SCRITTO DI MODELLI MATEMATICI PER LA MECCANICA
Corso in Ingegneria Aeronautica e dello Spazio
A.A. 2018 - 2019

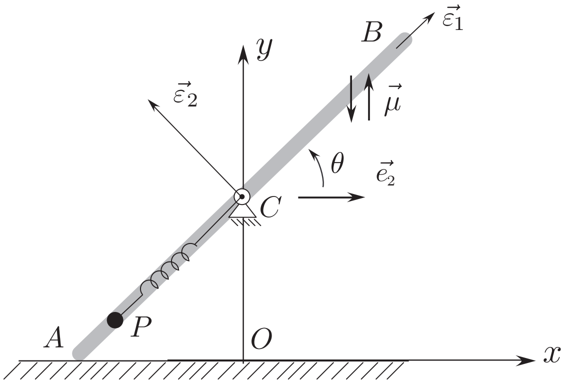
In uno spazio di riferimento $RC = (O, x, y, z)$ fisso rispetto a terra, con y verticale ascendente, una sbarra $\mathfrak{C} := AB$ rettilinea rigida omogenea pesante di massa $\mathfrak{M}$ e lunghezza ℓ è vincolata senza attrito ad una cerniera cilindrica di asse orizzontale z, in modo che il punto di mezzo C della sbarra sia sull'asse z e che questo sia ortogonale alla sbarra stessa.

Sia (O, ξ, η, ζ) una terna solidale a $\mathfrak{C}$, con $\vec{\varepsilon}_3$ coincidente con $\vec{e}_3$, con $\vec{\varepsilon}_1 :=$ vers $\overrightarrow{AB}$, e si chiami θ l'anomalia che il versore $\vec{\varepsilon}_1$ forma con il versore $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Un elemento P di massa m è vincolato senza attrito a muoversi lungo la sbarra: $\overrightarrow{CP} = \xi\,\vec{\varepsilon}_1$; sull'elemento, oltre al peso e alla reazione $-\vec{f}$ della sbarra, agisce una forza elastica $\vec{f}^e = k_P \overrightarrow{PC}$.

Sulla sbarra, oltre al peso alla forza $\vec{f}^e$ e alla reazione $\vec{f}$ dell'elemento, agisce una coppia elastica di momento $\vec{\mu} = k\,\theta\,\vec{e}_3$ Il sistema è inoltre vincolato ad avere le coordinate $(\xi,\, \theta)$ limitate dai valori: $\xi \in \left[-\dfrac{\ell}{2},\, +\dfrac{\ell}{2}\right]$ e $\left|\theta\right| \le \theta^*$ con θ^* definita da: $\sin\theta^* = \dfrac{y_C}{\ell/2}$.

Tutti i vincoli sono perfetti.



In un istante $t = 0$ lo stato del sistema sia: $\xi_0 = -\ell/2\,,\ \theta_0 = \theta^*\,,\ \dot{\xi}_0 = 0\,,\ \dot{\theta}_0 = 0.$

(0) Usare le equazioni cardinali della stereodinamica per l'asta AB e dall'equazione fondamentale della dinamica per l'elemento per determinare se il sistema si muove ed in quale successione di fasi.

(1) Ricavare per ciascuna fase del moto le equazioni di moto del sistema dalle equazioni cardinali e l'equazione fondamentale della dinamica.

(2) Scrivere le espressioni lagrangiane delle energie cinetica e potenziale del sistema e ricavare le stesse equazioni mediante il metodo di Lagrange,

(3) Studiare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

(4) Supponendo che i parametri detti siano tali che: $k_P\,\ell = 8\,m\,g\,\sin\theta^* = 16\,m\,g\,y_C/\ell$, e che $4\,k\,\theta^* < m\,g\,\ell\cos\theta^*$, verificare che le dette supposizioni e separazioni in fasi siano corrette.

