parimenti suddividiamo $[c,d]$ in q intervalli parziali con

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{q-1} < y_q = d\,. \tag{4.1.3}$$

Fissato un qualsiasi $[x_h, x_{h+1}]$, $(h = 0, \ldots, p-1)$, degli intervalli del primo tipo ed un qualsiasi $[y_k, y_{k+1}]$ del secondo $(k = 0, \ldots, q-1)$, risulta individuato l'intervallo prodotto cartesiano $I_{hk} = [x_h, x_{h+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ per il quale si ha

$$\text{mis}\, I_{hk} = (x_{h+1} - x_h)(y_{k+1} - y_k)\,.$$

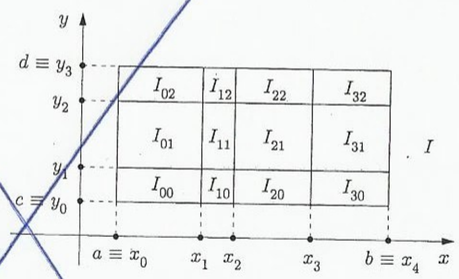

Fig. 4.1.1

Al variare di h e k, I risulta internamente solcato da un *reticolato* individuato dalle rette $x = x_h$, $(h = 1, \ldots, p-1)$, $y = y_k$, $(k = 1, \ldots, q-1)$; gli intervalli I_{hk} sono *a due a due privi di punti interni comuni* ed I è manifestamente la loro unione, si ha quindi (fig. 4.1.1)

$$I = \bigcup_{h=0}^{p-1} \bigcup_{k=0}^{q-1} I_{hk}\,. \tag{4.1.4}$$

Con l'operazione eseguita, diremo che I è stato *decomposto coordinatamente* negli intervalli (parziali) I_{hk}, ovvero che si è eseguita una *decomposizione coordinata* $\mathcal{D}(I)$.

Rilevato che $\sum_{h=0}^{p-1} (x_{h+1} - x_h) = b - a$, $\sum_{k=0}^{q-1} (y_{k+1} - y_k) = d - c$ è immediato riconoscere che si ha (proprietà additiva)

$$\text{mis}\, I = \sum_{h=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \text{mis}\, I_{hk}, \quad \forall \mathcal{D}(I)\,. \tag{4.1.5}$$

Quanto detto in $\mathbb{R}^2$, ove $\text{mis}\, I = \text{area}\, I$, vale in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$; naturalmente la misura è quella n-dimensionale (4.1.1).

4.2 La misura esterna

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, un assegnato insieme *limitato* ed $\overline{E} = E \cup \partial E$ la sua chiusura; fissato un intervallo I contenente $\overline{E}$ al suo *interno*, cioè $\overline{E} \subset \overset{\circ}{I} = I - \partial I$, si esegua una decomposizione $\mathcal{D}(I)$ di I e siano $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ gli intervalli di $\mathcal{D}(I)$ aventi almeno un punto comune con $\overline{E}$ (in fig. 4.2.1 si ha $\nu = 30$). Indichiamo con $\mathcal{P}$ la loro unione, poniamo cioè

$$\mathcal{P} = \bigcup_{h=1}^{\nu} I_h, \quad \text{con} \quad \overset{\circ}{I}_h \cap \overset{\circ}{I}_k = \emptyset, \quad \text{per} \quad h \neq k\,. \tag{4.2.1}$$

L'insieme $\mathcal{P}$, unione di un numero finito di intervalli, privi a due a due di punti interni comuni, è detto *plurintervallo esternamente associato ad* E mediante $\mathcal{D}(I)$ o anche *ricopertura esterna di* E.

