Geometria

Giuseppe ACCASCINA
Valerio MONTI

Versione 1
21 settembre 2015
www.sbai.uniroma1.it/accascinamonti/geogest

Cronologia delle versioni

21 settembre 2015 - 1

- Correzione di vari errori.

22 settembre 2014 - 0.84

- Correzione di vari errori.

1 ottobre 2013 - 0.83

- Correzione di vari errori.

1 ottobre 2012 - 0.82

- Correzione di vari errori.

26 settembre 2011 - 0.81

- Correzione di vari errori.
- Nuovi esercizi aggiunti.

18 ottobre 2010 - 0.8

- Alcune dimostrazioni spostate nel capitolo Approfondimenti in Appendice.
- Revisione sistemi equivalenti nel capitolo Equazioni lineari e numeri.
- Eliminate le matrici elementari nel capitolo Applicazioni del metodo di Gauss.
- Posposto il capitolo Intersezione e somma di sottospazi.
- Correzione di vari errori.
- Nuovi esercizi aggiunti.

23 novembre 2009 - 0.7

- Prima versione completa di tutti i capitoli.

23 ottobre 2009 - 0.7pre2

- Versione contenente i primi 29 capitoli.

28 settembre 2009 - 0.7pre

- Prima versione liberamente disponibile. Contiene solo i primi 19 capitoli.

La versione più recente può essere scaricata all'indirizzo:
www.sbai.uniroma1.it/accascinamonti/geogest

Istruzioni per l'uso

In ciascun capitolo del testo sono intervallati numerosi esercizi cosiddetti *esercizi di base*. Consigliamo di non proseguire la lettura senza aver prima risolto l'esercizio di base assegnato. L'esercizio è stato inserito proprio per far comprendere al lettore se ha capito o meno quel che ha letto in precedenza. Una volta risolto l'esercizio è bene controllarne la risoluzione. In ogni capitolo è presente un paragrafo in cui sono raccolte le risoluzioni di tutti gli esercizi di base del capitolo. Anche la risoluzione dell'esercizio è parte integrante del testo: spesso viene utilizzata successivamente. Ogni capitolo contiene inoltre un *Sunto*, in cui vengono messi in evidenza gli argomenti principali svolti nel capitolo. Consigliamo di leggere con cura anche questo paragrafo.

Non basta aver saputo svolgere un esercizio di un certo tipo per essere sicuri di saper risolvere esercizi dello stesso tipo. Occorre "allenarsi". Con l'allenamento si acquista sicurezza e velocità. Per questa ragione al termine di ogni capitolo, sono stati inseriti un certo numero di esercizi di "allenamento" che chiameremo semplicemente *esercizi*. Consigliamo di svolgere questi esercizi e di controllarne poi le soluzioni.

In alcuni capitoli si rimanda al capitolo denominato *approfondimenti* in Appendice A in cui vengono introdotti argomenti o dimostrazioni che possono essere omessi e sono pertanto riservati ai lettori particolarmente interessati.

Nelle appendici B e C sono richiamati alcuni risultati di geometria euclidea del piano e dello spazio che, pur essendo usati, non vengono menzionati esplicitamente. Si consiglia di leggerle con attenzione e, se necessario, di consultare un libro di testo scolastico.

Gli enunciati dei teoremi, delle proposizioni, dei corollari e dei lemmi sono scritti utilizzando il carattere *corsivo*.

Le definizioni, le osservazioni, gli esempi, etc. sono invece scritti utilizzando il carattere normale: per questo motivo la loro fine è segnalata dal simbolo $\triangle$.

La fine di una dimostrazione è segnalata dal simbolo $\blacksquare$.

Un punto in cui bisogna fare particolare attenzione a non commettere errori è segnalato a margine dal simbolo .

Indice

CAPITOLO 1

Equazioni lineari e numeri

In matematica vengono spesso utilizzate le equazioni. La prima parte del nostro corso è dedicata allo studio delle equazioni più semplici: quelle lineari.

Iniziamo questo capitolo vedendo come determinare le eventuali soluzioni di un'equazione lineare in un'incognita. Successivamente studiamo i sistemi di due equazioni lineari in due incognite. Sono argomenti ben conosciuti fin dalle scuole secondarie. Ciononostante abbiamo voluto riprenderli. Una loro accurata analisi ci darà infatti suggerimenti per poter studiare sistemi di equazioni lineari con un numero qualsiasi di equazioni e di incognite. Introduciamo poi i sistemi di p equazioni in q incognite con p e q numeri interi positivi qualsiasi.

Anche nel paragrafo 1.5 riprendiamo argomenti già studiati nelle scuole secondarie. Analizziamo infatti quelle proprietà dei numeri naturali, interi, razionali, reali, che sono utili nella ricerca di soluzioni di equazioni e sistemi di equazioni lineari.

1.1 Una equazione in una incognita

Ecco alcuni esempi di equazioni lineari in una incognita:

$$\begin{aligned} 3x &= 2, \\ 0x &= 2, \\ 0x &= 0. \end{aligned}$$

La prima ha una e una sola soluzione:

$$x = \frac{2}{3}.$$

Moltiplicando infatti ambo i membri dell'equazione per l'inverso di 3 otteniamo il risultato voluto.

La seconda equazione non ha invece alcuna soluzione. Se infatti moltiplichiamo 0 per un qualsiasi numero, otteniamo sempre 0. A primo membro della seconda equazione si ha perciò sempre 0 mentre il secondo membro è un numero diverso da 0.

La terza equazione ha invece come soluzioni tutti i numeri. Infatti il primo membro e il secondo membro sono uguali a 0, qualsiasi sia il numero che sostituiamo a x. La terza equazione è cioè **identicamente soddisfatta**.

Vi sono quindi equazioni lineari che hanno una sola soluzione, altre che non hanno alcuna soluzione e altre ancora che hanno infinite soluzioni. Sono questi tutti i casi possibili? Vi sono cioè equazioni lineari che hanno due soluzioni o, più in generale, un numero finito n di soluzioni con n maggiore di uno? Per rispondere a questa domanda dovremmo analizzare tutte le possibili equazioni lineari. Nasce un problema: non possiamo analizzare ogni singola equazione. Ve ne sono infatti infinite.

Esercizio di base 1.1 Perché esistono infinite equazioni lineari in una incognita?

Analizzando ogni singola equazione non finiremmo mai. Possiamo però indicare tutte le equazioni lineari nel modo seguente:

$$ax = b.$$

Abbiamo indicato con a e b numeri qualsiasi e con x l'incognita. Ci chiediamo: fissato il numero a e fissato il numero b, l'equazione precedente ha soluzioni? Quante?

Per cercare le eventuali soluzioni, vogliamo "isolare" la x a primo membro. Per far ciò, dobbiamo moltiplicare ambo i membri per l'inverso di a. Ciò è possibile solamente se a è diverso da zero. Studiamo allora separatamente il caso in cui a sia diverso da 0 e il caso in cui a sia uguale a 0.

• Caso $a \neq 0$. Il numero a è dotato di inverso, che indichiamo con a^{-1}. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per a^{-1} otteniamo:

$$x = a^{-1}b.$$

Abbiamo quindi una e una sola soluzione dell'equazione.

• Caso $a = 0$. Notiamo che, qualsiasi sia il valore di x, a primo membro otteniamo sempre 0. A secondo membro abbiamo b. Ci chiediamo se i due membri dell'equazione siano uguali o diversi. Studiamo allora separatamente cosa succede se $b \neq 0$ e se $b = 0$:

– Sottocaso $b \neq 0$. I due membri dell'equazione sono diversi qualunque valore assuma la x. L'equazione non ha quindi soluzioni.

– Sottocaso $b = 0$. I due membri dell'equazione sono uguali a 0, qualsiasi valore assuma la x. Ogni numero è quindi soluzione dell'equazione.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato la:

Proposizione 1.2 *Data un'equazione lineare:*

$$ax = b,$$

si ha:

$$\begin{cases} a \neq 0 & \textit{una e una sola soluzione,} \\ a = 0 & \begin{cases} b \neq 0 & \textit{nessuna soluzione,} \\ b = 0 & \textit{infinite soluzioni.} \end{cases} \end{cases}$$

Esercizio di base 1.3 Determinare le eventuali soluzioni di ognuna delle equazioni:

a. $-3x = 5$; b. $-\frac{3}{7}x = \frac{4}{9}$; c. $3x = 9{,}12$; d. $3x = 1{,}1$;
e. $\sqrt{2}x = 6$; f. $\sqrt{2}x = \sqrt{3}$; g. $\sqrt{3}x = 7\sqrt{12}$.

Nota 1.4 Risolvendo l'esercizio di base 1.3 abbiamo visto che quando si approssimano i numeri bisogna agire con cautela. A maggior ragione bisogna essere cauti quando si utilizza un elaboratore o una calcolatrice tascabile che approssima i numeri. Il problema dell'approssimazione dei numeri viene trattato dall'analisi numerica. D'ora in poi noi non approssimeremo più i numeri. Quindi, in particolare, non approssimeremo i numeri non decimali con numeri decimali. $\triangle$

1.2 Due equazioni in due incognite

Consideriamo alcuni esempi di sistemi di due equazioni lineari in due incognite.

Esempio 1.5 Consideriamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}.$$

Vogliamo determinarne tutte le possibili soluzioni. Ma cosa è una soluzione? Una soluzione è una coppia di numeri (h, k) che, sostituita nelle due equazioni alla coppia (x, y), dà due uguaglianze. Chiediamoci, per esempio, se la coppia $(-2, 3)$ è una soluzione del nostro sistema. Proviamo a sostituire -2 al posto di x e 3 al posto di y. Otteniamo:

$$\begin{cases} -2 + 2 \cdot 3 = 4 \ \checkmark \\ -2 + 5 \cdot 3 = 6 \ \times \end{cases}$$

Solo la prima uguaglianza è verificata: quindi la coppia $(-2, 3)$ non è una soluzione del sistema S.

Consideriamo invece la coppia $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Sostituendo tali valori a x e y otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3} + 2 \cdot \dfrac{2}{3} = 4 \ \checkmark \\ \dfrac{8}{3} + 5 \cdot \dfrac{2}{3} = 6 \ \checkmark \end{cases}$$

Entrambe le uguaglianze sono ora verificate: dunque la coppia $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è soluzione del sistema.

Viene spontaneo chiedersi come si è potuta determinare tale soluzione: non si può certo sperare di trovare le soluzioni per tentativi. Inoltre potrebbero esserci altre soluzioni oltre a quella trovata: abbiamo cioè bisogno di un procedimento che ci dica se ci sono soluzioni e, in caso affermativo, ci permetta di determinarle.

Modifichiamo allora il sistema in modo tale da ottenerne uno di cui sia facile calcolare tutte le eventuali soluzioni. Sottraendo alla seconda equazione la prima equazione, otteniamo il sistema equivalente:

$$S' \colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \phantom{x + {}} 3y = 2 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$y = \frac{2}{3}.$$

Sostituendo nella prima equazione il valore di y così ottenuto, abbiamo:

$$x = \frac{8}{3}.$$

Il nostro sistema S ha quindi una e una sola soluzione:

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

che è proprio quella che avevamo esibito, in maniera un po' misteriosa, in precedenza. △

Facciamo ora un passo indietro. Abbiamo detto che il sistema S' è **equivalente** al sistema S: ciò significa che S' ha le stesse soluzioni di S (preciseremo meglio questo concetto nel corso del capitolo). Nel risolvere il sistema dell'esempio 1.5 abbiamo utilizzato vari tipi di trasformazioni per passare da un sistema a un sistema a esso equivalente. Una trasformazione possibile è quella di sommare a un'equazione del sistema un'altra equazione moltiplicata per una costante. Nell'esempio 1.5 abbiamo sostituito il sistema:

$$S \colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

con il sistema:

$$S' \colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \phantom{x + {}} 3y = 2 \end{cases}$$

Il sistema S' è ottenuto da S sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -1. Quindi S' è equivalente ad S.

Per determinare y abbiamo moltiplicato la seconda equazione per $\frac{1}{3}$, trovando così $y = \frac{2}{3}$. In generale dato un sistema possiamo moltiplicare un'equazione per una costante non nulla. Se, per esempio, nel sistema S moltiplichiamo la seconda equazione per -1, otteniamo il sistema:

$$S'' \colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x - 5y = -6 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema S.

Possiamo anche (come è ovvio) scambiare tra loro due equazioni. Se, per esempio, nel nostro solito sistema S scambiamo tra loro le due equazioni, otteniamo il sistema:

$$S''' \colon \begin{cases} x + 5y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

equivalente al sistema S.

