

**Programma di GEOMETRIA I**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica (A-L)**  
**A.A. 2001-2002**

**I parte (Prof. Paolo Maroscia).**

Generalità sugli insiemi. Applicazioni tra insiemi. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. La composizione di due applicazioni. Relazioni di ordine e di equivalenza. Numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi. Polinomi. Il teorema di Ruffini. Il teorema fondamentale dell'Algebra. Radici n-esime dell'unità.

Richiami di geometria elementare. I teoremi di Pitagora, Euclide, Talete. Coordinate cartesiane su una retta, nel piano e nello spazio. Gli insiemi  $\mathcal{V}_0^2$  e  $\mathcal{V}_0^3$  dei vettori del piano e dello spazio, rispettivamente, applicati in un punto  $O$ . L'addizione e la moltiplicazione per uno scalare in  $\mathcal{V}_0^2$  e in  $\mathcal{V}_0^3$ , e loro principali proprietà. Equazioni parametriche ed equazione cartesiana di una retta del piano. L'addizione e la moltiplicazione per uno scalare in  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^n, \mathbf{M}_2(\mathbf{R}), \mathbf{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ , e loro principali proprietà. Introduzione alla nozione di spazio vettoriale reale. Combinazioni lineari di vettori. Dipendenza e indipendenza lineare tra vettori in  $\mathbf{R}^n, \mathcal{V}_0^2, \mathcal{V}_0^3$ . Moltiplicazione di matrici e sue principali proprietà. Matrici invertibili. Matrici triangolari, diagonali. Matrici simmetriche, antisimmetriche. Matrici circolanti.

Generalità sui sistemi di equazioni lineari. Operazioni elementari sulle equazioni. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Matrici equivalenti per righe. Forma a gradini di una matrice. Il rango di una matrice definito mediante i pivot. Matrici non singolari. Il metodo di eliminazione di Gauss. Il teorema di Rouché-Capelli. Proprietà delle soluzioni di un sistema lineare.

Il determinante di una matrice quadrata definito mediante lo sviluppo secondo la prima riga. Il complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata. Il primo teorema di Laplace. Alcune proprietà fondamentali dei determinanti. Il teorema di Binet. L'aggiunta di una matrice quadrata. Alcune caratterizzazioni di una matrice invertibile. Calcolo dell'inversa di una matrice invertibile mediante l'eliminazione di Gauss. Il teorema del rango: varie definizioni equivalenti del rango di una matrice. Il teorema degli orlati. Il teorema di Cramer. Il determinante di Vandermonde. Matrici ortogonali.

Comportamento di due rette del piano. Rette parallele. Fasci di rette. Condizione di allineamento di tre punti del piano. Distanza tra due punti. Vettori perpendicolari in  $\mathcal{V}_0^2$ . Rette perpendicolari. Asse di un segmento. Equazione cartesiana di una circonferenza.

Equazione cartesiana di un piano. Complanarità di quattro punti dello spazio. Comportamento di due piani dello spazio. Piani paralleli. Fasci di piani. Giacitura di un piano. Distanza tra due punti. Vettori perpendicolari in  $\mathcal{V}_0^3$ . Piani perpendicolari. Equazione cartesiana di una sfera. Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di una retta dello spazio. Parametri direttori di una retta. Rette parallele, rette e piani paralleli. Il piano per un punto parallelo a due direzioni distinte. Rette perpendicolari, rette e piani perpendicolari. Rette sghembe e loro caratterizzazione. La retta perpendicolare a due rette sghembe. Stelle di rette. Stelle di piani.

Il prodotto scalare in  $\mathcal{V}_0^2$  e  $\mathcal{V}_0^3$ . La componente ortogonale di un vettore secondo una retta orientata. Il prodotto vettoriale di due vettori di  $\mathcal{V}_0^3$ . Calcolo dell'area di un parallelogramma. Il prodotto misto di tre vettori di  $\mathcal{V}_0^3$ . Calcolo del volume di un parallelepipedo. Distanza di un punto da una retta nel piano e nello spazio. Distanza tra due rette parallele. Distanza di un punto da un piano. Distanza tra due piani paralleli. Distanza tra due rette sghembe.

## II parte (Prof. Alessandro Savo).

La nozione di spazio vettoriale reale. Dipendenza e indipendenza lineare tra vettori. Insiemi di generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Basi. Coordinate di un vettore rispetto a una base. Il teorema di esistenza di una base. Il teorema del completamento di una base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Il sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Equazioni di un sottospazio. Operazioni tra sottospazi: intersezione, somma. Somma diretta di sottospazi. Il teorema di Grassmann (enunciato). Il sottospazio generato da un insieme di vettori. Il sottospazio generato dai vettori riga (o colonna) di una matrice. Matrici complesse.

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Il teorema della dimensione. Isomorfismi. Ogni spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  è isomorfo a  $\mathbf{R}^n$ . Endomorfismi di uno spazio vettoriale. La matrice associata ad un endomorfismo rispetto ad una base, e sue principali proprietà. L'isomorfismo tra  $\text{End}(V^n)$  e  $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$  indotto da una base. Composizione di endomorfismi. La matrice di un cambiamento di base. Matrici simili. Matrici associate ad un endomorfismo rispetto a due basi distinte.

Autovettori e autovalori di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Autospazi. Il polinomio caratteristico e sue principali proprietà. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Autovalori e traccia di una matrice quadrata. Il teorema di Cayley-Hamilton (enunciato) e alcune sue applicazioni. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici diagonalizzabili. Calcolo esplicito delle potenze di una matrice diagonalizzabile. Alcune caratterizzazioni di un endomorfismo diagonalizzabile. Matrici diagonalizzabili nel campo complesso.

Spazi reali euclidei; definizione e prime proprietà. Norma di un vettore. Vettori ortogonali. Basi ortonormali. Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Proprietà delle righe (colonne) di una matrice ortogonale. Il supplementare ortogonale di un sottospazio e sue proprietà. Endomorfismi simmetrici. Proprietà degli autospazi di un endomorfismo simmetrico. Il teorema spettrale. Diagonalizzabilità delle matrici simmetriche. La proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio e sue proprietà. Ogni proiezione ortogonale è un endomorfismo simmetrico.

## Testi di riferimento.

P. Maroscia, *Introduzione alla Geometria e all'Algebra Lineare*, Zanichelli.

P. Maroscia, *Problemi di Geometria*, Zanichelli.

P. Maroscia, *Appunti del Corso di Geometria, II parte*.

A. Savo, *Appunti sul prodotto scalare*.