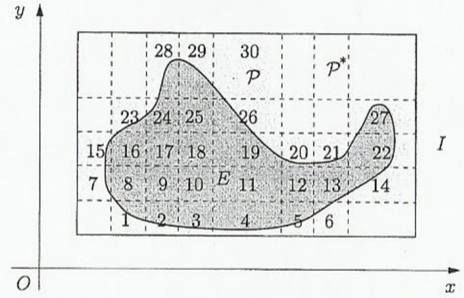

Fig. 4.2.1

Gli intervalli di $\mathcal{D}(I)$ privi di punti comuni con $\overline{E}$ formano a loro volta un plurintervallo $\mathcal{P}^*$, tale che $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^* = I$, $\partial\mathcal{P}^* \cap \overline{E} = \emptyset$, dato che essendo $\mathcal{P}^*$ chiuso, se non vuoto, si ha $\partial\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{P}^*$ e quest'ultimo insieme al pari di ∂I, *per definizione* non ha punti comuni con $\overline{E}$. Poiché $\partial\mathcal{P} \subseteq \partial\mathcal{P}^* \cup \partial I$, si ha sempre

$$\overline{E} \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset \quad \text{e quindi} \quad \overset{\circ}{\mathcal{P}} \supset \overline{E}\,. \tag{4.2.2}$$

Per *definizione*, chiameremo *misura* di $\mathcal{P}$, da denotarsi con $\text{mis}\,\mathcal{P}$, la somma delle misure degli intervalli (4.2.1) che lo compongono; si ha perciò

$$\text{mis}\,\mathcal{P} = \sum_{h=1}^{\nu} \text{mis}\, I_h > 0\,. \tag{4.2.3}$$

Al variare in tutti i modi possibili della decomposizione $\mathcal{D}(I)$, rimane individuato l'insieme numerico $\{\text{mis}\,\mathcal{P}\}$ il cui *estremo inferiore* viene denominato *misura esterna* di E ed indicato con $\text{mis}_e E$; si pone perciò per definizione

$$\text{mis}_e E = \inf\{\text{mis}\,\mathcal{P}\} \geq 0\,. \tag{4.2.4}$$

Tale definizione è legata al fatto che ciascuno dei valori $\text{mis}\,\mathcal{P}$ rappresenta un valore approssimato per eccesso della misura di E che stiamo cercando di costruire.

Osservazione I - Se I è un qualsiasi *intervallo*, la sua misura esterna coincide con quella definita in (4.1.1), come è immediato verificare. Analogamente, se $\mathcal{P}$ è un qualsiasi *plurintervallo*, non è difficile verificare che la sua misura esterna coincide con la misura che si ottiene sommando quella dei singoli intervalli (numero finito ν) che lo compongono: è sufficiente riferirsi, ad esempio, al caso dell'unione di *due* intervalli I', I'', con $\overset{\circ}{I'} \cap \overset{\circ}{I''} = \emptyset$.

Stabiliamo ora due essenziali proprietà della *misura esterna* (che in $\mathbb{R}^2$ appaiono quasi intuitive).

Teorema 4.2.I – *Se E_1, E_2 sono due insiemi limitati di $\mathbb{R}^n$, vale la proprieà di "monotonia" espressa da*

$$E_1 \subseteq E_2 \implies \text{mis}_e E_1 \leq \text{mis}_e E_2\,; \tag{4.2.5}$$

quella di "subadditività" (per due arbitrari insiemi limitati) è espressa da

$$\text{mis}_e(E_1 \cup E_2) \leq \text{mis}_e E_1 + \text{mis}_e E_2\,, \tag{4.2.6}$$

I fissato per la sua costruzione: infatti per quanto sopra detto tutti i limiti del tipo (4.2.7) debbono coincidere con il valore di $\text{mis}_e E$ calcolato con un intervallo $I^* \supseteq \overline{E}$.