Chiariremo meglio più avanti, nel paragrafo 1.4, cosa si intenda esattamente con sistemi equivalenti e quali operazioni siano lecite per passare da un sistema a un sistema a esso equivalente.

Esercizio di base 1.6 Determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S \colon \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

△

Esempio 1.7 Cerchiamo le eventuali soluzioni del sistema:

$$S \colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}.$$

Sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2 otteniamo il sistema equivalente:

$$S' \colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Il sistema S' ovviamente non ha soluzioni; anche il sistema S non ha quindi soluzioni. △

Esempio 1.8 Cerchiamo le eventuali soluzioni del sistema:

$$S \colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}.$$

Sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2 otteniamo il sistema equivalente:

$$S' \colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione è identicamente soddisfatta. Notiamo che, nella prima equazione, sommando ad ambo i membri $-2y$ otteniamo $x = 1 - 2y$. Dunque le soluzioni del sistema S', e quindi del sistema S, sono date dalle coppie:

$$(1 - 2t, t)$$

dove t è un qualsiasi numero. Ad esempio, assegnando a t il valore 0 otteniamo la soluzione $(1, 0)$, assegnando a t il valore $\frac{1}{2}$ otteniamo la soluzione $(0, \frac{1}{2})$, assegnando a t il valore $\sqrt{2}$ otteniamo la soluzione $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ e così via. Abbiamo quindi infinite soluzioni. Le soluzioni dipendono da un parametro. △

Abbiamo visto esempi di sistemi di due equazioni lineari in due incognite che hanno o una soluzione, o nessuna o infinite soluzioni. Siamo in una situazione analoga al caso di un'equazione lineare in una incognita. Ci chiediamo se esistano sistemi di due equazioni lineari in due incognite che abbiano un numero finito di soluzioni diverso da uno.

Così come abbiamo fatto per un'equazione in un'incognita, possiamo indicare tutti i sistemi di due equazioni in due incognite nel modo seguente:

$$S\colon \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Vedremo nel capitolo 6 (teorema di Cramer) che, se $ae - bd \neq 0$, allora il sistema ha una sola soluzione. Vedremo inoltre nel capitolo 8 (teorema di Rouché-Capelli) che, se $ae - bd = 0$, allora il sistema o non ha alcuna soluzione oppure ne ha infinite. La situazione è quindi analoga al caso di una sola equazione in un'incognita.

Esercizio di base 1.9 Determinare le eventuali soluzioni dei sistemi:

$$\text{a. } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x = 5 \end{cases}; \qquad \text{b. } \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}; \qquad \text{c. } \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

1.3 Molte equazioni in molte incognite

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato un'equazione lineare in un'incognita o due equazioni lineari in due incognite. Ma il numero delle equazioni e delle incognite può anche essere maggiore di 2. Nei capitoli successivi analizzeremo alcuni metodi per determinare le eventuali soluzioni di tali sistemi. In questo paragrafo ci limitiamo a determinare un metodo per scrivere tutti i sistemi di equazioni lineari.

Naturalmente, per indicare un generico sistema, dobbiamo usare le lettere. Incominciamo dalle incognite. Nel caso di una incognita di solito si usa la lettera x; nel caso di due incognite di solito si usano le lettere x e y. Nel caso di tre incognite di solito si usano le lettere x, y e z. Ma quando si hanno molte incognite come facciamo? Le lettere di un qualsiasi alfabeto potrebbero non bastare. In tal caso si usa una lettera sola, di solito la x, e si usano gli indici. Per indicare q incognite si usano cioè i simboli

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q.$$

In altre parole se j è un numero intero tale che $1 \leq j \leq q$, la j-esima incognita con è indicata con il simbolo x_j.

Passiamo ora ai coefficienti delle incognite. Anche in questo caso si usa un solo simbolo, noi di solito utilizzeremo la lettera a con gli indici. Abbiamo bisogno di due indici. Per indicare un generico sistema di p equazioni in q

incognite scriviamo:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Notiamo che il primo indice di un coefficiente indica l'equazione di cui esso fa parte, il secondo indice rappresenta invece l'incognita di cui esso è coefficiente. In generale, cioè, il numero a_{ij} con $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ è il coefficiente della j-esima incognita appartenente alla i-esima equazione.

Una soluzione del sistema S è una q-upla di numeri reali $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q)$ che, sostituiti nelle equazioni del sistema alle incognite $(x_1, x_2, \dots, x_q)$, danno delle identità.

Nota 1.10 Dato un sistema in q incognite, una q-upla di numeri che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni costituisce **una** soluzione, non q soluzioni. $\triangle$

Disponiamo i coefficienti del sistema in una tabella di p righe e q colonne:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Una tale tabella si dice **matrice a p righe e q colonne**. La matrice associata al sistema si dice **matrice dei coefficienti del sistema**.

Nell'esempio 1.5 abbiamo considerato il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}.$$

La sua matrice dei coefficienti è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio di base 1.11 Determinare le matrici dei coefficienti dei sistemi dati negli esempi 1.7 e 1.8.

1.4 Sistemi equivalenti

Nei paragrafi precedenti, per stabilire se un certo sistema è risolubile (ed eventualmente per determinarne le soluzioni) abbiamo applicato al sistema alcuni tipi di manipolazioni per ottenere un sistema più semplice da analizzare. Ovviamente, perché tutto ciò abbia senso, passando da un sistema all'altro dobbiamo essere sicuri che si ottenga un sistema con le stesse soluzioni di quelle di partenza. Le manipolazioni che effettuiamo devono, cioè, essere lecite: non devono far perdere delle soluzioni o introdurne di nuove. Vediamo allora alcuni tipi di manipolazioni lecite: alcune di queste le abbiamo già usate negli esempi fin qui visti.

Abbiamo talora sommato a una equazione un'altra equazione moltiplicata per una costante. Abbiamo infatti la:

Proposizione 1.12 *Se in un sistema S sommiamo a una equazione un'altra equazione del sistema moltiplicata per una costante, otteniamo un sistema S' con le stesse soluzioni di S.*

Un'altra possibilità è data dalla:

Proposizione 1.13 *Se in un sistema S moltiplichiamo un'equazione per una costante non nulla, otteniamo un sistema S' con le stesse soluzioni di S.*

Bisogna però fare attenzione: moltiplicando un'equazione per 0 **non** otteniamo necessariamente un sistema con le stesse soluzioni. Se, per esempio, moltiplichiamo per 0 l'equazione

$$3x = 2,$$

otteniamo l'equazione

$$0x = 0,$$

che è identicamente soddisfatta, mentre l'equazione di partenza ha un'unica soluzione ($\frac{2}{3}$ per la precisione). Pertanto, nella proposizione 1.13 è essenziale la condizione che la costante per cui si moltiplica sia non nulla.

Le dimostrazioni delle proposizioni 1.12 e 1.13 sono abbastanza semplici ma richiedono un po' di attenzione con gli indici: i dettagli possono essere trovati nel paragrafo A.1.

Un altro modo (del tutto ovvio) per passare da un sistema a un sistema con le stesse soluzioni è dato dalla:

Proposizione 1.14 *Se in un sistema scambiamo tra loro due equazioni, otteniamo un sistema con le stesse soluzioni del sistema di partenza.*

Alle volte può capitare che dopo alcune manipolazioni si ottenga tra le equazioni di un sistema un'identità, cioè un'equazione del tipo $0 = 0$: abbiamo incontrato questa situazione nell'esempio 1.8. Quando capita, possiamo tranquillamente scartare tale equazione. Abbiamo cioè la:

Proposizione 1.15 *Se un sistema S ha tra le sue equazioni un'identità (cioè un'equazione $0 = 0$) allora il sistema S' ottenuto da S scartando tale identità ha le stesse soluzioni di S.*

Dopo aver eliminato un'identità, se volessimo ritornare al sistema di partenza dobbiamo ovviamente aggiungere di nuovo un'identità. Più in generale:

Proposizione 1.16 *Se a un sistema S aggiungiamo un'identità $0 = 0$ otteniamo un sistema S' con le stesse soluzioni di S.*

Abbiamo così elencato alcuni tipi di operazioni elementari che permettono di passare da un sistema a un altro con le stesse soluzioni. Possiamo allora dare la:

Definizione 1.17 Dati due sistemi lineari S e S' nelle medesime incognite x_1, x_2, ..., x_q, diciamo che S è **equivalente** a S' se si può passare da S a S' per mezzo di un numero finito di operazioni elementari di uno di questi tipi

- sommare a un'equazione un'altra moltiplicata per un numero[1];
- moltiplicare un'equazione per un numero diverso da 0;
- scambiare di posto tra loro due equazioni;
- eliminare un'identità;
- aggiungere un'identità. $\triangle$

Per quanto fin qui detto abbiamo ovviamente la:

Proposizione 1.18 *Se un sistema S è equivalente a un sistema S' allora i due sistemi hanno le stesse soluzioni (in particolare se uno dei due non ha soluzioni anche l'altro non ne ha).*

Si può facilmente osservare che se si applica a un sistema un'operazione elementare, si può tornare al sistema di partenza per mezzo di un'altra operazione elementare:

Esercizio di base 1.19 Sia S un sistema lineare e sia S' un sistema ottenuto da S per mezzo di un'operazione elementare. Mostrare che è possibile tornare indietro e ottenere S applicando a S' un'opportuna operazione elementare.

Notiamo che quando lavoriamo con i sistemi siamo abituati a fare, talvolta senza nemmeno pensarci, altre manipolazioni che ci permettono di passare da un sistema a uno a esso equivalente. Ad esempio se in un sistema compare due volte la stessa equazione, o, più in generale, un'equazione e una sua multipla, scartiamo quest'ultima perché è, in sostanza, conseguenza dell'altra. Notiamo però che non è necessario definire un'ulteriore operazione elementare per coprire questo caso. È infatti possibile descrivere questa operazione per mezzo di altre operazioni elementari[2]: è quanto abbiamo fatto nell'esempio 1.8. Ciò ha validità generale.

Esercizio di base 1.20 Sia S un sistema lineare. Se in S compare un'equazione e una sua multipla, il sistema S' che si ottiene scartando quest'ultima è equivalente al sistema S.

L'equivalenza tra sistemi soddisfa le tre proprietà:

[1] Se il numero per cui moltiplichiamo è 0 stiamo sommando a un'equazione un'altra moltiplicata per 0: il sistema rimane ovviamente inalterato e quindi l'operazione è perfettamente lecita.

[2] In realtà è possibile anche descrivere lo scambio di due equazioni in termini degli altri tipi di operazioni elementari: poiché però ciò è un po' macchinoso, lasciamo comunque lo scambio di equazioni nella nostra lista di operazioni elementari.

1. **Proprietà riflessiva** Ogni sistema S è equivalente a sé stesso.

   Infatti per passare da S a sé non è necessaria nessuna operazione (potremmo dire che servono 0 operazioni elementari).

2. **Proprietà simmetrica** Se un sistema S è equivalente a un sistema S' allora S' è equivalente a S.

   Basta infatti ripercorre a ritroso ciascun passaggio: nell'esercizio di base 1.19 abbiamo mostrato che ciascun passaggio a ritroso è, a sua volta, un'operazione elementare.

3. **Proprietà transitiva** Se un sistema S è equivalente a un sistema S' e se S' è equivalente a un sistema S'' allora S è equivalente a S''.

   Se passiamo prima da S a S' e poi da S' a S'' per mezzo di operazioni elementari, siamo, di fatto, passati da S a S'' per mezzo di operazioni elementari.

Più in generale, una relazione che soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva è detta **relazione di equivalenza**.

1.5 Numeri e insiemi

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato genericamente di *numeri.* Con il termine **numero** indichiamo, salvo avviso contrario, un numero reale. Sono numeri reali, per esempio, i numeri:

$$0, 1, -2, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}.$$

La definizione di numero reale è alquanto laboriosa. Ci limitiamo a ricordare che ogni numero reale è rappresentabile, nella scrittura decimale, da una parte intera seguita, dopo la virgola, da un numero (eventualmente illimitato) di cifre decimali con la convenzione di considerare, per esempio, le scritture:

$$27{,}35 \quad 27{,}350 \quad 27{,}35000 \quad 27{,}34999\ldots$$

come diverse scritture dello stesso numero. Indichiamo con il simbolo $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

Per indicare che un numero è reale usiamo il simbolo $\in$, detto **simbolo di appartenenza**. Per esempio, per indicare che $\sqrt{2}$ è un numero reale, scriviamo

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

Possiamo leggere la formula precedente dicendo: $\sqrt{2}$ *appartiene all'insieme dei numeri reali.*

Anche π è un numero reale. Possiamo quindi scrivere

$$\pi \in \mathbb{R},$$

cioè π appartiene all'insieme dei numeri reali.