AVVERTENZE

- È permesso l'uso di appunti personali ma NON di libri.
- Per i calcoli e le risposte, utilizzare soltanto i fogli protocollo distribuiti.
- Scrivere in alto a destra su OGNI FOGLIO utilizzato: Cognome, Nome, numero di matricola. I fogli senza nome NON VERRANNO CORRETTI.
- Consegnare *tutti* i fogli utilizzati, sbarrando l'eventuale brutta copia, e NUMERARLI secondo l'ordine nel quale vanno letti.

Risoluzione dell'Esercizio sbar4m

Innanzi tutto si osserva che $\vec{f}^e = k_P \overrightarrow{PC} = -k_P\, \xi\, \vec{\varepsilon}_1$, che $\vec{f}$ è ortogonale a $\vec{\varepsilon}_1$, e che $\vec{M}_C^{cc}$ è ortogonale a $\vec{e}_3$. Inoltre, per arbitrario θ sussistono (senza indicare le terze componenti in quanto nulle) le :

$$\left(\vec{\varepsilon}_1\right)_e = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \; ; \qquad \left(\vec{\varepsilon}_2\right)_e = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\left(k_P\overrightarrow{CP}\right)_e = k_P\, \xi \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \; ; \qquad \left(\vec{g}\right)_\varepsilon = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} \; ;$$

insieme con

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \xi\, \vec{\varepsilon}_1 \; ; \qquad \vec{v}_P = \dot{\xi}\, \vec{\varepsilon}_1 + \xi\, \dot{\theta}\, \vec{\varepsilon}_2 \; ; \qquad \vec{a}_P = (\ddot{\xi} - \xi\, \dot{\theta}^2)\, \vec{\varepsilon}_1 + (2\, \dot{\xi}\, \dot{\theta} + \xi\, \ddot{\theta})\, \vec{\varepsilon}_2 \; .$$

<u>*Punto 0)*</u> Nelle dette condizioni iniziali entrambi i vincoli unilaterali sono realizzati per contatto e l'atto di moto è nullo, quindi si potrebbero supporre bilaterali e il moto potrebbe essere la quiete. Ciò avviene se le seguenti equazioni *scritte nella condizione iniziale*:

$$\begin{cases} m\, \vec{a}_P = m\vec{g} - k_P\, \xi\, \vec{\varepsilon}_1 - \vec{f} + r_P\, \vec{\varepsilon}_1 \\ \mathfrak{M}\, \vec{a}_G = \mathfrak{M}\, \vec{g} + \vec{F}^{cc} + \vec{f} + \vec{r}_A + \vec{r}_P \\ \dot{\vec{K}}^G = \dfrac{\mathfrak{M}\, \ell^2}{12}\, \ddot{\theta}\, \vec{e}_3 = +\vec{\mu} + \vec{M}_C^{cc} + \overrightarrow{CP} \times \vec{f} + \overrightarrow{CA} \times \vec{r}_A \end{cases} \tag{1}$$

ammettono soluzioni costanti nello stato iniziale, e cioè implicano

$$\begin{cases} 0 = m\vec{g} - k_P\, \xi\, \vec{\varepsilon}_1 - \vec{f} + r_P\, \vec{\varepsilon}_1 \\ 0 = \mathfrak{M}\, \vec{g} + \vec{F}^{cc} + \vec{f} + r_A\, \vec{e}_2 - r_P\, \vec{\varepsilon}_1 \\ 0 = \vec{\mu} + \vec{M}_C^{cc} + \overrightarrow{CP} \times \vec{f} + \overrightarrow{CA} \times r_A\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

con $\xi = -\ell/2\,,\ \theta = \theta^*$, e con $r_A > 0$ e $r_P > 0$ nell'ipotesi unilaterale.