4.3 La misura interna

Supponiamo che E sia dotato di *punti interni*, allora, fissato come in precedenza l'intervallo I, con $\overset{0}{I} \supset \overline{E}$, ed eseguita la consueta $\mathcal{D}(I)$ sia $\mathcal{P}'$ il *plurintervallo internamente associato ad* E (fig. 4.3.1) unione (se non vuota) degli intervalli $I_1, \ldots, I_\mu$ di $\mathcal{D}(I)$ *tutti formati esclusivamente di punti interni ad* E. Al variare di $\mathcal{D}(I)$ si considera l'insieme numerico descritto da $\text{mis}\,\mathcal{P}' = \sum_{h=1}^{\mu} \text{mis}\, I_h$, il cui *estremo superiore* si definisce *misura interna di* E e si indica con $\text{mis}_i E$; si pone cioè

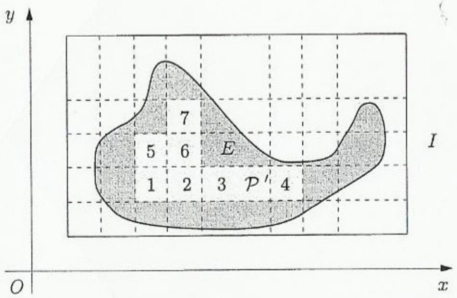

Fig. 4.3.1

$$\text{mis}_i E = \sup\{\text{mis}\,\mathcal{P}'\}\,, \tag{4.3.1}$$

convenendo inoltre che

$$\text{mis}_i E = 0 \quad \text{se} \quad , \quad \overset{0}{E} = \emptyset\,. \tag{4.3.2}$$

La definizione data è legata al fatto assai intuitivo che $\text{mis}\,\mathcal{P}'$ fornisce un valore approssimato per difetto della misura che si intende attribuire ad E.

Come per la misura esterna, si può osservare che per *intervalli* e *plurintervalli la misura interna* coincide con la misura originariamente attribuita; essi sono perciò due esempi assai semplici di insiemi per i quali misura esterna e misura interna coincidono.

Con ragionamento analogo a quello fatto per la misura esterna, al variare di $\mathcal{D}(I)$, la $\text{mis}\,\mathcal{P}'$ può essere pensata come funzione ad *infiniti valori* della *norma* δ della decomposizione $\mathcal{D}(I)$ e si ha

$$\text{mis}_i E = \lim_{\delta \to 0} \text{mis}\,\mathcal{P}' \tag{4.3.3}$$

da cui segue anche in questo caso *l'indipendenza* di $\text{mis}_i E$ dal fissato I. Parimenti è evidente che per costruire $\text{mis}_i E$ basta operare con intervalli $I' \supseteq E$. Sussistono poi le proprietà

$$E_1 \subseteq E_2 \implies \text{mis}_i E_1 \le \text{mis}_i E_2\,, \tag{4.3.4}$$

$$\text{mis}_i(\overset{0}{E}_1 \cup \overset{0}{E}_2) \le \text{mis}_i \overset{0}{E}_1 + \text{mis}_i \overset{0}{E}_2\,, \tag{4.3.5}$$

l'ultima relazione valendo anche per un qualsiasi *numero finito* di insiemi.

4.4 Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

Dato un qualsiasi insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$, abbiamo mostrato nei due § precedenti che ad esso possiamo sempre associare due numeri: la *misura esterna*, che costituisce, per così dire, la "migliore" misura per eccesso, rispetto a quella che si desidererebbe attribuire ad E; analogamente la *misura interna* è da ritenere la "migliore" misura per difetto di E.

Riferendoci ora ad una medesima decomposizione coordinata $\mathcal{D}(I)$, con i simboli precedentemente introdotti, si ha

$$\mathcal{P}' \subset \mathcal{P} \quad \text{e quindi} \quad \text{mis}\,\mathcal{P}' < \text{mis}\,\mathcal{P}, \quad \forall \mathcal{D}(I)\,,$$

con l'intesa che $\text{mis}\,\mathcal{P}' = 0$ se $\mathcal{P}' = \emptyset$. È allora evidente che passando al limite per la *norma* $\delta \to 0$, per le (4.2.7) e (4.3.3) si ha