Sappiamo che la somma e il prodotto di due numeri reali sono numeri reali. Quindi se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ allora $a + b \in \mathbb{R}$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

Tra i numeri reali vi sono particolari numeri, i **numeri naturali**, cioè i numeri

$$1, 2, 3, \ldots$$

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Quindi si ha, per esempio

$$1 \in \mathbb{N}, 317 \in \mathbb{N}.$$

Per indicare in modo simbolico quali siano gli elementi dell'insieme $\mathbb{N}$ possiamo anche scrivere:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Tra parentesi graffe si scrivono gli elementi dell'insieme. La formula precedente si legge: *l'insieme* $\mathbb{N}$ *ha come elementi* 1*,* 2*,* 3*,* $\dots$.

Nota 1.21 Alcuni autori considerano anche il numero 0 come numero naturale. Per essi si ha cioè $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. △

Ogni numero naturale è un numero reale, quindi ogni elemento di $\mathbb{N}$ è un elemento di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.22 Se tutti gli elementi di un insieme A sono elementi di un insieme B, diciamo che l'insieme A è **contenuto** nell'insieme B o anche che A è un **sottoinsieme** di B. Indichiamo ciò con i simboli:

$$A \subseteq B.$$

△

Da quel che abbiamo detto segue che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è contenuto nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. In simboli:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}.$$

Vi sono però numeri reali che non sono naturali. Per esempio il numero -3 non è un numero naturale. Possiamo esprimere ciò scrivendo:

$$-3 \notin \mathbb{N}.$$

che leggiamo: -3 *non appartiene all'insieme dei numeri naturali.*

La somma e il prodotto di due numeri naturali sono numeri naturali. Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$ allora $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

Tra i numeri reali vi sono poi i numeri **interi** cioè i numeri:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Indichiamo l'insieme dei numeri interi con il simbolo $\mathbb{Z}$. Quindi, per esempio:

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad 7 \in \mathbb{Z}, \quad 314 \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Tutti i numeri naturali sono interi, quindi:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}.$$

D'altronde tutti i numeri interi sono reali. Quindi

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}.$$

Possiamo riepilogare tutto ciò scrivendo:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}.$$

Vi sono numeri reali che non sono interi. Per esempio:

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

La somma e il prodotto di due numeri interi sono numeri interi. Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ allora $a + b \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

Indichiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri **razionali**, ossia l'insieme delle frazioni:

$$\frac{m}{n}.$$

con m numero intero e n numero intero non nullo. Ricordiamo che un numero razionale può essere scritto in vari modi. Per esempio, le frazioni:

$$\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{6}{8}$$

rappresentano lo stesso numero razionale. In generale, le frazioni

$$\frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m'}{n'}$$

vengono considerate scritture diverse di uno stesso numero razionale se

$$mn' = nm'.$$

I numeri interi vengono considerati numeri razionali. Infatti, per esempio, il numero 7 viene considerato uguale alla frazione

$$\frac{7}{1}.$$

Quindi l'insieme dei numeri interi è contenuto nell'insieme dei razionali. Quest'ultimo insieme è contenuto a sua volta nell'insieme dei numeri reali. In simboli:

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

La somma e il prodotto di due numeri razionali sono numeri razionali. Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$ allora $a + b \in \mathbb{Q}$ e $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

Vi sono numeri reali che non sono razionali. Per esempio:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

I numeri reali che non sono razionali si dicono **irrazionali**.

Abbiamo esaminato alcuni insiemi di numeri: i naturali, gli interi, i razionali, i reali. Ognuno di tali insiemi è contenuto nel successivo. In simboli:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Vogliamo ora analizzare alcune proprietà dei numeri reali. Ad esempio, se a due numeri uguali viene sommato un numero, si ottengono numeri uguali. In altri termini possiamo dire che dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\text{se } a = b \text{ allora } a + c = b + c.$$

Possiamo invertire l'implicazione? È vero cioè che, se $a + c = b + c$, allora $a = b$? Possiamo cioè semplificare per c? La risposta è affermativa. Infatti dall'uguaglianza

$$a + c = b + c$$

segue, sommando ad ambo i membri il numero $-c$:

$$a + c - c = b + c - c$$

da cui

$$a = b.$$

Abbiamo quindi la:

Proposizione 1.23 (Legge di semplificazione per l'addizione) *Dati tre numeri reali a, b e c si ha:*

$$a + c = b + c \textit{ se e solo se } a = b.$$

Esercizio di base 1.24 Spiegare perché dati $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ si ha:

$$a + c = c \text{ se e solo se } a = 0.$$ △

Ecco un'altra proprietà dei numeri reali. Se due numeri uguali vengono moltiplicati per uno stesso numero, si ottengono numeri uguali. In simboli possiamo dire che dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\text{se } a = b \text{ allora } a \cdot c = b \cdot c.$$

Possiamo invertire l'implicazione? Vale a dire, dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\text{se } a \cdot c = b \cdot c \text{ allora } a = b?$$

La risposta è no, in generale. Se infatti $c = 0$, si ha $a \cdot c = b \cdot c$ per ogni a e b. Vale però la:

Proposizione 1.25 (Legge di semplificazione per la moltiplicazione) *Dati tre numeri reali a, b e c con $c \neq 0$:*

$$\textit{se } a \cdot c = b \cdot c \textit{ allora } a = b.$$

Dimostrazione Moltiplicando infatti per c^{-1} ambo i membri dell'uguaglianza:

$$a \cdot c = b \cdot c$$

si ottiene:

$$a \cdot c \cdot c^{-1} = b \cdot c \cdot c^{-1} \text{ da cui } a = b.$$ ■

Nell'enunciare la legge di semplificazione per la moltiplicazione, abbiamo richiesto che c fosse un numero reale diverso da 0. Possiamo anche scrivere ciò nel modo seguente:

$$c \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

In generale, infatti abbiamo la:

Definizione 1.26 Dati due insiemi A e B si chiama **insieme differenza** di A e B l'insieme, che indichiamo con il simbolo $A - B$, formato dagli elementi di A che non appartengono a B. △

Per esempio, dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 10\}$ e $B = \{0, -3, 2, 4, 7\}$, si ha:

$$A - B = \{1, 3, 10\}.$$

Notiamo che nella definizione di $A - B$ non abbiamo richiesto che B sia un sottoinsieme di A.

Esercizio di base 1.27 Spiegare perché si ha la seguente proprietà. Dati $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ha:

$$a \cdot c = c \text{ se e solo se } a = 1.$$ △

Esercizio di base 1.28 La soluzione di un'equazione lineare del tipo:

$$a \cdot x = b$$ △

con $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $b \in \mathbb{N}$ è sempre elemento di $\mathbb{N}$?

Esercizio di base 1.29 La soluzione di un'equazione lineare del tipo:

$$a \cdot x = b$$ △

con $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $b \in \mathbb{Z}$ è sempre elemento di $\mathbb{Z}$?

Esercizio di base 1.30 La soluzione di un'equazione lineare del tipo:

$$a \cdot x = b$$ △

con $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ e $b \in \mathbb{Q}$ è sempre elemento di $\mathbb{Q}$?

1.6 Soluzioni degli esercizi di base

EB.1.1 Ogni equazione

$$ax = b$$

è determinata da due numeri: il coefficiente a della x e il termine noto b. Poiché i numeri sono infiniti, le equazioni sono infinite.

EB.1.3

a. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per l'inverso di -3, che è $-\frac{1}{3}$, otteniamo l'unica soluzione dell'equazione:

$$x = -\frac{5}{3}.$$

b. Moltiplicando ambo i membri per $-\frac{7}{3}$, otteniamo:

$$x = -\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{28}{27}.$$

c. Moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{3}$ otteniamo:

$$x = \frac{1}{3} \cdot 9{,}12.$$

Le notazioni frazionarie e decimali dei numeri non vengono, di solito utilizzate contemporaneamente. Dividiamo allora 9,12 per 3. Otteniamo $x = 3{,}04$.

d. Moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{3}$, otteniamo:

$$x = \frac{1}{3} \cdot 1{,}1.$$

Dividiamo 1,1 per 3. Otteniamo il numero periodico $x = 0{,}3\bar{6} = 0{,}36666\ldots$. Possiamo scrivere ciò anche in forma frazionaria:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{30}.$$

Possiamo anche approssimare la soluzione. Per approssimare alla prima cifra decimale, scriviamo $x \cong 0{,}4$, alla seconda $x \cong 0{,}37$, alla terza $x \cong 0{,}367$, alla quarta $x \cong 0{,}3667$ e così via.

e. Moltiplicando ambo i membri per l'inverso di $\sqrt{2}$, otteniamo:

$$x = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Se vogliamo evitare di scrivere il radicale al denominatore, razionalizziamo:

$$x = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Si potrebbe essere tentati dall'approssimare la soluzione. Ricordiamo che si ha:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

che non è un numero periodico poiché $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. Se approssimiamo $\sqrt{2}$ alla seconda cifra decimale, otteniamo 1,41 che moltiplicato per 3 dà:

$$3 \cdot 1{,}41 = 4{,}23.$$

Se approssimiamo $\sqrt{2}$ alla terza cifra decimale, otteniamo 1,414 che moltiplicato per 3 dà:

$$3 \cdot 1{,}414 = 4{,}242.$$

Apparentemente abbiamo trovato che se approssimiamo la soluzione alla seconda cifra decimale otteniamo 4,23, se l'approssimiamo alla terza otteniamo 4,242. Ovviamente c'è qualcosa che non va. Non si può quindi operare in questo modo con i numeri approssimati. Il modo corretto per lavorare con i numeri approssimati è oggetto di studio dell'analisi numerica ed è, quindi, estraneo agli argomenti di questo corso. Per tale motivo all'interno del nostro corso non approssimeremo mai i numeri che troviamo.

f. Moltiplicando ambo i membri per l'inverso di $\sqrt{2}$, otteniamo:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Volendo, possiamo razionalizzare:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

g. Moltiplicando ambo i membri per l'inverso di $\sqrt{3}$, otteniamo:

$$x = 7\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}.$$

Sfruttando le proprietà dei radicali, otteniamo:

$$x = 7\frac{\sqrt{4}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 14.$$

EB.1.6 Cerchiamo le eventuali soluzioni del sistema utilizzando il procedimento visto nell'esempio 1.5. In esso abbiamo sostituito il sistema di partenza con un sistema ad esso equivalente tale che nella seconda equazione non compaia la x.

Facciamo la stessa cosa nel nostro caso. Sommiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$. Otteniamo il sistema:

$$S' : \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ \qquad 2y = -\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Il sistema S' è equivalente al sistema S. Dalla seconda equazione otteniamo:

$$y = -\frac{7}{4}.$$

Sostituendo nella prima equazione il valore di y così ottenuto, abbiamo:

$$x = \frac{13}{4}.$$

Il sistema ha quindi una e una sola soluzione:

$$\left(\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right).$$

EB.1.9

a. Poiché nella seconda equazione compare la sola incognita x, ci conviene determinare da essa la x. Abbiamo:

$$x = \frac{5}{2}.$$

Sostituiamo la x così ottenuta nella prima equazione e determiniamo la y. Otteniamo:

$$y = -\frac{13}{2}.$$

Il sistema ha quindi una e una sola soluzione:

$$\left(\frac{5}{2}, -\frac{13}{2}\right).$$

b. Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\frac{2}{3}$, otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ \qquad 0 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Il sistema non ha quindi soluzioni.

c. Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\frac{2}{3}$, otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infinite soluzioni date da:

$$\left(\frac{1}{3} - t, t\right).$$

dove t è un qualsiasi numero reale.

EB.1.11 La matrice associata al sistema dato nell'esempio 1.7 è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata al sistema dell'esempio 1.8 è uguale alla matrice associata al sistema dell'esempio 1.7. Notiamo che i sistemi dati negli esempi 1.7 e 1.8, pur avendo la stessa matrice associata, sono estremamente differenti tra loro. Uno non ha soluzioni, l'altro ne ha infinite.

Tutto ciò ci dice che il numero delle soluzioni di un sistema non dipende solamente dalla matrice associata al sistema.

EB.1.19 Vediamo cosa succede per ciascun tipo di operazione elementare.