Dato che $\vec{a}_P$ è sul piano $(x,\, y)$, così come gli altri tre vettori della prima delle (1), certamente si ha $\vec{f} = f_2\, \vec{\varepsilon}_2$ con f_2 da determinare, ma positivo nell'istante iniziale: $f_2(0) = -m\, g\, \vec{e}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = -m\, g\, \cos\theta^*$. Dunque risulta $r_P < 0$ se $m\, g \cdot \vec{\varepsilon}_1 - k_P\, \xi > 0$ ovvero se $m\, g \sin\theta^* < k_P\, \ell/2$ (cosa vera: vedi Punto 4)). In tal caso l'elemento si muove. Occorre ora stabilire se si muove anche l'asta AB oppure se, in una prima fase di moto, l'asta rimane nella posizione θ^*. La seconda equazione (valida per $\theta = \theta^*$)

$$0 = +\vec{\mu} + \vec{M}_C^{cc} + \overrightarrow{CP} \times \vec{f} + \overrightarrow{CA} \times r_A\, \vec{e}_2 = k\, \theta\, \vec{e}_3 + \xi f_2\, \vec{\varepsilon}_3 + (-\ell/2) r_A\, \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{e}_2$$

fornisce $(\ell/2)\, \cos\theta^* r_A = k\, \theta^* + \xi f_2$ e quindi r_A risulta positiva fintanto che $k\, \theta^* + \xi f_2 > 0$. Nell'istante iniziale ciò accade, giacché come si è visto $f_2(0) = -m\, g\, \cos\theta^*$ e questo implica $k\, \theta^* + \xi_0 f_2(0) = k\, \theta^* + \frac{\ell}{2}\, m\, g\, \cos\theta^* > 0$, e dunque rimane $\theta = \theta^*$ fintanto che la ξ rimane tale che $k\, \theta^* - \xi\, m\, g\, \cos\theta^* > 0$.

<u>*Punto 1)*</u> Per quanto visto nel Punto precedente, una prima fase di moto si ha con $\theta(t) = \theta^*$ e la $\xi = \xi(t)$ soluzione della proiezione lungo $\vec{\varepsilon}_1$ della prima delle (1):

$$m\ddot{\xi} = -m\, g\, \sin\theta^* - k_P\, \xi\,, \qquad \text{con} \quad \xi_0 = -\ell/2\,, \quad \dot{\xi}_0 = 0\,.$$

Si ponga $\boxed{\beta := m\, g\, \sin\theta^*/k_P\, \ell}$ ed $\eta := \xi + \beta\, \ell$; ovvero $m\, \ddot{\eta} = -\beta\, k_P\, ell - k_P\, \xi = -k_P \eta$ con dato $\eta_0 = \ell\, (-1/2 + \beta)$. Se ne ricava $\eta(t) = \ell\, (-1/2 + \beta)\, \cos(\nu\, t)$ con $\nu^2 := k_P/m$, da cui segue che

$$\xi(t) = \ell\, \Big[-\beta + (-1/2 + \beta)\, \cos(\nu\, t)\Big] \quad \text{è contenuto in} \quad [-\ell/2\,,\ \ell/2\, (1 - 4\beta)]\,.$$

Ma la $k_P\,\ell = 8\,m\,g\,\sin\theta^*$ implica $\beta = 1/8$ e quindi $\xi_M := \ell/2\ (1-4\beta) = \ell/4$ rimane compatibile finché l'elemento si muove con $\theta = \theta^*$.
Tuttavia, quando la ξ raggiunge il valore per il quale $k\,\theta^* - \widetilde{\xi}\,m\,g\,\cos\theta^*$ diventa negativo (e tale valore esiste perché, si veda il Punto 4), la $4\,k\,\theta^* < m\,g\,\ell\,\cos\theta^*$ equivale alla $\widetilde{\xi} < \xi_M$), la $r_A > 0$ non risulta più verificata e la prima fase si interrompe.