$$\text{mis}_i E \le \text{mis}_e E\,. \tag{4.4.1}$$

Il caso di maggiore interesse, già segnalato per intervalli e plurintervalli, si presenta se risulta $\text{mis}_i E = \text{mis}_e E$; in tale caso, diremo che l'insieme limitato E è *misurabile secondo Peano-Jordan* e chiameremo sua misura da designarsi con $\text{mis}\, E$ il valore comune della misura esterna ed interna; porremo quindi

$$\text{mis}\, E = \text{mis}_i E = \text{mis}_e E\,. \tag{4.4.2}$$

Sorge spontanea la necessità di indagare, nel caso di non misurabilità, cioè se $\text{mis}_i E < \text{mis}_e E$, cosa possa rappresentare la differenza tra le due misure. Si ha al riguardo un risultato di fondamentale interesse ai fini della caratterizzazione degli insiemi misurabili.

Teorema 4.4.I – *Per ogni insieme limitato* $E \subset \mathbb{R}^n$, *sussiste la relazione*

$$\text{mis}_e E = \text{mis}_i E + \text{mis}_e \partial E\,, \tag{4.4.3}$$

onde, condizione necessaria e sufficiente perché E *sia misurabile è che sia nulla la misura esterna della frontiera* ∂E *di* E.

Dimostrazione – Osserviamo che in relazione ad una decomposizione $\mathcal{D}(I)$ di I, con $\overset{0}{I} \supset \overline{E}$, gli intervalli $I_1, \ldots, I_\nu$ che costituiscono il *ricoprimento esterno* $\mathcal{P}$ di E, possono dividersi in due categorie: quella (eventualmente vuota) degli intervalli $I_1, \ldots, I_\mu, \mu < \nu$, formati tutti esclusivamente di punti interni ad E, che costituiscono il *ricoprimento interno* $\mathcal{P}'$ di E, ed i rimanenti $I_{\mu+1}, \ldots, I_\nu$ che sono tutti e soli quelli che hanno almeno un punto in comune con ∂E e costituiscono un *ricoprimento esterno* $\mathcal{P}''$ di ∂E. Si ha perciò $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ da cui deriva ovviamente

$$\text{mis}\,\mathcal{P} = \text{mis}\,\mathcal{P}' + \text{mis}\,\mathcal{P}''\,.$$

Variando $\mathcal{D}(I)$ ed eseguendo il passaggio al limite per la *norma* $\delta \to 0$, si ha subito la (4.4.3). □

4.7 Cilindri retti misurabili

Sia E un *arbitrario* insieme limitato del piano xy ed $l > 0$ un assegnato numero reale. Diremo *cilindro retto di base E ed altezza l*, l'insieme T dello spazio xyz definito da

$$T \equiv \Big\{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in E, z \in [0,l]\Big\}, \tag{4.7.1}$$

cioè T è il prodotto cartesiano $E \times [0,l]$.

Si ha allora una proprietà che generalizza quella dei cilindri retti con basi particolari, della Geometria elementare.

Teorema 4.7.I – *Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un arbitrario insieme limitato, per il cilindro retto $T \subset \mathbb{R}^3$ di base E ed altezza l risulta*

$$\text{volume}_e\, T = l \cdot \text{area}_e\, E\,. \tag{4.7.2}$$

In particolare se E è misurabile in $\mathbb{R}^2$, T lo è in $\mathbb{R}^3$ e si ha

$$\text{volume}\, T = l \cdot \text{area}\, E\,. \tag{4.7.3}$$

Dimostrazione – Fissiamo, come si può, l'intervallo $I \supset \overline{T}$ (parallelepipedo retto) come prodotto cartesiano di un intervallo $J \supset \overline{E}$ in $\mathbb{R}^2$ e dell'intervallo $[0,l]$. Sia $\mathcal{D}(I)$ un'arbitraria decomposizione coordinata di I e $I_{h,k}$, $h = 1,\dots,\nu$, $k = 0,\dots,p-1$, siano gli intervalli aventi almeno un punto comune con $\overline{T}$; detta $\delta > 0$ la norma di tale $\mathcal{D}(I)$ si ha ovviamente

$$\text{volume}_e\, T = \lim_{\delta \to 0} \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{p-1} \text{volume}\, I_{hk}\,. \tag{4.7.4}$$