Se S' si ottiene da S sommando alla i-esima equazione la j-esima equazione di S moltiplicata per k, allora sommando alla i-esima equazione di S' la sua j-esima equazione (che è rimasta inalterata) moltiplicata per $-k$, ritorniamo al sistema originale.

Se S' si ottiene da S moltiplicando una sua equazione per un numero k diverso da 0, moltiplicando l'equazione così ottenuta per $\frac{1}{k}$ si riottiene il sistema di partenza.

Se S' si ottiene da S scambiando tra loro due equazioni, scambiandole nuovamente si torna ovviamente al sistema di partenza.

Infine, se cancelliamo un'identità, possiamo tornare indietro inserendola e viceversa.

EB.1.20 Dobbiamo mostrare che possiamo passare da S a S' per mezzo di operazioni elementari. Supponiamo che la i-esima equazione sia uguale alla j-esima moltiplicata per k. Come prima cosa sommiamo alla i-esima equazione la j-esima moltiplicata per k. Otteniamo così un sistema la cui i-esima equazione è un'identità. Scartiamo ora quest'identità e otteniamo esattamente il sistema S'.

EB.1.24 Sommando ad ambo i membri di:

$$a + c = c$$

il numero $-c$, otteniamo:

$$a + c - c = c - c.$$

Poiché $c - c = 0$ si ottiene allora

$$a = 0.$$

Il viceversa è ovvio.

EB.1.27 Il numero c è diverso da 0, esiste quindi il suo inverso c^{-1}.

Moltiplicando ambo i membri di:

$$a \cdot c = c$$

per il numero c^{-1} otteniamo:

$$a \cdot c \cdot c^{-1} = c \cdot c^{-1}.$$

Poiché $c \cdot c^{-1} = 1$, da ciò segue:

$$a = 1.$$

Abbiamo dimostrato:

$$\text{se } a \cdot c = c \text{ allora } a = 1.$$

Il viceversa è ovvio.

EB.1.28 No. Consideriamo, per esempio, l'equazione:

$$2x = 1.$$

Si ha ovviamente $2 \in \mathbb{N}$ e $1 \in \mathbb{N}$. Ma la soluzione dell'equazione è

$$x = \frac{1}{2}$$

che non appartiene a $\mathbb{N}$.

EB.1.29 No. L'esempio dato nella soluzione dell'esercizio di base 1.28 può essere utilizzato anche in questo caso.

EB.1.30 Sì. La soluzione dell'equazione è data da:

$$x = b \cdot a^{-1}.$$

Sappiamo che l'inverso di un numero razionale non nullo è un numero razionale. Quindi, poiché $a \in \mathbb{Q}$, si ha che $a^{-1} \in \mathbb{Q}$. Sappiamo pure che il prodotto di due numeri razionali è un numero razionale. Quindi, poiché $b \in \mathbb{Q}$ e $a^{-1} \in \mathbb{Q}$, si ha che $b \cdot a^{-1} \in \mathbb{Q}$.

1.7 Sunto

Insiemi

Un **insieme** è una collezione di oggetti. Scrivendo, per esempio:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 7, 10\}$$

intendiamo che l'insieme A è formato dai numeri 1, 2, 3, 4, 7 e 10. Per indicare che un oggetto a appartiene a un insieme A usiamo il simbolo

$$a \in A.$$

Per esempio, nel caso dell'insieme A visto sopra abbiamo:

$$1 \in A, \quad 2 \in A, \quad \text{etc.}$$

Per indicare che un elemento b non appartiene a un insieme A usiamo il simbolo:

$$b \notin A.$$

Per esempio, il numero 35 non appartiene all'insieme A visto sopra. Scriviamo allora:

$$35 \notin A.$$

Definizione Se tutti gli elementi di un insieme A sono elementi di un insieme B, diciamo che l'insieme A è **contenuto** nell'insieme B o anche che A è un **sottoinsieme** di B. Indichiamo ciò con i simboli:

$$A \subseteq B. \qquad \triangle$$

Per esempio, l'insieme A visto sopra è contenuto nell'insieme

$$B = \{-5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}.$$

Definizione Dati due insiemi A e B si chiama **insieme differenza** di A e B l'insieme, che indichiamo con il simbolo $A - B$, formato dagli elementi di A che non appartengono a B. $\triangle$

Per esempio, dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 10\}$ e $B = \{0, -3, 2, 4, 7\}$ si ha:

$$A - B = \{1, 3, 10\}.$$

q scriviamo

Insiemi numerici

Sono definiti i seguenti insiemi numerici:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Gli elementi di $\mathbb{N}$ si dicono numeri **naturali**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Gli elementi di $\mathbb{Z}$ si dicono numeri **interi**.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Gli elementi di $\mathbb{Q}$ si dicono **razionali**.
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri **reali**. Non diamo la definizione di numero reale. Ricordiamo solamente che vi sono numeri reali che non sono razionali. Sono i numeri **irrazionali**. Sono, per esempio, irrazionali i numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.

Si ha:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Valgono inoltre le proprietà:

$$\text{se } a \in \mathbb{N} \text{ e } b \in \mathbb{N} \text{ allora } a + b \in \mathbb{N} \text{ e } a \cdot b \in \mathbb{N}$$
$$\text{se } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ allora } a + b \in \mathbb{Z} \text{ e } a \cdot b \in \mathbb{Z}$$
$$\text{se } a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q} \text{ allora } a + b \in \mathbb{Q} \text{ e } a \cdot b \in \mathbb{Q}$$
$$\text{se } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ allora } a + b \in \mathbb{R} \text{ e } a \cdot b \in \mathbb{R}$$

Si hanno le **leggi di semplificazione**:

Proposizione

1. ***Legge di semplificazione per l'addizione:***
   Dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$:
   $$a + c = b + c \textit{ se e solo se } a = b.$$
2. ***Legge di semplificazione per la moltiplicazione:***
   Dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} - \{0\}$:
   $$a \cdot c = b \cdot c \textit{ se e solo se } a = b.$$

Equazioni lineari

Un'**equazione lineare in un'incognita a coefficienti reali** è un' equazione del tipo:

$$ax = b$$

dove a e b sono numeri reali e x è un'incognita.

Proposizione *Data un'equazione lineare:*

$$ax = b,$$

si ha:

$$\begin{cases} a \neq 0 & \textit{una e una sola soluzione,} \\ a = 0 & \begin{cases} b \neq 0 & \textit{nessuna soluzione,} \\ b = 0 & \textit{infinite soluzioni.} \end{cases} \end{cases}$$

Nel paragrafo 1.1 è spiegato come determinare le eventuali soluzioni.

Un **sistema di due equazioni lineari in due incognite a coefficienti reali** è dato da:

$$S\colon \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri reali e x e y sono le incognite. Vi sono sistemi che hanno una soluzione (vedere esempio 1.5), sistemi che non hanno soluzioni (vedere esempio 1.7) e sistemi che hanno infinite soluzioni (vedere esempio 1.8). Nel paragrafo 1.2 abbiamo descritto un metodo per trovare le eventuali soluzioni.

Dati dei numeri interi p e q, un **sistema di p equazioni lineari in q incognite a coefficienti reali** è dato da:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

dove, per ogni i e j, si ha che a_{ij} è un numero reale, per ogni i si ha che b_i è un numero reale e $x_1, \ldots, x_q$ sono le incognite.

Una soluzione del sistema S è una q-upla di numeri reali $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ che, sostituiti nelle equazioni del sistema alle incognite $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, danno delle identità.

La tabella di p righe e q colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

si dice **matrice dei coefficienti del sistema**.

Sistemi equivalenti

Definizione Dati due sistemi lineari S e S' nelle medesime incognite x_1, x_2, $\dots$, x_q, diciamo che S è **equivalente** a S' se si può passare da S a S' per mezzo di un numero finito di operazioni elementari di uno di questi tipi

- sommare a un'equazione un'altra moltiplicata per un numero;
- moltiplicare un'equazione per un numero diverso da 0;
- scambiare di posto tra loro due equazioni;
- eliminare un'identità;
- aggiungere un'identità. $\triangle$

Proposizione *Se un sistema S è equivalente a un sistema S' allora i due sistemi hanno le stesse soluzioni (in particolare se uno dei due non ha soluzioni anche l'altro non ne ha).*

Proposizione *L'equivalenza tra sistemi è una **relazione di equivalenza**, cioè soddisfa le proprietà:*

1. ***Proprietà riflessiva*** *Ogni sistema S è equivalente a sé stesso.*
2. ***Proprietà simmetrica*** *Se un sistema S è equivalente a un sistema S' allora S' è equivalente a S.*
3. ***Proprietà transitiva*** *Se un sistema S è equivalente a un sistema S' e se S' è equivalente a un sistema S'' allora S è equivalente a S''.*

1.8 Esercizi

E.1.1 Determinare le eventuali soluzioni delle equazioni:

a. $4x = 8$; b. $-4x = 9$; c. $-12x = 0$; d. $-x = 7$;
e. $\frac{4}{9}x = 8$; f. $-\frac{4}{5}x = 5$; g. $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$; h. $\frac{3}{4}x = \frac{7}{5}$;
i. $5x = 10,2$; j. $4x = 12,4$; k. $-4{,}2x = 8{,}02$; l. $3x = 1{,}1$.

E.1.2 Determinare le eventuali soluzioni delle equazioni:

a. $7{,}3x = 8{,}4$; b. $-0{,}02x = 7{,}3$; c. $-\sqrt{3}x = \sqrt{7}$; d. $2\sqrt{2}x = \sqrt{8}$;
e. $\sqrt{2}x = \frac{1}{5}$; f. $\frac{3}{7}\sqrt{3}x = 4\sqrt{2}$; g. $-\sqrt{3}x = 41{,}5$; h. $-7{,}5x = \sqrt{13}$.

E.1.3 Determinare le eventuali soluzioni dei sistemi:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 7y = 2 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x + y = 2{,}7 \\ 3x + y = 1{,}5 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$;

d. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 4y = 5 \end{cases}$; e. $\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$; f. $\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x + 2y = 54 \end{cases}$;

g. $\begin{cases} x + y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{7} \end{cases}$.

E.1.4 Sono vere le seguenti affermazioni?

a. se $a + b \in \mathbb{N}$ allora $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$;

b. se $a \cdot b \in \mathbb{N}$ allora $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$;

c. se $a + b \in \mathbb{Z}$ allora $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$;

d. se $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ allora $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$;

e. se $a + b \in \mathbb{Q}$ allora $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$;

f. se $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ allora $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$.

E.1.5 Scrivere le matrici dei coefficienti dei sistemi dati nell'esercizio E.1.3.

E.1.6 Dato un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

con a, b, c, d, e, f numeri naturali, è vero che le eventuali soluzioni del sistema sono coppie di numeri naturali?

E.1.7 Dato un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

con a, b, c, d, e, f numeri interi, è vero che le eventuali soluzioni del sistema sono coppie di numeri interi?

E.1.8 Dato un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

con a, b, c, d, e, f numeri razionali, è vero che le eventuali soluzioni del sistema sono coppie di numeri razionali?

1.9 Soluzioni degli esercizi

E.1.1

a. $x = 2$; b. $x = -\frac{9}{4}$; c. $x = 0$; d. $x = -7$; e. $x = 18$; f. $x = -\frac{25}{4}$;
g. $x = 1$; h. $x = \frac{28}{15}$; i. $x = \frac{51}{25}$; j. $x = 3{,}1$; k. $x = -\frac{401}{210}$; l. $x = \frac{11}{30}$.

E.1.2

a. $x = \frac{84}{73}$; b. $x = -365$; c. $x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{21}}{3}$; d. $x = 1$;
e. $x = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$; f. $x = \frac{28\sqrt{6}}{9}$; g. $x = -\frac{83\sqrt{3}}{6}$; h. $x = -\frac{2\sqrt{13}}{15}$.

E.1.3

a. Il sistema ha una sola soluzione data da:

$$(2,0).$$

b. Il sistema ha una sola soluzione data da:

$$\left(-\frac{3}{5}, \frac{33}{10}\right).$$

c. Il sistema ha una sola soluzione data da:

$$(-6,13).$$

d. Il sistema ha una sola soluzione data da:

$$\left(-\frac{1}{9}, \frac{11}{9}\right).$$

e. Il sistema non ha soluzioni.

f. Il sistema ha infinite soluzioni date da:

$$(27-t,t)$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

g. Il sistema ha una sola soluzione data da:

$$\left(-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{14}+\sqrt{21}, 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{14}-\sqrt{21}\right).$$

E.1.4

a. Se $a+b \in \mathbb{N}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$. Si consideri, per esempio, $a=-3$ e $b=5$.

b. Se $a \cdot b \in \mathbb{N}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$. Si consideri, per esempio, $a=b=-1$.

c. Se $a+b \in \mathbb{Z}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$. Si consideri, per esempio, $a=\frac{1}{2}$ e $b=\frac{3}{2}$.

d. Se $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$. Si consideri, per esempio, $a=\frac{2}{3}$ e $b=\frac{3}{2}$.

e. Se $a+b \in \mathbb{Q}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$. Si consideri, per esempio, $a=\sqrt{2}$ e $b=-\sqrt{2}$.

f. Se $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ non si ha necessariamente $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$. Si consideri, per esempio, $a=b=\sqrt{2}$.