Nella seconda fase le incognite del moto sono due: $(\xi(t)\,,\ \theta(t)\,)$ e le equazioni:

$$\begin{cases} m\,\vec a_P &= m\vec g - k_P\,\xi\,\vec\varepsilon_1 - \vec f \\ \mathfrak{M}\,\vec a_G &= \mathfrak{M}\,\vec g + \vec F^{cc} + \vec f \\ \dfrac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\,\ddot\theta\,\vec e_3 &= +k\,\theta\,\vec e_3 + \vec M_C^{cc} + \xi\,f_2\,\vec e_3 \end{cases}$$

danno

$$\begin{cases} m\,(\ddot\xi - \xi\,\dot\theta^2) &= -m\,g\,\sin\theta - k_P\,\xi \\ m\,(2\,\dot\xi\,\dot\theta + \xi\,\ddot\theta) &= -m\,g\,\cos\theta - f_2 \\ \vec F^{cc} &= \mathfrak{M}\,\vec a_G - \mathfrak{M}\,\vec g - f_2\,\vec\varepsilon_2 \\ \dfrac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\,\ddot\theta &= +k\,\theta - \xi\,\Big(m\,(2\,\dot\xi\,\dot\theta + \xi\,\ddot\theta) + m\,g\,\cos\theta\Big) \end{cases}$$

da cui seguono le equazioni del moto per la seconda fase, che rimane vera fintanto che $|\,\theta\,| < \theta^*$ e $\xi(t) \in \left[-\frac{\ell}{2}\,,\ +\frac{\ell}{2}\right]$

$$\begin{cases} m\,\ddot\xi - m\,\xi\,\dot\theta^2 &= -k_P\,\xi - m\,g\,\sin\theta \\ \dfrac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\,\ddot\theta + m\,\xi^2\,\ddot\theta + 2\,m\,\xi\,\dot\xi\,\dot\theta &= +k\,\theta - m\,g\,\xi\,\cos\theta \end{cases}$$

<u>*Punto 1)*</u> Nella prima fase, con la sola variabile $\xi(t)$, le energie cinetica e potenziale del sistema sono solo:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\,m\,\dot\xi^2\,, \qquad \mathcal{V} = m\,g\,y_P + \frac{1}{2}\,k_P\,\xi^2 + \text{cost}$$

Ne seguono le

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\xi} = m\dot\xi\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\xi} = 0\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = m\,g\,\sin\theta^* + k_P\xi\,,$$

e quindi l'equazione di Lagrange:

$$m\ddot\xi = -m\,g\,\sin\theta^* - k_P\xi\,.$$

Nella seconda fase le energie cinetica e potenziale del sistema (somma delle due energie cinetiche relative rispettivamente alla sbarra e all'elemento), e usando il fatto che la velocità dell'elemento dà $v_P^2 = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\theta^2$, sono date da

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,m\,\Big(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\theta^2\Big) \\ \mathcal{V} &= m\,g\,y_P + \frac{1}{2}\,k_P\xi^2 + \frac{1}{2}\,k\,\theta^2 + \text{cost} \end{aligned}$$

Ne seguono le

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\xi} = m\dot\xi\,, \qquad \dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\xi} = m\,\xi\,\dot\theta^2 \\ \dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\theta} = \left(\dfrac{1}{12}\,\mathfrak{M}\,\ell^2 + m\xi^2\right)\dot\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = m\,g\,\sin\theta + k_P\xi\,, \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = m\,g\,\xi\,\cos\theta + k\,\theta \end{cases}$$

e le

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\xi^2} \;=\; m \;, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\theta^2} \;=\; \dfrac{1}{12}\,\mathfrak{M}\;\ell^2 + m\xi^2 \;, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\xi\,\partial \dot\theta} \;=\; 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \xi^2} \;=\; k_P \;, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta^2} \;=\; -m\,g\,\xi\,\sin\theta + k \;, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \xi \partial \theta} \;=\; m\,g\,\cos\theta \;, \end{cases}$$