Ma gli elementi I_{hk} sono il prodotto cartesiano di intervalli $J_h \subset J$ del piano xy, aventi almeno un punto comune con $\overline{E}$, per l'intervallo $[z_k, z_{k+1}]$, con $z_0 = 0$, $z_p = l$, relativo alla decomposizione di $[0,l]$ in p intervalli parziali.

Poiché $\text{volume}\, I_{hk} = [z_{k+1} - z_k] \cdot \text{area}\, J_h$ risulta

$$\sum_{h=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{p-1} \text{volume}\, I_{hk} = \sum_{h=1}^{\nu} \text{area}\, J_h \cdot \sum_{k=0}^{p-1} [z_{k+1} - z_k] = l \cdot \sum_{h=1}^{\nu} \text{area}\, J_h\,.$$

D'altra parte, osservando che per $\delta \to 0$, tende a zero la norma della decomposizione di J, si ha $l \cdot \sum_{h=1}^{\nu} \text{area}\, J_h \longrightarrow l \cdot \text{area}_e\, E$. Sostituendo le relazioni trovate nella (4.7.4), si ha la (4.7.2).

Se si suppone poi che E è misurabile, per provare che lo è T, si osservi che la frontiera ∂T di T si compone di tre parti: la prima, data dal prodotto cartesiano $\partial E \times [0,l]$ con $\text{mis}_e\, \partial E = 0$, ha volume esterno nullo per la (4.7.2) applicata a ∂E; la seconda e la terza hanno parimenti volume nullo perché trattasi dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$, e di quello ad esso identico sul piano $z = l$. Ponendo nella (4.7.2) volume di T ed area di E in luogo delle misure esterne si ha la (4.7.3). □

Capitolo **5**

Il calcolo integrale in $\mathbb{R}^n$

5.1 L'integrale di una funzione continua su un compatto di $\mathbb{R}^n$

Per definire l'integrale di una funzione continua di n variabili, esteso ad un insieme *chiuso limitato* e *misurabile* di $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, opereremo in perfetta analogia a quanto fatto in "*Analisi I*", § 10.2, per funzioni di una variabile su intervalli.

Nel seguito gli insiemi chiusi e limitati saranno denominati insiemi *compatti*; utilizzeremo spesso la circostanza che dato *un numero finito di compatti misurabili* in $\mathbb{R}^n$, anche la loro unione, (come pure l'intersezione) è un *compatto misurabile*.

Dato un *compatto misurabile* $T \subset \mathbb{R}^n$, diremo che esso è stato *decomposto* in un numero finito di compatti misurabili $T_1, T_2, \dots, T_\nu$, ovvero che si è effettuata una *decomposizione* $\mathcal{D}(T)$ nei compatti misurabili $T_1, T_2, \dots, T_\nu$, se essi sono privi a due a due di punti interni comuni ed hanno T come loro unione; in simboli

$$T = \bigcup_{h=1}^{\nu} T_h, \quad \overset{\circ}{T}_h \cap \overset{\circ}{T}_k = \emptyset \quad (h,k = 1,2,\dots,\nu,\ h \neq k)\,. \tag{5.1.1}$$

Chiameremo *norma della decomposizione* $\mathcal{D}(T)$, il massimo *diametro* $\delta > 0$, degli elementi $T_1, T_2, \dots, T_\nu$ che la compongono. È ben evidente che esistono *infinite* decomposizioni $\mathcal{D}(T)$ aventi norma δ assegnata; naturalmente $\delta > 0$ può essere fissato piccolo quanto si vuole.