E.1.5 Abbiamo sempre matrici a due righe e due colonne. Esse sono

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; d. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
f. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; g. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

E.1.6 Non necessariamente le eventuali soluzioni sono coppie di numeri naturali. Un esempio di un sistema di questo tipo in cui la soluzione non è una coppia di numeri naturali è dato dal sistema c dell'esercizio E.1.3.

E.1.7 Non necessariamente le eventuali soluzioni sono coppie di numeri interi. Un esempio di un sistema di questo tipo in cui la soluzione non è una coppia di numeri interi è dato dal sistema d dell'esercizio E.1.3.

E.1.8 Sì. Le eventuali soluzioni sono numeri razionali. Per capire perché ciò avvenga, notare che, per trovare le eventuali soluzioni, si fanno addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni di numeri razionali. Ebbene, il risultato di tali operazioni tra numeri razionali è sempre un numero razionale.

CAPITOLO 2

Matrici e insiemi

Nel capitolo 1 abbiamo già introdotto il concetto di matrice a p righe e q colonne. Affrontiamo ora con maggior sistematicità questa nozione. Studiamo poi alcuni tipi particolari di matrici, nonché il concetto di trasposta di una matrice e ne studiamo le proprietà.

2.1 Matrici

Definizione 2.1 Una **matrice** a coefficienti reali a p righe e q colonne è una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Una matrice a p righe e q colonne si dice matrice di **tipo** (p, q). I numeri p e q vengono detti **dimensioni** della matrice. Chiamiamo **elemento** (o **coefficiente**) di posto (i, j) della matrice A il numero reale che si trova sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna della matrice A. Se vogliamo indicare genericamente gli elementi della matrice A scriviamo $A = \big(a_{ij}\big)$. △

Consideriamo, per esempio, la seguente matrice a coefficienti reali a 2 righe e 3 colonne

$$A := \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'elemento di posto $(1, 1)$ è il numero 3. L'elemento di posto $(1, 2)$ è il numero $\sqrt{2}$. L'elemento di posto $(2, 2)$ è il numero 0. E così via. Si ha cioè:

$$a_{11} = 3, \quad a_{12} = \sqrt{2}, \quad a_{13} = -5, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 1.$$

Esercizio di base 2.2 Determinare la matrice $A := \big(a_{ij}\big)$ di tipo $(2,2)$ tale che $a_{ij} := i + j$.

Indichiamo con $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici a coefficienti reali di tipo (p,q). Se scriviamo $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, intendiamo quindi che A è una matrice a coefficienti reali a p righe e q colonne.

Definizione 2.3 Una matrice di tipo (n,n), cioè con un ugual numero di righe e di colonne, si dice **quadrata** di ordine n. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali viene quindi indicato con il simbolo $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$. In una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n, gli elementi a_{11}, a_{22}, $\dots, a_{nn}$ si dicono elementi della **diagonale principale**. △

Nella seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

gli elementi della diagonale principale sono 2, 3 e 6.

Nella matrice precedente tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale, cioè gli elementi a_{21}, a_{31}, a_{32} sono nulli; per questa ragione la matrice A si dice triangolare superiore. Più in generale:

Definizione 2.4 Una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli. △

Notiamo che un elemento a_{ij} si trova sotto la diagonale principale se e solo se $i > j$. Quindi una matrice $A := \big(a_{ij}\big)$ è triangolare superiore se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. Indichiamo con $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ l'insieme delle matrici triangolari superiori di ordine n a coefficienti reali. In simboli:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) := \{A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i > j\}$$

Il simbolo $\mid$ si legge "tali che". La formula di sopra si legge quindi: *l'insieme* $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ *ha come elementi le matrici* A *appartenenti a* $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$ *tali che sia verificata la condizione etc.*. Il simbolo $:=$ indica che il primo membro, cioè l'insieme $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ è, *per definizione*, uguale al secondo membro. Talvolta si utilizza anche per il medesimo scopo il simbolo $\stackrel{\text{def}}{=}$.

Abbiamo definito un insieme elencando le proprietà che devono essere verificate da tutti e soli i suoi elementi.

È bene puntualizzare che la definizione di matrice triangolare superiore *non* implica che $a_{ij} \neq 0$ per ogni $i \leq j$. Nella matrice triangolare superiore appena analizzata, per esempio, l'elemento a_{23} è nullo.

Consideriamo poi le matrici a coefficienti reali di ordine n **triangolari inferiori**, cioè quelle matrici aventi uguali a 0 tutti gli elementi che si trovano al di sopra della diagonale principale. Indichiamo con $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ l'insieme delle matrici triangolari inferiori. Quindi

$$\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) := \{A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i < j\}.$$

Per esempio, la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

è triangolare inferiore.

Esercizio di base 2.5 Determinare la matrice quadrata $A := \left(a_{ij}\right)$ di ordine 3 tale che $a_{ij} := \max(0, i-j)$ (con $\max(0, i-j)$ indichiamo il massimo tra i numeri 0 e $i-j$). Verificare se $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$ e se $A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$.

Esercizio di base 2.6 Generalizzare l'esercizio di base 2.5 a matrici di ordine qualunque n. Verificare cioè se la matrice quadrata $A := \left(a_{ij}\right)$ di ordine n tale che $a_{ij} := \max(0, i-j)$ appartiene a $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ e se appartiene a $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$.

Definizione 2.7 Una matrice quadrata avente nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale si dice **diagonale**. Indichiamo con $\mathrm{D}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonali di ordine n a coefficienti reali. Si ha quindi:

$$\mathrm{D}(n, \mathbb{R}) := \{A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i \neq j\}. \qquad \triangle$$

La matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale.

Definizione 2.8 Una matrice quadrata si dice **simmetrica** se i suoi elementi in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale sono uguali. Indichiamo con $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n a coefficienti reali. $\triangle$

Ecco un esempio di matrice simmetrica:

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ogni matrice diagonale è simmetrica.

Esercizio di base 2.9 Dimostrare che ogni matrice diagonale è simmetrica.

In altri termini

$$\mathrm{D}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{S}(n, \mathbb{R}).$$

Notiamo che in una matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ l'elemento in posizione simmetrica rispetto all'elemento a_{ij}, è l'elemento a_{ji}. Si ha quindi:

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}.$$

Esercizio di base 2.10 Determinare la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine 3 tale che $a_{ij} := i + j$. Verificare che A è simmetrica.

Esercizio di base 2.11 Generalizzare l'esercizio di base 2.10 a matrici di ordine n qualsiasi. Dimostrare cioè che la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine n tale che $a_{ij} := i + j$ è simmetrica.

Esercizio di base 2.12 Per ognuna delle seguenti matrici di $\mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R})$, dire a quali dei sottoinsiemi $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$, $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$, $\mathrm{D}(3, \mathbb{R})$, $\mathrm{S}(3, \mathbb{R})$ essa appartiene.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ \pi & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

2.2 Intersezione e unione di insiemi

Definizione 2.13 Dati due insiemi A e B, chiamiamo **intersezione** di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B. Questo insieme viene indicato con il simbolo:

$$A \cap B.$$

Abbiamo cioè:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}. \qquad \triangle$$

Definizione 2.14 Dati due insiemi A e B, chiamiamo **unione** di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A o a B (cioè ad *almeno* uno degli insiemi A e B). Questo insieme viene indicato con il simbolo:

$$A \cup B.$$

Abbiamo cioè:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}. \qquad \triangle$$

Esempio 2.15 Consideriamo gli insiemi:

$$A := \{1, 2, 3, 4, 7, 10\} \quad \text{e} \quad B := \{0, -3, 2, 4, 7\}.$$

Abbiamo

$$A \cap B = \{2, 4, 7\}$$

e

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 10, 0, -3\}. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 2.16 Siano dati gli insiemi:

$$A := \{a \in \mathbb{N} \mid 2 < a < 5\} \quad \text{e} \quad B := \{b \in \mathbb{N} \mid 3 < b < 12\}. \qquad \triangle$$

Determinare $A \cap B$ e $A \cup B$.

Se due insiemi A e B non hanno alcun elemento in comune abbiamo che l'intersezione di A e B non ha alcun elemento. In questo caso scriviamo:

$$A \cap B = \varnothing.$$

Infatti con il simbolo $\varnothing$ indichiamo **l'insieme vuoto**, cioè l'insieme che non ha alcun elemento.

Esercizio di base 2.17 Dati gli insiemi:

$$A := \{a \in \mathbb{N} \mid 2 < a < 5\} \quad \text{e} \quad B := \{b \in \mathbb{N} \mid 6 < b < 10\}. \qquad \triangle$$

Verificare che si ha $A \cap B = \varnothing$ e determinare $A \cup B$.

A partire quindi da due insiemi A e B possiamo considerare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$. Nel capitolo 1 abbiamo anche considerato l'insieme $A - B$. Possiamo ora considerare ancora altri insiemi. Per esempio, $(A \cup B) - A$ o anche $(A \cup B) \cap A$ e così via.

Nell'esercizio di base 2.12 abbiamo considerato la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che si ha:

$$C \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), \quad C \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3).$$

Possiamo scrivere ciò nel modo seguente:

$$C \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3).$$

Abbiamo anche considerato la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto che si ha:

$$A \notin \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), A \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3).$$

Possiamo scrivere ciò nel modo seguente:

$$A \notin \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) \cup \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3).$$

Esercizio di base 2.18 Considerare le matrici A, B, C, D, E, F dell'esercizio di base 2.12. Verificare che si ha:

$$\begin{aligned}
&A \in \mathrm{M}(3,3,\mathbb{R}) - (\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) \cup \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)),\\
&B \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) - \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3),\\
&C \in \mathrm{S}(3,\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}(3,\mathbb{R}),\\
&D \in \mathrm{S}(3,\mathbb{R}) - (\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) \cup \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)),\\
&E \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3),\\
&F \in \mathrm{M}(3,3,\mathbb{R}) \cup \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3).
\end{aligned}$$

$\triangle$

2.3 Matrice trasposta

Consideriamo le due matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice B è stata ottenuta dalla matrice A scambiando le righe con le colonne. La prima riga della matrice A è la prima colonna della matrice B. La seconda riga della matrice A è la seconda colonna della matrice B. La matrice B viene chiamata matrice trasposta della matrice A. In generale:

Definizione 2.19 Data una matrice $A := (a_{ij})$ a p righe e q colonne, chiamiamo **matrice trasposta** di A la matrice, che indichiamo con ${}^tA$, a q righe e p colonne avente come elemento di posto (j,i) l'elemento di posto (i,j) della matrice A. Si ha cioè:

$${}^tA := {}_{b_{ji}} \text{ con } b_{ji} := a_{ij}.$$

$\triangle$

Esercizio di base 2.20 Determinare la matrice trasposta della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto prima che si ha $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$. La matrice A è cioè triangolare superiore. Consideriamo la sua trasposta. Si ha:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice triangolare inferiore. Cioè ${}^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$. Ciò viene generalizzato nel prossimo esercizio.

Esercizio di base 2.21 Dimostrare che si ha:

$$\begin{aligned} &A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^{t}\!A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n), \\ &A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^{t}\!A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n). \end{aligned} \qquad \triangle$$

Suggerimento: se non si è in grado di dimostrare il caso generale, provare prima con matrici di ordine 2 e poi di ordine 3.

Consideriamo la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto nel paragrafo 2.1 che si tratta di una matrice simmetrica. Calcolando la sua trasposta, vediamo che si ha ${}^{t}C = C$.

Ciò è vero in generale: ogni matrice simmetrica coincide con la sua trasposta. Viceversa, se una matrice quadrata coincide con la sua trasposta, allora essa è simmetrica.

Esercizio di base 2.22 Dimostrare che una matrice quadrata è simmetrica se e solo se coincide con la propria trasposta.