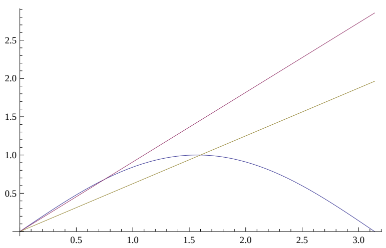
e quindi le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} m\ddot\xi - m\xi\dot\theta^2 + m\,g\,\sin\theta + k_P\,\xi \;=\; 0 \\ \left(\dfrac{1}{12}\,\mathfrak{M}\;\ell^2 + m\xi^2\right)\;\ddot\theta + 2m\xi\dot\xi\dot\theta + m\,g\,\xi\,\cos\theta + k\,\theta \;=\; 0 \end{cases} \tag{2}$$

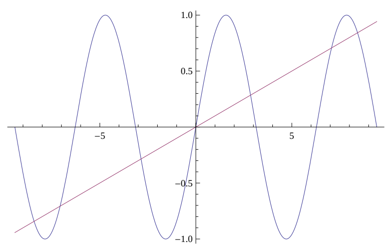
Punto 3) Poiché i vincoli sono perfetti e fissi, e la sollecitazione attiva è conservativa, le configurazioni di equilibrio si troveranno annullando le derivate parziali dell'energia potenziale. Se ne conclude che sono di equilibrio le configurazioni per le quali

$$m\,g\,\sin\theta + k_P\,\xi \;=\; 0\;, \qquad\qquad m\,g\,\xi\,\cos\theta + k\,\theta \;=\; 0\;.$$

Dalla prima si ricava: $\xi_e = -\dfrac{m\,g}{k_P}\,\sin\theta_e$, e siccome deve essere: $\Big|\theta\Big| \le \sin\theta^* = \dfrac{k_P}{m\,g}\,\dfrac{\ell}{8}$ almeno per quanto riguarda la prima di queste è senz'altro $\xi \in \big[-\frac{\ell}{2}\,,\; +\frac{\ell}{2}\big]$. La seconda diviene $k\,\theta = \dfrac{m^2g^2}{2\,k_P}\,\sin 2\theta$, ovvero, ponendo $2\theta =: \psi$ e $c := \dfrac{m^2g^2}{k\,k_P}$ risulta: $\psi = c\,\sin\psi$. Se ne conclude che: se $c \le 1$ l'unica posizione di equilibrio è quella determinata da $\theta = 0$; se $c > 1$ ma non troppo grande, ad esempio: $c = 1.6$, vi sono altre due posizioni: $\theta_{2,3} \simeq \pm(\frac{\pi}{4} + \epsilon)$ con $0 < \epsilon \ll 1$; e così via al crescere di δ gli equilibri diventano sempre più numerosi.



$c = 1.2$ e $c = 1.6$



$c = 10$

D'altra parte si ha: $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} k_P & mg\cos\theta \\ mg\cos\theta & k(1+c)\sin^2\theta \end{pmatrix}$; e siccome il suo determinante è: $D = kk_P(1 - c\,\cos 2\theta)$, per $c \le 1$ la posizione $\theta = 0$ è instabile; invece, nel caso $c = 1.6$ le due posizioni: $\theta_{2,3} \simeq \pm(\frac{\pi}{4} + \epsilon)$ hanno $\cos 2\theta \simeq -\epsilon$ e dunque sono stabili, sempre che sia $\theta^* \gg \pi/4$.

Punto 4) Si è già controllato che la $k_P\,\ell = 8\,m\,g\,\sin\theta^*$ implica $m\,g \sin\theta^* < k_P\,\ell/2$, e quindi le due fasi considerate, con $\Big|\theta\Big| < \theta^*$ e $\xi(t) \in \big[-\frac{\ell}{2}\,,\; +\frac{\ell}{2}\big]$, sempre che sia $\theta^* \gg \pi/4$.