega_\eta$



$\phi(t)$



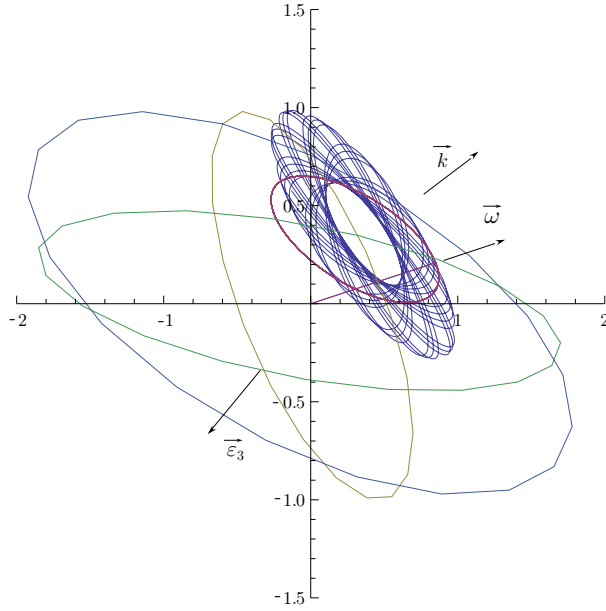
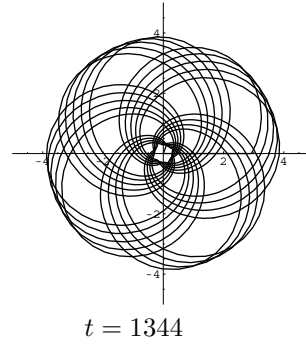
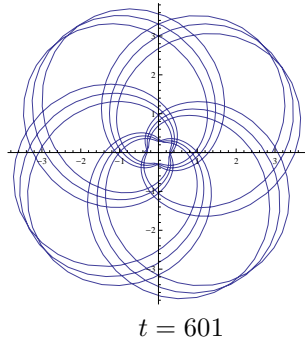
$\dot{\phi}(t)$



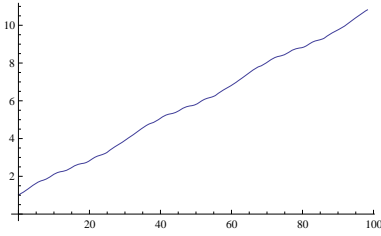
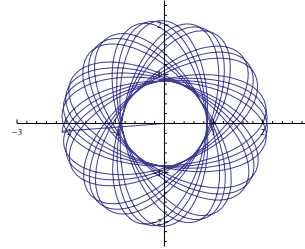
$\omega_\zeta$

Sebbene possa sembrare strano che in questa simulazione la  $\dot{\psi}$  sia quasi sempre positiva, eppure non solo in effetti non lo è sempre, ma va considerato che negli intervalli di moto in cui dovrebbe risultare negativa ciò avviene anche alla componente lungo l'asse  $z$  del vettore  $\vec{\varepsilon}_3$ , e dunque buona parte, se non tutta, le componente della velocità angolare lungo questa direzione viene usata per mantenere costante la  $\omega_\zeta$ , come deve.

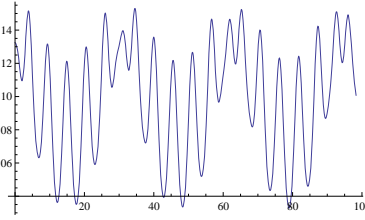




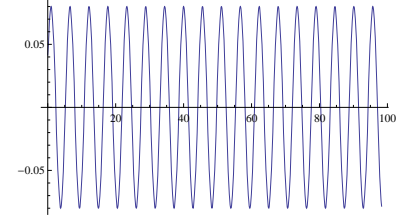
$$(437) \quad A = 0.1, \quad B = 0.6, \quad C = 0.02, \\ \omega_\xi^0 \sim 0.03, \quad \omega_\eta^0 \sim 0.09, \quad \omega_\zeta^0 = 0.15$$