Si ha quindi:

$$A \in \mathrm{S}(n, \mathbb{R}) \text{ se e solo se } {}^{t}\!A = A,$$

o, equivalentemente:

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid {}^{t}\!A = A\}.$$

Consideriamo ora la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$${}^{t}\!A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora la matrice trasposta della trasposta di A, cioè la matrice ${}^{t}({}^{t}\!A)$:

$${}^{t}({}^{t}\!A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $A = {}^{t}({}^{t}\!A)$.

Ciò è un fatto generale. Data cioè una qualsiasi matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, si ha:

$${}^{t}({}^{t}\!A) = A.$$

Questa proprietà si dimostra facilmente.

2.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.2.2 Si ha:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

EB.2.5 Svolgendo i calcoli si ottiene:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice A non è triangolare superiore. Inoltre A è triangolare inferiore.

EB.2.6 Vogliamo dimostrare che A è una matrice triangolare inferiore. Dobbiamo quindi dimostrare che, se $j > i$, allora $a_{ij} = 0$. Sia quindi $j > i$. Ricordiamo che abbiamo $a_{ij} = \max(i - j, 0)$. Ma $i - j < 0$, quindi $a_{ij} = 0$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

EB.2.9 Sia $A := \big(a_{ij}\big)$ in $\mathrm{D}(n, \mathbb{R})$. Questo significa che $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Dobbiamo dimostrare che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici i e j. Se $i = j$ ciò è ovvio. Se $i \neq j$ allora $a_{ij} = 0 = a_{ji}$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

EB.2.10 Si ha:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
La matrice A è chiaramente simmetrica.

EB.2.11 Dimostriamo che si ha $a_{ij} = a_{ji}$ qualunque siano i e j. Poiché, per definizione, abbiamo $a_{ij} = i + j$, otteniamo: $a_{ij} = i + j = j + i = a_{ji}$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

EB.2.12
$$\begin{array}{llll}
A \notin \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & A \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & A \notin \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & A \notin \mathrm{S}(3, \mathbb{R}), \\
B \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & B \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & B \notin \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & B \notin \mathrm{S}(3, \mathbb{R}), \\
C \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & C \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & C \in \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & C \in \mathrm{S}(3, \mathbb{R}), \\
D \notin \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & D \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & D \notin \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & D \in \mathrm{S}(3, \mathbb{R}), \\
E \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & E \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & E \in \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & E \in \mathrm{S}(3, \mathbb{R}), \\
F \notin \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3), & F \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3), & F \notin \mathrm{D}(3, \mathbb{R}), & F \in \mathrm{S}(3, \mathbb{R}).
\end{array}$$

EB.2.16 Abbiamo:
$$A \cap B = \{4\} \quad \text{e} \quad A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 12\}.$$

EB.2.17 Affinché un elemento appartenga sia ad A che a B si deve avere:
$$2 < x < 5 \quad \text{e} \quad 6 < x < 10.$$
Non esiste alcun numero naturale che sia al tempo stesso minore di 5 e maggiore di 6. Quindi $A \cap B = \varnothing$. Si ha poi:
$$A \cup B = \{3, 4, 7, 8, 9\}.$$

EB.2.18 La verifica è semplice. Quindi non la scriviamo.

EB.2.20 Abbiamo:

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

EB.2.21 Sia $A := \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$. Questo significa che se $i > j$ allora $a_{ij} = 0$. Sia $B := (b_{ji}) = {}^tA$. Quindi $b_{ji} = a_{ij}$. Dobbiamo dimostrare che si ha $B \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$. Dobbiamo quindi dimostrare che, se $i > j$ allora $b_{ji} = 0$. Sia allora $i > j$. Abbiamo $b_{ji} = a_{ij} = 0$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

Dobbiamo ora dimostrare il viceversa. Supponiamo cioè che $B = {}^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ e dobbiamo mostrare che $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$. Si ha: $B = {}^tA = (b_{ji}) \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$, cioè $b_{ji} = 0$ per ogni $j < i$. Ma $a_{ij} = b_{ji}$, quindi $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$, vale a dire $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$.

La dimostrazione della seconda proprietà è analoga alla dimostrazione appena fatta. Evitiamo quindi di scriverla. Ciò non toglie che sia opportuno che il lettore la svolga.

EB.2.22 La dimostrazione non è difficile. Evitiamo di scriverla.

2.5 Sunto

Insiemi (seconda puntata)

Un insieme può essere definito indicando la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme. Per esempio, per indicare che l'insieme $\mathbb{R}^{<0}$ è l'insieme dei numeri reali negativi, si scrive:

$$\mathbb{R}^{<0} := \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}.$$

Definizione Dati due insiemi A e B definiamo gli insiemi:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\},$$
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

L'insieme $A \cap B$ si dice **intersezione** di A e B. L'insieme $A \cup B$ si dice **unione** di A e B. Si definisce **insieme vuoto** l'insieme non avente alcun elemento. Il simbolo $\emptyset$ rappresenta l'insieme vuoto. $\triangle$

Matrici

Definizione Una **matrice** a coefficienti reali a p righe e q colonne o di **tipo** (p, q) è una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

I numeri p e q vengono detti **dimensioni** della matrice. Chiamiamo **elemento** (o **coefficiente**) di posto (i, j) della matrice A il numero reale che si trova sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna della matrice A. Per indicare genericamente gli elementi della matrice A scriviamo $A = \big(a_{ij}\big)$. $\triangle$

Indichiamo con il simbolo $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici a coefficienti reali di tipo (p, q).

Definizione Una matrice di tipo (n, n) si dice **matrice quadrata di ordine** n. In una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n, gli elementi a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} si dicono elementi della **diagonale principale** di A. $\triangle$

Definizione Una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli. Indichiamo con il simbolo $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ l'insieme delle matrici triangolari superiori. Si ha quindi:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \coloneqq \{A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i > j\}. \qquad \triangle$$

Definizione Una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n si dice **triangolare inferiore** se tutti gli elementi che si trovano sopra la diagonale principale sono nulli. Indichiamo con il simbolo $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ l'insieme delle matrici triangolari inferiori. Si ha quindi:

$$\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) \coloneqq \{A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i < j\}. \qquad \triangle$$

Definizione Una matrice quadrata $A = \big(a_{ij}\big)$ di ordine n si dice **diagonale** se tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono nulli. Indichiamo con $\mathrm{D}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonali di ordine n a coefficienti reali. Si ha quindi:

$$\mathrm{D}(n, \mathbb{R}) \coloneqq \{A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i \neq j\}. \qquad \triangle$$

Definizione Una matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ si dice **simmetrica** se, per ogni i e per ogni j, si ha $a_{ij} = a_{ji}$. Con il simbolo $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ si indica l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n a coefficienti reali. $\triangle$

Definizione Data una matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, chiamiamo **matrice trasposta** di A la matrice ${}^tA \in \mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$ avente come elemento di posto j, i l'elemento di posto i, j della matrice A. Cioè:

$${}^tA \coloneqq (b_{ji}) \quad \text{con} \quad b_{ji} \coloneqq a_{ij}. \qquad \triangle$$

Proposizione *Per ogni matrice A in $\mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$ si ha:*

$${}^t({}^tA) = A.$$

Una matrice quadrata è simmetrica se e solo se essa coincide con la sua trasposta. Si ha quindi:

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}.$$

2.6 Esercizi

E.2.1 Sia data la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con a_{ij} il suo elemento generico. Determinare gli elementi a_{ij} tali che $i + j = 4$.

E.2.2 Determinare gli elementi a_{ij} della matrice A data nell'esercizio E.2.1 tali che $i + j < 4$.

E.2.3 Determinare gli elementi a_{ij} della matrice A data nell'esercizio E.2.1 tali che $i + j > 4$.

E.2.4 Si considerino gli insiemi $A := \{1, 3, 4, 8\}$ e $B := \{2, 3, 4, 5, 7\}$. Determinare gli insiemi:

a. $A - B$; b. $B - A$; c. $(A - B) \cup (B - A)$; d. $(A - B) \cap (B - A)$.

E.2.5 Indichiamo con P l'insieme formato dalle parole che indicano in italiano i primi dieci numeri naturali. Cioè:

$$P := \{\text{uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci}\}.$$

Indichiamo con T il sottoinsieme di P formato dalle parole di P di tre lettere. Consideriamo ora il sottoinsieme S di P formato dalle parole di P che cominciano con la lettera "s". Verificare che l'insieme delle parole di P di tre lettere e che cominciano con la lettera "s" è dato da $T \cap S$. Determinare inoltre gli insiemi:

a. $S \cap T$; b. $S \cup T$; c. $S - T$; d. $T - S$; e. $P - T$;
f. $P - (S \cap T)$; g. $P - (S \cup T)$.

E.2.6 Abbiamo visto che ogni matrice diagonale è simmetrica. È vero il viceversa?

E.2.7 Ogni matrice diagonale è sia triangolare superiore che triangolare inferiore. È vero il viceversa? È vero cioè che, se una matrice è sia triangolare superiore che triangolare inferiore, allora essa è diagonale? In altre parole, si chiede se è vera l'uguaglianza:

$$\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) \cap \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) = \mathrm{D}(n, \mathbb{R}).$$

E.2.8 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare se A appartiene agli insiemi:

a. $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$; b. $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$; c. $\mathrm{S}(3, \mathbb{R})$; d. $\mathrm{D}(3, \mathbb{R})$; e. $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) - \mathrm{S}(3, \mathbb{R})$;
f. $\mathrm{S}(3, \mathbb{R}) - \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$; g. $\mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R}) - (\mathrm{S}(3, \mathbb{R}) \cup \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3))$;
h. $\mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R}) - (\mathrm{S}(3, \mathbb{R}) \cap \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3))$.

2.7 Soluzioni degli esercizi

E.2.1 Sono gli elementi di posto $(1,3)$ cioè 3, di posto $(2,2)$ cioè 9 , e di posto $(3,1)$ cioè 7.

E.2.2 Sono gli elementi di posto $(1,1)$ cioè 1, di posto $(1,2)$ cioè 2 , e di posto $(2,1)$ cioè 5.

E.2.3 Sono gli elementi di posto $(2,3)$ cioè 0, di posto $(3,2)$ cioè 4 , e di posto $(3,3)$ cioè 8.

E.2.4 L'insieme $A - B$ è formato dagli elementi di A che non appartengono a B, e pertanto abbiamo che $A - B = \{1, 8\}$. Analogamente troviamo $B - A = \{2, 5, 7\}$. È ora facile vedere che $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ e che $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

E.2.5 L'insieme delle parole di P di tre lettere e che cominciano per "s" è formato da tutte e sole le parole di P che appartengono a T e che appartengono a S. Per definizione di intersezione si ha allora $P = T \cap S$. Si ha poi:

a. $S \cap T = \{\text{sei}\}$; b. $S \cup T = \{\text{uno, due, tre, sei, sette}\}$; c. $S - T = \{\text{sette}\}$;
d. $T - S = \{\text{uno, due, tre}\}$; e. $P - T = \{\text{quattro, cinque, sette, otto, nove, dieci}\}$;
f. $P - (S \cap T) = \{\text{uno, due, tre, quattro, cinque, sette, otto, nove, dieci}\}$;
g. $P - (S \cup T) = \{\text{quattro, cinque, otto, nove, dieci}\}$;

E.2.6 No. La seguente matrice è simmetrica ma non diagonale.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

E.2.7 Sì. La dimostrazione è facile.

E.2.8 Abbiamo:

a. $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$; b. $A \notin \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$; c. $A \notin \mathrm{S}(3, \mathbb{R})$; d. $A \notin \mathrm{D}(3, \mathbb{R})$;
e. $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3) - \mathrm{S}(3, \mathbb{R})$; f. $A \notin \mathrm{S}(3, \mathbb{R}) - \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$;
g. $A \notin \mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R}) - (\mathrm{S}(3, \mathbb{R}) \cup \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3))$, h. $A \in \mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R}) - (\mathrm{S}(3, \mathbb{R}) \cap \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3))$.

CAPITOLO 3

Lo spazio vettoriale delle matrici

Nel capitolo 2 abbiamo introdotto l'insieme $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali a p righe e q colonne.

Introduciamo ora in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ un'operazione analoga all'operazione di addizione tra numeri reali. Date cioè due matrici A e B di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, definiamo una matrice $A + B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$. L'operazione di addizione tra matrici verifica proprietà analoghe alle usuali proprietà dell'addizione tra numeri reali.