Ciò premesso, sia $f(P)$ una *funzione continua in un compatto misurabile* $T \subset \mathbb{R}^n$, operiamo una decomposizione $\mathcal{D}(T)$ in un numero arbitrario ν di compatti misurabili $T_1, T_2, \dots, T_\nu$ e fissiamo ad arbitrio un punto P_1 in T_1, un punto P_2 in T_2, ... un punto P_ν in T_ν (fig. 5.1.1) e calcoliamo la somma

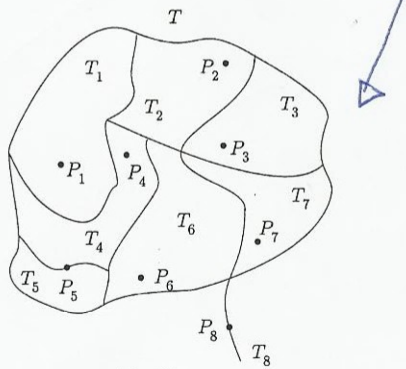

Fig. 5.1.1

Ma l è il numero di separazione delle classi $\{s\}$, $\{S\}$, dunque per ogni $\mathcal{D}(T)$ si ha, per le corrispondenti somme

$$s \leq l \leq S$$

e parimenti per tutte le corrispondenti somme integrali σ, relative a quella $\mathcal{D}(T)$ si ha

$$s \leq \sigma \leq S\,.$$

Ne segue che per *ogni* $\mathcal{D}(T)$ con norma $\delta < \delta_\varepsilon$ dovrà essere

$$|\sigma - l| \leq S - s < \varepsilon\,,$$

onde il teorema è completamente dimostrato. □

Il limite l di cui il teorema ora dimostrato assicura l'esistenza è un numero che dipende esclusivamente dalla funzione continua $f(P)$ e dal compatto misurabile T; esso si chiama *l'integrale della funzione continua* $f(P)$ *esteso al compatto misurabile* $T \subset \mathbb{R}^n$ e si indica col simbolo

$$\int_T f(P)dT \tag{5.1.7}$$

oppure, indicando con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le coordinate di P:

$$\int_T f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,. \tag{5.1.7'}$$

Si ha dunque per definizione (e col solito significato dei simboli)

$$\int_T f(P)dT = \lim_{\delta\to 0} \sigma = \lim_{\delta\to 0} \sum_{h=1}^{\nu} f(P_h) \operatorname{mis} T_h \tag{5.1.8}$$

ed in particolare

$$\int_T f(P)dT = \lim_{\delta\to 0} s = \lim_{\delta\to 0} \sum_{h=1}^{\nu} m_h \operatorname{mis} T_h \tag{5.1.9}$$

e l'analoga

$$\int_T f(P)dT = \lim_{\delta\to 0} S = \lim_{\delta\to 0} \sum_{h=1}^{\nu} M_h \operatorname{mis} T_h \tag{5.1.10}$$

e poiché l'integrale (5.1.7) coincide con il numero di separazione delle due classi $\{s\}$, $\{S\}$ sopra considerate, possiamo aggiungere:

Teorema 5.1.II – *L'integrale* $\int_T f(P)dT$ *coincide con l'estremo superiore dell'insieme costituito da tutte le possibili somme* s *e con l'estremo inferiore dell'insieme formato da tutte le possibili somme* S.

Naturalmente la definizione ora data di integrale si applica anche se $f(P)$ è funzione di una sola variabile x e, nel caso particolare che T sia un intervallo limitato $[a, b]$ dell'asse x, ci fa ritrovare l'integrale introdotto in "*Analisi I*", § 10.2 (come risulta da teorema 5.1.II).

L'attuale definizione ci porta però anche a considerare integrali del tipo $\int_T f(x)dx$ estesi ad un compatto misurabile dell'asse x (che in generale non sarà un intervallo).

