Simmetria ed Integrali.

Pierluigi Vellucci

9 giugno 2013

Simmetria rispetto all'asse y.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Se $f(x, y) = f(-x', y') = -f(x', y')$ la funzione si dice dispari rispetto alla lettera x, ovvero rispetto all'asse y. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto all'asse y è nullo. Si verifichi, a tal proposito, che l'integrale

$$\int\int_D xe^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}\, dxdy = 0 \tag{1}$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq y \leq 1\right\} \tag{2}$$

Simmetria rispetto all'asse x.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Se $f(x, y) = f(x', -y') = -f(x', y')$ la funzione si dice dispari rispetto alla

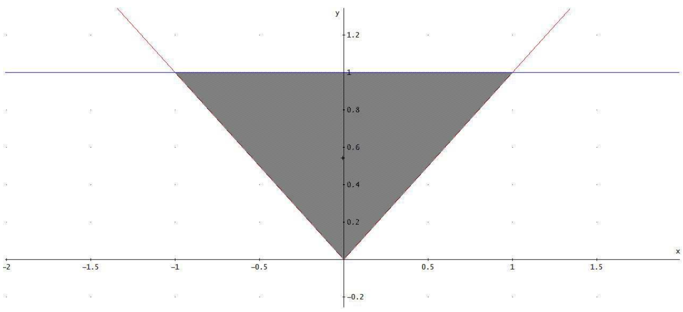

Figura 1: Simmetria rispetto all'asse y.

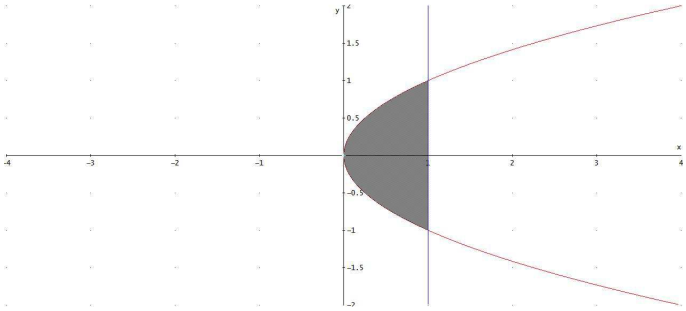

Figura 2: Simmetria rispetto all'asse x.

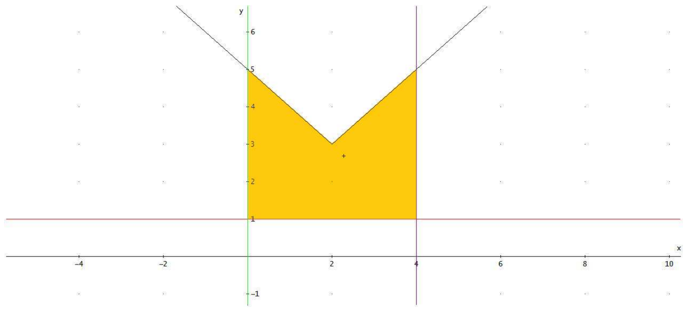

Figura 3: Simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse y: $x = 3$.

lettera y, ovvero rispetto all'asse x. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto all'asse x è nullo. Allora si verifichi:

$$\int\int_D y^3 \sin\left(x^2 + y^2\right) dxdy = 0 \tag{3}$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 \leq x \leq 1\right\} \tag{4}$$

Simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse y: $x = h$.

$$\begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = y \end{cases}$$

Se $f(x', y') = f(2h - x, y) = -f(x, y)$ la funzione si dice dispari rispetto alla retta $x = h$. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto alla retta verticale $x = h$ è nullo. Verificare che l'integrale:

$$\int\int_D \sin(x - 2)\cos(y + 3) dxdy = 0 \tag{5}$$

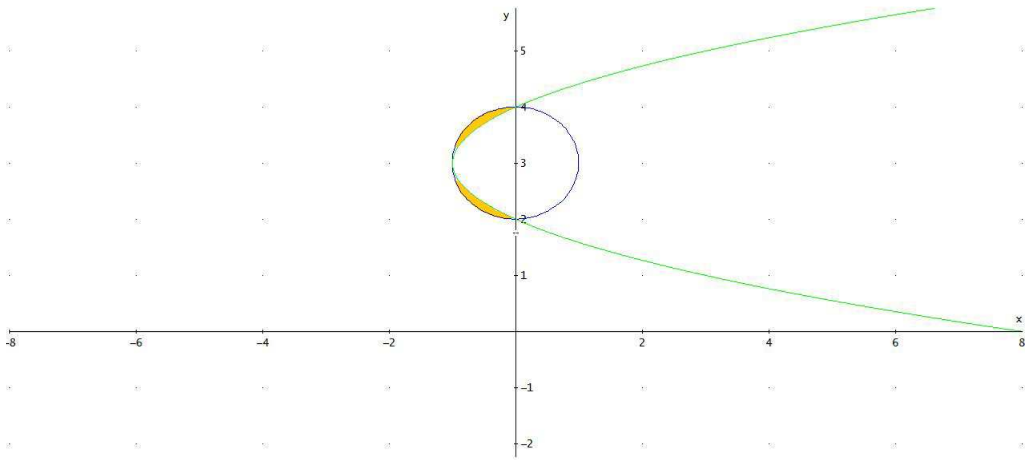

Figura 4: Simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse x: $y = 3$.