Definiamo poi la moltiplicazione di una matrice per un numero reale. Data cioè una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e un numero $k \in \mathbb{R}$, definiamo una matrice $kA \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$. Questa operazione viene chiamata moltiplicazione per uno scalare. Studiamo poi le proprietà della moltiplicazione per uno scalare.

Abbiamo quindi due operazioni: l'addizione tra matrici di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e la moltiplicazione di una matrice di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ per uno scalare. Le operazioni così definite in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ definiscono una struttura cosiddetta di **spazio vettoriale**. Studieremo più avanti la nozione generale di spazio vettoriale.

3.1 Matrice somma

Consideriamo le matrici

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora la matrice ottenuta sommando tra loro gli elementi di ugual posto. Chiamiamo questa matrice $A + B$. Si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+0 & 1+1 \\ 1+7 & 3+4 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, diamo la:

Definizione 3.1 Date due matrici $A \coloneqq \left(a_{ij}\right)$ e $B \coloneqq \left(b_{ij}\right)$ entrambe di tipo (p, q), chiamiamo matrice **somma** di A e B, la matrice di tipo (p, q), che indichiamo con $A+B$, il cui elemento di posto (i,j) è dato dalla somma degli elementi di posto (i,j) delle matrici A e B. Si ha cioè:

$$A+B := \big(c_{ij}\big) \quad \text{con} \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}. \qquad \triangle$$

Notiamo che, per definizione, possiamo sommare solamente matrici che hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, cioè matrici dello stesso tipo.

Esercizio di base 3.2 Date le matrici:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Calcolare la matrice $A'+B'$.

Abbiamo quindi definito l'operazione di **addizione** tra matrici. Il risultato dell'operazione di addizione tra due matrici è la matrice somma.

L'operazione di addizione tra matrici verifica proprietà analoghe alle proprietà dell'addizione tra numeri reali. Ricordiamo innanzitutto queste proprietà.

Proposizione 3.3 *L'addizione tra numeri reali soddisfa le proprietà:*

1. *Proprietà associativa.*

   $(a+b)+c = a+(b+c)$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

2. *Proprietà commutativa.*

   $a+b = b+a$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

3. *Esistenza dello zero.*

   Nell'insieme $\mathbb{R}$ *vi è il numero reale* 0 *che ha la seguente proprietà:*

$$a+0=a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

4. *Esistenza dell'opposto.*

   Dato un qualsiasi numero $a \in \mathbb{R}$, *esiste un numero reale che, sommato ad* a, *dà* 0. *Questo numero è il numero* $-a$, *cioè l'****opposto*** *di* a. *Si ha quindi:*

$$a+(-a)=0.$$

L'operazione di addizione di matrici ha proprietà analoghe:

Proposizione 3.4 *L'addizione tra matrici di* $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ *soddisfa le proprietà:*

1. *Proprietà associativa.*

   $(A+B)+C = A+(B+C)$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$.

2. *Proprietà commutativa.*

   $A + B = B + A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$*,* $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$*.*

3. *Esistenza dello zero.*

   La matrice di tipo (p, q) *avente tutti gli elementi nulli viene indicata con il simbolo* 0 *e chiamata* ***matrice nulla****. La matrice nulla* 0 *ha la seguente proprietà:*

$$A + 0 = A$$

per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$*.*

4. *Esistenza dell'opposto.*

   Data una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$*, esiste una matrice che sommata ad* A *dà la matrice nulla* 0*. Questa matrice è ovviamente la matrice avente come elementi gli opposti degli elementi della matrice* A*. Essa viene indicata con il simbolo* $-A$ *e viene chiamata matrice opposta di* A*. Si ha quindi:*

$$A + (-A) = 0.$$

Notiamo che abbiamo indicato con il simbolo 0 sia il numero reale 0 sia la matrice nulla di tipo (p, q). Inoltre, matrici nulle di dimensioni diverse vengono indicate tutte con il simbolo 0. Di solito ciò non crea confusione. Nel caso in cui ci sia possibilità di confusione, indicheremo con il simbolo $0_{p,q}$ la matrice nulla di tipo (p, q). Dunque, ad esempio:

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella formula $A + 0 = A$ non c'è pericolo di confusione. Lo 0 nella formula indica la matrice nulla di dimensioni uguali alla matrice A e non il numero 0. Non avrebbe infatti senso sommare una matrice con un numero o con una matrice di dimensioni diverse.

Esempio 3.5 Data la matrice:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

la sua matrice opposta è la matrice:

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base 3.6 Dimostrare la proprietà associativa, la proprietà commutativa, la proprietà di esistenza dello zero e la proprietà di esistenza dell'opposto per l'operazione di addizione tra matrici.

Ricordiamo che, dati tre numeri reali a, b e c, siamo soliti scrivere $a + b + c$ senza utilizzare le parentesi. Con il simbolo $a + b + c$ indichiamo $a + (b + c)$ o $(a + b) + c$. La proprietà associativa dell'addizione ci dice che ciò non crea ambiguità. La proprietà associativa è valida anche per l'addizione di matrici.

Date quindi $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, possiamo scrivere $A+B+C$ senza che ciò crei ambiguità.

Vi è un'altra convenzione dei numeri reali che possiamo trasportare alle matrici. Dati $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, con il simbolo $a-b$ indichiamo la somma di a con l'opposto di b. Cioè:

$$a - b := a + (-b).$$

In modo analogo, date $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ poniamo

$$A - B := A + (-B).$$

Sappiamo che per i numeri reali vale la legge di semplificazione rispetto all'addizione.

Proposizione 3.7 *Dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\text{se } a + c = b + c \text{ allora } a = b.$$

Anche questa proprietà può essere trasportata al caso delle matrici. Si ha cioè la:

Proposizione 3.8 *Date tre matrici A, B e C di $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ si ha:*

$$\text{se } A + C = B + C \text{ allora } A = B.$$

*Questa proprietà è nota come legge di **semplificazione** per l'addizione matriciale*

Esercizio di base 3.9 Dimostrare la legge di semplificazione per l'addizione matriciale.

Esercizio di base 3.10 Date le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \triangle$$

calcolare le matrici ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tA + {}^tB$, $A+B$, ${}^t(A+B)$ e notare che vale l'uguaglianza ${}^tA + {}^tB = {}^t(A+B)$.

L'ultima affermazione dell'esercizio di base è vera per ogni coppia di matrici. Si ha cioè la seguente proprietà la cui dimostrazione lasciamo per esercizio al lettore:

Proposizione 3.11 *Date due matrici A e B in $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ si ha:*

$${}^tA + {}^tB = {}^t(A+B).$$

Esercizio di base 3.12 Dimostrare la proposizione 3.11.

3.2 Moltiplicazione per uno scalare

Data una matrice A e un numero reale k, possiamo moltiplicare ogni elemento di A per k. Otteniamo una matrice che indichiamo con kA. Si ha per esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad -5A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ 25 & -35 & -45 \\ 0 & -5 & 35 \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo questa operazione **moltiplicazione** di una matrice per uno scalare.

Esercizio di base 3.13 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

△

Calcolare la matrice $3A$ e verificare che si ha $3A = A + A + A$.

L'operazione di moltiplicazione di una matrice per uno scalare soddisfa le seguenti proprietà la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio:

Proposizione 3.14

1. $h(kA) = (h \cdot k)A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;
2. $(h + k)A = hA + kA$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;
3. $h(A + B) = hA + hB$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio di base 3.15 Dimostrare le proprietà precedenti.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione elementare della

Proposizione 3.16 *Data una matrice A si ha*

1. $1A = A$;
2. $(-1)A = -A$;
3. $0A = 0$.

Osservazione 3.17 Notiamo che nell'ultima formula della proposizione precedente il simbolo 0 indica due cose differenti. Lo 0 a primo membro è il numero reale 0. Lo 0 a secondo membro è la matrice nulla di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$. △

3.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.3.2 Si ha:

$$A' + B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+7 \\ 5+0 & 3+4 \\ 1+1 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

EB.3.6 Dimostriamo innanzitutto la validità della proprietà associativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Per dimostrare che le due matrici sono uguali, dobbiamo dimostrare che esse hanno gli stessi elementi.

Siano $A := \big(a_{ij}\big)$, $B := \big(b_{ij}\big)$, $C := \big(c_{ij}\big)$. Dalla definizione di matrice somma segue immediatamente che l'elemento di posto (i, j) della matrice $A + (B + C)$ è dato da $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Analogamente l'elemento di posto(i, j) della matrice $(A + B) + C$ è dato da $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$. Per i numeri reali è valida la proprietà associativa e quindi si ha:

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

Notiamo che, per dimostrare la proprietà associativa dell'addizione tra matrici, abbiamo sfruttato la definizione di addizione tra matrici e la proprietà associativa dell'addizione tra numeri reali.

Dobbiamo ora dimostrare la proprietà commutativa dell'addizione tra matrici. La dimostrazione è semplice. In essa si utilizza la definizione di addizione tra matrici e la proprietà commutativa dell'addizione tra numeri reali.

Le dimostrazioni della proprietà di esistenza dello zero e della proprietà di esistenza dell'opposto sono analoghe. Evitiamo quindi di scriverle.

EB.3.9 Sia

$$A + C = B + C.$$

Sommiamo ad ambo i membri la matrice $-C$. Otteniamo:

$$A + C + (-C) = B + C + (-C).$$

Poiché si ha $C + (-C) = 0$, otteniamo:

$$A + 0 = B + 0.$$

Sfruttando la proprietà della matrice nulla otteniamo:

$$A = B.$$

EB.3.10 Si ha

$$\begin{aligned}
{}^tA &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
{}^tB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 13 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
{}^tA + {}^tB &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 13 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \\
{}^t(A + B) &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Quindi

$${}^tA + {}^tB = {}^t(A + B).$$

EB.3.12 Per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo verificare che l'elemento di posto (j, i) di ${}^tA + {}^tB$ coincide con l'elemento di posto (j, i) di ${}^t(A + B)$. Sia $A := \big(a_{ij}\big)$ e $B := \big(b_{ij}\big)$. L'elemento di posto (j, i) di ${}^tA + {}^tB$ è la somma dell'elemento di posto (j, i) di ${}^tA$, e cioè a_{ij}, e l'elemento di posto (j, i) di ${}^tB$, e cioè b_{ij}. Dunque l'elemento di posto (j, i) di ${}^tA + {}^tB$ è uguale a $a_{ij} + b_{ij}$.

L'elemento di posto (j, i) di ${}^t(A+B)$ è uguale all'elemento di posto (i, j) di $A+B$: questo è dunque uguale alla somma dell'elemento di posto (i, j) di A, e cioè a_{ij}, e l'elemento di posto (i, j) di B, e cioè b_{ij}. Pertanto l'elemento di posto (j, i) di ${}^t(A+B)$ è uguale a $a_{ij} + b_{ij}$ e coincide quindi con l'elemento di posto (j, i) di ${}^tA + {}^tB$ che abbiamo calcolato in precedenza.

EB.3.13 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

D'altronde si ha:

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

EB.3.15 Le dimostrazioni sono semplici verifiche. Evitiamo quindi di darle.

3.4 Sunto

Addizione tra matrici

Definizione Date $A := \big(a_{ij}\big) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B := \big(b_{ij}\big) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, chiamiamo matrice **somma** di A e B, la matrice di tipo (p, q), che indichiamo con $A+B$, il cui elemento di posto (i, j) è dato dalla somma degli elementi di posto (i, j) delle matrici A e B. Si ha cioè:

$$A + B := \big(c_{ij}\big) \quad \text{con} \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

Abbiamo così definito un'operazione di **addizione** tra matrici. △

Proposizione *L'addizione tra matrici di* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *soddisfa le proprietà:*

1. *Proprietà associativa.*

   $(A + B) + C = A + (B + C)$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

2. *Proprietà commutativa.*

   $A + B = B + A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

3. *Esistenza dello zero.*

   La matrice di tipo (p, q) *avente tutti gli elementi nulli viene indicata con il simbolo* 0 *e chiamata* ***matrice nulla***. *La matrice nulla* 0 *ha la seguente proprietà:*

$$A + 0 = A$$

per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

4. Esistenza dell'opposto.

Data una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, esiste una matrice che sommata ad A dà la matrice nulla 0. Questa matrice è ovviamente la matrice avente come elementi gli opposti degli elementi della matrice A. Essa viene indicata con il simbolo $-A$ e viene chiamata matrice ***opposta*** *di A. Si ha quindi:*

$$A + (-A) = 0.$$

Date le matrici $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, usiamo il simbolo $A + B + C$ per indicare $(A + B) + C$ o anche $A + (B + C)$. La proprietà associativa ci dice che ciò non crea ambiguità.