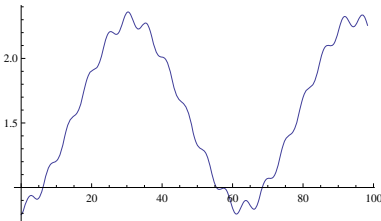
$\psi(t)$



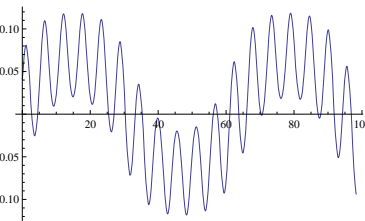
$\dot{\psi}(t)$



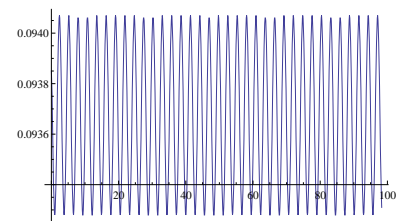
$\omega_\xi$



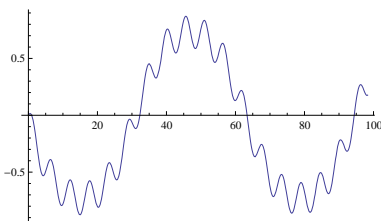
$\theta(t)$



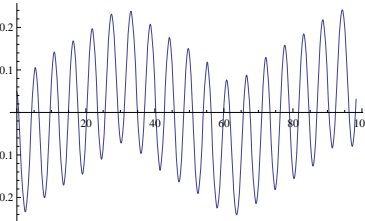
$\dot{\theta}(t)$



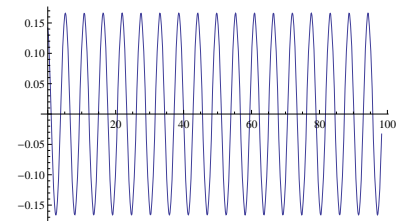
$\omega_\eta$



$\phi(t)$



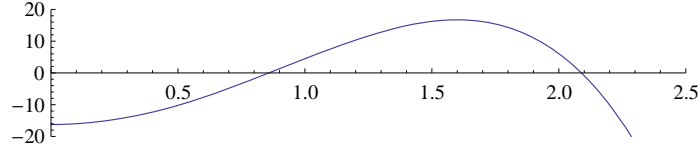
$\dot{\phi}(t)$



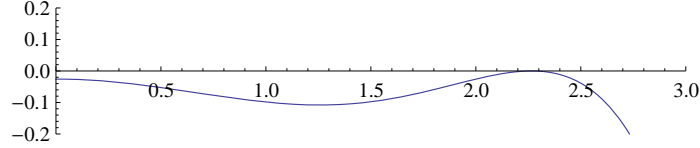
$\omega_\zeta$

Infine, si osserva che quando l'ellissoide è molto schiacciato, e la velocità angolare è inizialmente vicina al piano intermedio, la dinamica è fuori controllo per quanto riguarda possibili previsioni intuitive. L'unica previsione che è sempre facile da confermare è quella relativa al fatto che la erpolodia rimane compresa all'interno delle due circonferenza di raggio  $r_{min}$  e

$r_{max}$  previste nella teoria del moto alla Poincot dalla curva  $f_1(r)$ , il cui grafico relativo ai valori di questo caso è qui di seguito



Da quest'ultima figura, e da quella in alto che mostra l'erpolodia sul piano  $\pi$  che la contiene, si può controllare che la simulazione conferma i due valori previsti dalla teoria:  $r_{min} \simeq 0.88$  e  $r_{max} \simeq 2.2$ , nei quali la funzione  $f_1(r)$  si annulla e cambia segno. Lo stesso procedimento, nel primo dei casi simulati: quello del moto di precessione regolare, ha come grafico della stessa funzione il seguente:



Solo per completezza, viene qui anche data l'espressione esplicita delle funzioni  $f_1(r)$  e  $f_2(r)$ , (con  $D := \vec{K}_G^2/2\mathcal{T}^G$ ); la loro difficile forma rende ostile il calcolo diretto delle radici della  $f_1$  ed ovviamente del sistema di equazioni che individua senz'altro la Erpolodia.

$$\begin{aligned}
 f_1(r) &= - \frac{(D(-B+D) + A(B-D+BDr^2))(D(-C+D) + A(C-D+CDr^2))(D(-C+D) + B(C-D+CDr^2))}{A^2B^2C^2D^3} \\
 &= - \frac{(A-D)^2(B-D)^2(C-D)^2}{A^2B^2C^2D^3} + r^2 \frac{(A-D)(-B+D)(-C+D)(BCD + A(CD + B(-3C+D)))}{A^2B^2C^2D^2} \\
 &\quad - r^4 \frac{(A(3BC - 2BD - 2CD + D^2) + D(CD + B(-2C+D)))}{ABCD} - r^6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(r) &= \frac{(B-D)D(-C+D) + A(D(-C+D) + B(C-D+CDr^2))}{ABCD} \\
 &= -\frac{1}{A} - \frac{1}{B} - \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{D}{AB} + \frac{D}{AC} + \frac{D}{BC} - \frac{D^2}{ABC} + r^2
 \end{aligned}$$