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq y \leq |x - 2| + 3, 0 \leq x \leq 4\right\} \tag{6}$$

in quanto D è simmetrico rispetto alla retta $x = 2$.

Simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse x: $y = k$.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$$

Se $f(x', y') = f(x, 2k - y) = -f(x, y)$ la funzione si dice dispari rispetto alla retta $y = k$. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto alla retta orizzontale $y = k$ è nullo. Si verifichi, a tal proposito, che l'integrale

$$\int\int_D \frac{x}{\sqrt[3]{\frac{y}{3} - 1} + \frac{y}{3} - 1} dxdy = 0 \tag{7}$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 6y + 8 \leq 0, x \leq y^2 - 6y + 8\right\} \tag{8}$$

in quanto D è simmetrico rispetto alla retta $y = 3$.

Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante: $y = x$.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

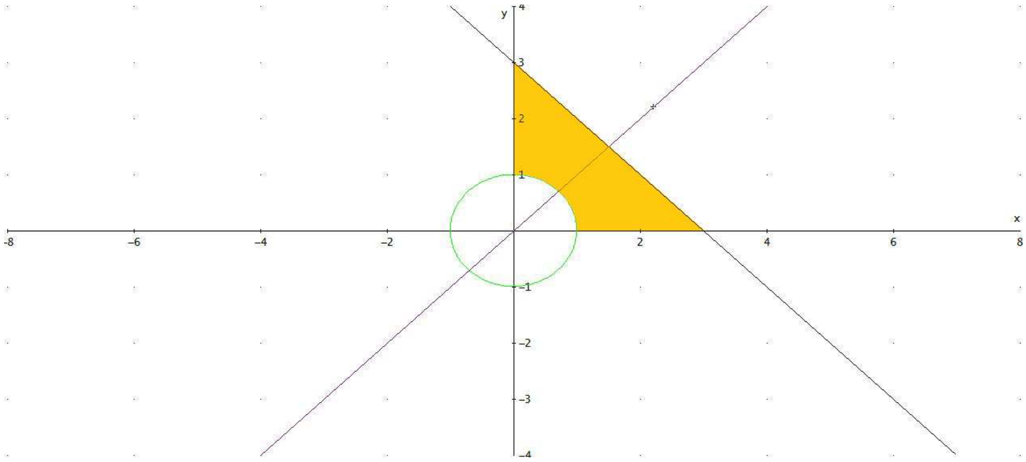

Figura 5: Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante: $y = x$.

Se $f(x', y') = f(y, x) = -f(x, y)$ la funzione si dice dispari rispetto alla retta $y = x$. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto alla retta $y = x$ è nullo. Si verifichi, allora, che:

$$\int\int_D (2x - 2y) dxdy = 0 \tag{9}$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, y \leq -x + 3\right\} \tag{10}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante: $y = -x$.

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Se $f(x', y') = f(-y, -x) = -f(x, y)$ la funzione si dice dispari rispetto alla retta $y = -x$. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto alla retta $y = -x$ è nullo. Si verifichi, allora, che:

$$\int\int_D \frac{x + y}{x^2 + y^2} dxdy = 0 \tag{11}$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1\right\} \tag{12}$$

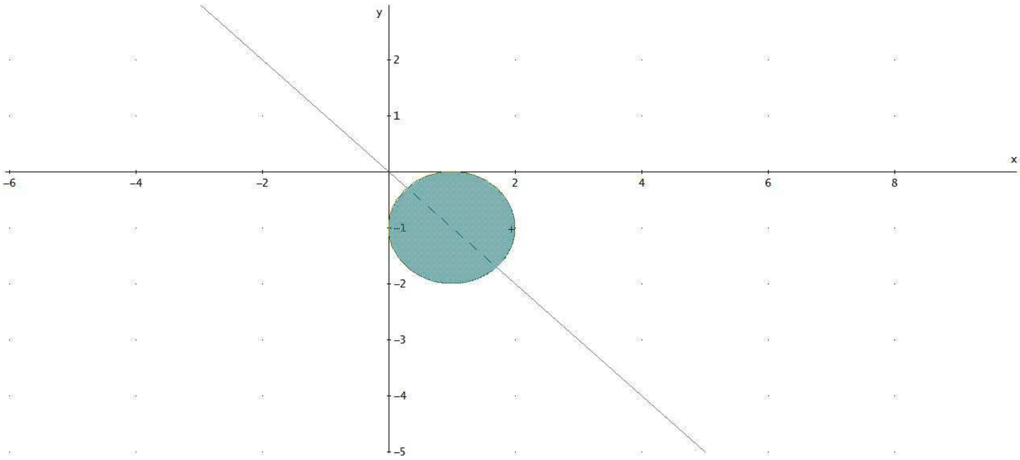

Figura 6: Simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante: $y = -x$.