Gli integrali di funzioni di una variabile si chiamano anche integrali *semplici*; quelli di funzioni di due variabili *integrali doppi*, usando per essi anche la notazione $\iint_T f(P)dT$ oppure $\iint_T f(x, y)dx\,dy$; quelli di funzioni di tre variabili *integrali tripli*, spesso indicati con $\iiint_T f(P)dT$ oppure $\iiint_T f(x, y, z)dx\,dy\,dz$; nel caso generale è usata la denominazione di *integrali multipli*.

In "*Analisi I*", Cap. 10, a proposito degli integrali semplici abbiamo anche introdotto i concetti di *integrale definito* (dipendente da un orientamento dell'intervallo di integrazione) e di *integrale indefinito*; avvertiamo che *nulla di analogo faremo per gli integrali doppi, tripli, ecc.*.

Nel caso particolare $f(P) \equiv 0$, la (5.1.8) ci dà immediatamente $\int_T 0dT = 0$, mentre nel caso $f(P) \equiv 1$, essa fornisce il teorema seguente:

Teorema 5.1.III – *Se* T *è un compatto misurabile di* $\mathbb{R}^n$, *si ha*

$$\int_T dT = \operatorname{mis} T\,, \tag{5.1.11}$$

(anche se $\operatorname{mis} T = 0$*) ed in particolare per* $n = 2, 3$:

$$\iint_T dT = \iint_T dx\,dy = \operatorname{area} T; \quad \iiint_T dT = \iiint_T dx\,dy\,dz = \operatorname{volume} T\,. \tag{5.1.12}$$

Questo teorema giustifica il fatto che al simbolo $dT = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, figurante nelle notazioni (5.1.7) e (5.1.7') adottate per gli integrali, si dà il nome di *elemento di misura* (di area, di volume, ecc.) *dello spazio* $\mathbb{R}^n$ (del piano, dello spazio, ecc.).

5.2 Proprietà dell'integrale

Le proprietà dell'integrale $\int_T f(P)dT$ sono del tutto analoghe a quelle dell'integrale $\int_a^b f(x)dx$ esposte in "*Analisi I*", § 10.4.

Teorema 5.2.I (della media) – *Siano* $f(P)$, $g(P)$ *funzioni continue in* T *e sia sempre* $g(P) \geq 0$. *Allora, detti* m, M *il minimo ed il massimo valore di* $f(P)$ *in* T, *si ha*

$$m \int_T g(P)dT \leq \int_T f(P)g(P)dT \leq M \int_T g(P)dT\,. \tag{5.2.1}$$

Se il compatto T è internamente connesso, esiste in esso almeno un punto Q tale da aversi

$$\int_T f(P)g(P)dT = f(Q)\int_T g(P)dT\,. \tag{5.2.2}$$

Dimostrazione – In virtù dell'ipotesi $g(P) \geq 0$, si ha evidentemente (con le solite notazioni):

$$m\sum_{h=1}^{\nu} g(P_h)\,\mathrm{mis}\,T_h \leq \sum_{h=1}^{\nu} f(P_h)g(P_h)\,\mathrm{mis}\,T_h \leq M\sum_{h=1}^{\nu} g(P_h)\,\mathrm{mis}\,T_h$$

e di qui, passando al limite per $\delta \to 0$, si trae la (5.2.1).

Se T è internamente connesso, possiamo aggiungere che $\mathrm{mis}\,T > 0$ ed essendo $\sum_{h=1}^{\nu} g(P_h)\,\mathrm{mis}\,T_h \geq 0$, risulta certamente $\int_T g(P)dT \geq 0$. Allora, se $\int_T g(P)dT = 0$[2], la (5.2.1) ci dice che è anche $\int_T f(P)g(P)dT = 0$ ed allora la (5.2.2) (che si riduce a $0 = 0$) vale qualunque sia $Q \in T$. Se invece $\int_T g(P)dT > 0$ la (5.2.1) esprime che il rapporto $\int_T f(P)g(P)dT / \int_T g(P)dT$ ha un valore μ compreso fra m e M e poiché ("*Analisi I*", teorema 16.6.V) esiste certamente almeno un punto $Q \in T$ in cui riesce $f(Q) = \mu$, si deduce la (5.2.2). □

Nel caso particolare $g(P) = 1$, il teorema precedente diventa, in virtù di (5.1.11):

Teorema 5.2.II – *Detti m, M il minimo ed il massimo valore di $f(P)$ in T, si ha*

$$m \cdot \mathrm{mis}\,T \leq \int_T f(P)dT \leq M \cdot \mathrm{mis}\,T\,. \tag{5.2.3}$$

Se T è internamente connesso, esiste in esso almeno un punto Q tale da aversi

$$\int_T f(P)dT = f(Q)\cdot \mathrm{mis}\,T\,. \tag{5.2.4}$$

Per la (5.2.3), posto

$$\mu = \frac{\int_T f(P)dT}{\mathrm{mis}\,T}\,, \tag{5.2.5}$$

[2]Dalle due ipotesi $g(P) \geq 0$, $\int_T g(P)dT = 0$, essendo T internamente connesso, segue $g(P) \equiv 0$ in T (teorema 5.2.V).

si ha $m \leq \mu \leq M$; questo numero μ si chiama il *valor medio* della funzione $f(P)$ nel compatto misurabile internamente connesso T.

Teorema 5.2.III (dell'additività) – *Decomposto il compatto T nei compatti parziali $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ si ha*

$$\int_T f(P)dT = \sum_{k=1}^{\mu}\int_{T_k} f(P)dT\,. \tag{5.2.6}$$

Dimostrazione – Basta considerare il caso $\mu = 2$ e provare che, se $T = T_1 \cup T_2$, $\overset{0}{T}_1 \cap \overset{0}{T}_2 = \emptyset$, si ha

$$\int_T f(P)dT = \int_{T_1} f(P)dT + \int_{T_2} f(P)dT\,. \tag{5.2.7}$$

Consideriamo una decomposizione $\mathcal{D}_1$ del compatto T_1 ed una decomposizione $\mathcal{D}_2$ del compatto T_2, entrambe di norma δ. In corrispondenza a $\mathcal{D}_1$ costruiamo una somma integrale σ_1 relativa all'integrale $\int_{T_1} f(P)dT$ ed in corrispondenza a $\mathcal{D}_2$ una somma integrale σ_2 relativa all'integrale $\int_{T_2} f(P)dT$. È ovvio che $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ individuano una (particolare) decomposizione $\mathcal{D}$ del compatto T (pure di norma δ) ed è anche evidente che fra le somme integrali corrispondenti a questa decomposizione $\mathcal{D}$ ve n'è una uguale a $\sigma_1 + \sigma_2$. Si ha allora

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma_1 = \int_{T_1} f(P)dT,\ \lim_{\delta\to 0}\sigma_2 = \int_{T_2} f(P)dT,\ \lim_{\delta\to 0}(\sigma_1+\sigma_2) = \int_T f(P)dT\,;$$

d'altra parte sussiste la $\lim_{\delta\to 0}(\sigma_1+\sigma_2) = \lim_{\delta\to 0}\sigma_1 + \lim_{\delta\to 0}\sigma_2$ e ne segue la (5.2.7). □

Teorema 5.2.IV (della distributività) – *Se $f_1(P)$, $f_2(P)$, ..., $f_\mu(P)$ sono funzioni continue in T, allora, comunque si assegnino le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$, si ha:*

$$\begin{aligned}&\int_T \left[c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \cdots + c_\mu f_\mu(P)\right]dT =\\ =&c_1\int_T f_1(P)dT + c_2\int_T f_2(P)dT + \cdots + c_\mu\int_T f_\mu(P)dT\,.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Dimostrazione – Basta considerare il caso di due funzioni. Si ha allora per la (5.1.8):