Simmetria rispetto ad una retta generica $y = mx + q$.

Siano $P(x, y)$,$P'(x', y')$ gli estremi di un segmento perpendicolare alla retta $y = mx + q$; indichiamo con $M_{PP'}$ il punto medio del segmento

$$M_{PP'} = \left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right) \tag{13}$$

e con $m_{PP'}$ il coefficiente angolare della retta sulla quale giace il segmento PP'

$$m_{PP'} = \frac{y' - y}{x' - x} \tag{14}$$

Affinché $M_{PP'}$ appartenga alla retta si deve avere:

$$\frac{y + y'}{2} = m\,\frac{x + x'}{2} + q \;\Rightarrow\; y + y' = m\,(x + x') + 2q \tag{15}$$

mentre per la perpendicolarità retta-segmento:

$$m\,\frac{y' - y}{x' - x} = -1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{-1}{m}\;(x - x') + y \tag{16}$$

la quale si sostituisce nell'equazione della retta:

$$y - \frac{1}{m}\;(x - x') + y = m\,(x + x') + 2q \tag{17}$$

che diventa

$$x' = \frac{2m}{m^2 - 1}\,(y - q) - x\,\left(\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}\right) \tag{18}$$

Sostituiamo l'espressione appena ottenuta nella condizione di perpendicolarità:

$$y' = -\frac{1}{m}\left(x\left(\frac{2m^2}{m^2-1}\right) - \frac{2m}{m^2-1}(y-q)\right) + y \tag{19}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x' = \frac{2m}{m^2-1}(y-q) - x\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right) \\ y' = -x\left(\frac{2m}{m^2-1}\right) + \frac{2}{m^2-1}(y-q) + y \end{cases}$$

Se

$$\begin{aligned} &f(x', y') = \\ &f\left(\frac{2m}{m^2-1}(y-q) - x\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right), -x\left(\frac{2m}{m^2-1}\right) + \frac{2}{m^2-1}(y-q) + y\right) \\ &= -f(x, y) \end{aligned} \tag{20}$$

la funzione si dice dispari rispetto alla retta $y = mx + q$. In tal caso l'integrale doppio di $f(x, y)$ su un dominio simmetrico rispetto alla retta $y = mx + q$ è nullo. Per esempio, l'integrale:

$$\int\int_D \left(2x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}\right) dxdy \tag{21}$$

si annulla sul dominio:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x-1)^2 + (y-5)^2 \leq 1\right\} \tag{22}$$

simmetrico rispetto alla retta $y = 3x + 2$.

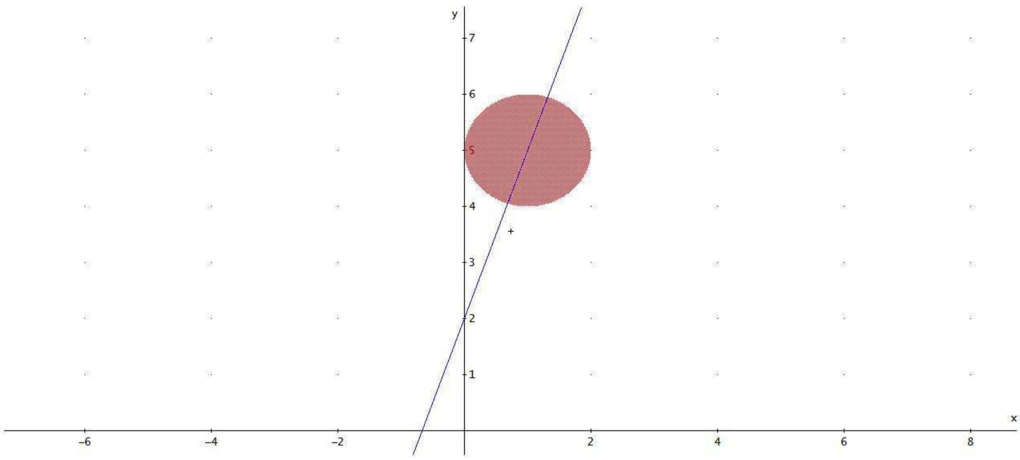

Figura 7: Simmetria rispetto alla retta: $y = 3x + 2$.