Date $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ poniamo

$$A - B := A + (-B).$$

Il simbolo $:=$ indica che, per definizione, poniamo $A - B$ uguale a $A + (-B)$.

Proposizione *Date tre matrici A, B e C di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ si ha:*

$$\textit{se } A + C = B + C \textit{ allora } A = B.$$

Questa proprietà è nota come legge di ***semplificazione*** *per l'addizione matriciale*

Proposizione *Date due matrici A e B in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ si ha:*

$${}^tA + {}^tB = {}^t(A + B).$$

Moltiplicazione per uno scalare

Definizione Data una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e un numero $k \in \mathbb{R}$, indichiamo con kA la matrice di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ avente come elementi gli elementi della matrice A moltiplicati per k. Chiamiamo questa operazione in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ **moltiplicazione** di una matrice per uno scalare. $\triangle$

Proposizione

1. $h(kA) = (h \cdot k)A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;

2. $(h + k)A = hA + kA$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;

3. $h(A + B) = hA + hB$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$;

4. $1A = A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$;

5. $(-1)A = -A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$;

6. $0A = 0$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

3.5 Esercizi

E.3.1 Siano date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolare le matrici:

$$A + B, \qquad A + C, \qquad B + C, \qquad A - B, \qquad B - A, \qquad -A - B.$$

E.3.2 Dimostrare che, date $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, si ha:

$$A + C = C \text{ se e solo se } A = 0.$$

E.3.3 Date le matrici $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, dimostrare che si ha:

$$A + B = C \text{ se e solo se } A = C - B.$$

E.3.4 Date le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 13 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

verificare che A, B e $A + B$ sono matrici simmetriche.

E.3.5 Nell'esercizio E.3.4 abbiamo dato l'esempio di due matrici simmetriche la cui somma è anch'essa una matrice simmetrica. In effetti la somma di due matrici simmetriche è sempre una matrice simmetrica. Dimostrare questo fatto.

E.3.6 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

determinare una matrice B di ordine 3 tale che la matrice $A+B$ sia una matrice triangolare superiore.

E.3.7 Data la matrice A dell'esercizio E.3.6, determinare una matrice C tale che la matrice $A + C$ sia simmetrica.

E.3.8 Data la matrice A dell'esercizio E.3.6, verificare che la matrice $A + {}^tA$ è una matrice simmetrica.

E.3.9 Dimostrare che, data $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$, allora:

$$A + {}^tA \in \mathrm{S}(n, \mathbb{R}).$$

E.3.10 Una matrice $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ si dice **antisimmetrica** se i suoi elementi in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale sono uno l'opposto dell'altro. Cioè $A := \left(a_{ij}\right)$ è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni valore di i e j, o, equivalentemente se $A = -{}^tA$. Verificare che, data $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$, allora la matrice $A - {}^tA$ è antisimmetrica.

E.3.11 Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica ha tutti gli elementi della diagonale principale nulli.

E.3.12 Dimostrare che, dati $h \in \mathbb{R}$, $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $A \neq 0$, si ha:

$$\text{se } hA = 0 \text{ allora } h = 0.$$

E.3.13 Dimostrare che ogni matrice quadrata $A \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ si può esprimere come

$$A = U + L$$

dove U è una matrice triangolare superiore e L è una matrice triangolare inferiore.

Si consideri poi la matrice

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici triangolari U e L tali che $A' = U + L$ sono in questo caso determinate univocamente? E se consideriamo la matrice

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}?$$

3.6 Soluzioni degli esercizi

E.3.1 Abbiamo:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$
$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo si calcolano le altre matrici. Si ottiene:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

E.3.2 Sommiamo ad ambo i membri di:

$$A + C = C,$$

la matrice $-C$, otteniamo:

$$A + C - C = C - C.$$

Poiché $C - C = 0$ si ottiene allora $A = 0$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo. Notiamo che la dimostrazione è analoga alla dimostrazione della analoga proprietà dei numeri reali:

$$\text{se } a + c = c \text{ allora } a = 0.$$

Abbiamo dimostrato questo fatto nell'esercizio di base 1.24.

E.3.3 Sommando la matrice $-B$ ad ambo i membri dell'uguaglianza otteniamo ciò che ci è richiesto.

E.3.4 Basta fare la verifica!

E.3.5 Sia $A := (a_{ij})$ una matrice simmetrica. Quindi $a_{ij} = a_{ji}$. Sia $B := (b_{ij})$ una matrice simmetrica. Quindi $b_{ij} = b_{ji}$. Sia $A + B := (c_{ij})$. Dobbiamo dimostrare che si ha $c_{ij} = c_{ji}$. Dalla definizione di somma tra matrici segue:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

Sfruttando il fatto che si ha $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$, otteniamo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}.$$

Abbiamo ottenuto quel che volevamo.

E.3.6 Dobbiamo prendere una matrice

$$B := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

tale che la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+a & 5+b & 3+c \\ 5+d & -3+e & 2+f \\ -1+g & 0+h & 9+i \end{pmatrix}$$

sia una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

dove con $*$ si intendono numeri qualsiasi. Si deve necessariamente avere:

$$d = -5, g = 1 \text{ e } h = 0.$$

Abbiamo quindi che le matrici B verificanti la condizione richiesta sono del tipo:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -5 & * & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

E.3.7 Dobbiamo prendere una matrice

$$C := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

tale che la matrice

$$A + C = \begin{pmatrix} 2+a & 5+b & 3+c \\ 5+d & -3+e & 2+f \\ -1+g & 0+h & 9+i \end{pmatrix}$$

sia simmetrica. Questo equivale a imporre le condizioni:

$$\begin{aligned} 5+d &= 5+b \\ -1+g &= 3+c \\ h &= 2+f \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$b = d, \quad c = g - 4, \quad h = 2 + f.$$

Le matrici cercate sono allora tutte e sole le matrici del tipo:

$$C := \begin{pmatrix} a & d & g-4 \\ d & e & f \\ g & 2+f & i \end{pmatrix},$$

con a, d, e, f, g, i numeri reali qualunque.

E.3.8 Si ha:

$$\begin{aligned} A + {}^tA &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+2 & 5+5 & 3-1 \\ 5+5 & -3-3 & 2+0 \\ -1+3 & 0+2 & 9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si vede che $A + {}^tA$ è simmetrica.

E.3.9 Dobbiamo dimostrare che la matrice $C := A + {}^tA$ è una matrice simmetrica. Sappiamo che una matrice è simmetrica se e solo essa coincide con la sua trasposta. Dimostriamo allora che si ha:

$${}^tC = C.$$

Sappiamo che, per ogni coppia di matrici A e B, si ha ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$. Inoltre per ogni matrice A si ha ${}^t({}^tA) = A$. Sfruttando queste due proprietà si ha:

$${}^tC = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA = C.$$

La penultima uguaglianza deriva dalla proprietà commutativa dell'addizione tra matrici. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

E.3.10 La dimostrazione è analoga a quella data per la soluzione dell'esercizio E.3.9. Non la scriviamo.

E.3.11 Se una matrice $A := \left(a_{ij}\right)$ è antisimmetrica si ha $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni indice i e j. Ma allora, ponendo $i = j$ si ottiene $a_{ii} = -a_{ii}$, da cui segue $a_{ii} = 0$. Gli elementi a_{ii} sono gli elementi della diagonale di A. abbiamo quindi dimostrato quel che volevamo.

E.3.12 Il fatto che $A := \left(a_{ij}\right)$ non sia la matrice nulla implica che almeno un suo elemento è non nullo. Siano allora $\bar{i}$ e $\bar{j}$ indici tali che $a_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$. Essendo hA la matrice nulla, tutti gli elementi di hA sono nulli. In particolare è nullo l'elemento di posto $(\bar{i}, \bar{j})$. Ma allora si ha $ha_{\bar{i}\bar{j}} = 0$. Poiché $a_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$, si deve avere necessariamente $h = 0$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

Si prega di fare attenzione alla dimostrazione. Il fatto che A non sia la matrice nulla **non** implica che tutti i suoi elementi siano non nulli; implica solamente che almeno uno di essi sia non nullo.

E.3.13 Consideriamo una generica matrice $A \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora A può essere espressa come somma di una matrice triangolare superiore e di una matrice triangolare inferiore ad esempio nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo di voler determinare tutte le possibili decomposizioni della matrice A' come somma di una matrice triangolare inferiore e una superiore. Allora si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Sommando le due matrici a secondo membro si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b \\ e & c+f \end{pmatrix}.$$

Vediamo allora che mentre per b ed e abbiamo una sola possibile scelta (cioè $b = -2$ ed $e = 3$), possiamo scegliere a, d, c e f sottostando solo alle condizioni $a + d = 2$, $c + f = 0$. Dunque abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-a & 0 \\ 3 & -c \end{pmatrix}.$$

Per ogni scelta dei valori a e c abbiamo dunque una diversa decomposizione della matrice A' come somma di una matrice triangolare superiore e di una triangolare inferiore. Analogamente la matrice A'' può essere decomposta in molti modi come somma di una matrice triangolare superiore e di una triangolare inferiore:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 4 & -c \end{pmatrix}.$$

Più in generale si può facilmente verificare che ogni matrice quadrata (di qualunque ordine) può scriversi come somma di una triangolare superiore e di una triangolare inferiore in più di una maniera.

CAPITOLO 4

Moltiplicazione tra matrici

Abbiamo definito nel capitolo 3 l'operazione di addizione tra matrici. Ora definiamo l'operazione di moltiplicazione tra matrici. Questa definizione è più complicata della definizione di addizione. La moltiplicazione è molto utile per indicare in modo compatto i sistemi di equazioni lineari. Studieremo poi le proprietà della moltiplicazione tra matrici. Alcune proprietà della moltiplicazione tra numeri reali, per esempio la proprietà associativa, sono valide anche nel caso della moltiplicazione tra matrici, mentre altre, come la proprietà commutativa, non sono conservate.

4.1 Matrice prodotto

Siano date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo costruire, per mezzo di queste, una nuova matrice che indichiamo con $A \cdot B$. Essa è data da:

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 2+0\cdot 4 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3+7\cdot 0 & 8\cdot 2+7\cdot 4 & 8\cdot 1+7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 24 & 44 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vediamo come abbiamo calcolato questa matrice. Innanzitutto la matrice $A \cdot B$ ha 4 righe (come A) e 3 colonne (come B). Per calcolare, per esempio, l'elemento della *quarta riga* e *seconda colonna* della matrice $A \cdot B$, si procede come segue. Si considera la quarta riga di A e la seconda colonna di B:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si moltiplica poi il primo elemento della quarta riga di A per il primo elemento della seconda colonna di B, il secondo elemento della quarta riga di A per il secondo elemento della seconda colonna di B e si sommano poi questi prodotti:

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Per tutti gli altri elementi della matrice prodotto si procede allo stesso modo. Si consiglia di verificare questi calcoli per essere sicuri di aver compreso bene il meccanismo.

Per poter fare questo calcolo, abbiamo sfruttato il fatto che la "lunghezza" delle righe di A è uguale all'"altezza" delle colonne di B. In parole più corrette il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B.

Diamo ora la definizione in generale. Supponiamo di avere una matrice A e una matrice B e che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B. Sia allora $A \coloneqq (a_{ik}) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \coloneqq (b_{kj}) \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$. Il prodotto $A \cdot B$ è una matrice a p righe e r colonne (cioè $A \cdot B$ ha tante righe quante A e tante colonne quante B). Per calcolare l'elemento c_{ij} di posto (i, j) di $A \cdot B$ si considera la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}, \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qj} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix}.$$

Si moltiplica il primo elemento della riga i-esima di A (cioè a_{i1}) per il primo elemento della colonna j-esima di B (cioè b_{1j}), poi si moltiplica il secondo elemento della riga i-esima di A (cioè a_{i2}) per il secondo elemento della colonna j-esima di B (cioè b_{2j}) e così via. Successivamente si sommano i prodotti così ottenuti:

$$c_{ij} \coloneqq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj}.$$

Sintetizziamo questo procedimento nella:

Definizione 4.1 Siano $A \coloneqq (a_{ik}) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \coloneqq (b_{kj}) \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$. La matrice **prodotto** è la matrice $A \cdot B \coloneqq \big(c_{ij}\big) \in \mathrm{M}(p, r, \mathbb{R})$ dove:

$$c_{ij} \coloneqq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj}. \qquad \triangle$$

Abbiamo quindi definito un'operazione di **moltiplicazione** tra matrici. Il risultato dell'operazione di moltiplicazione tra matrici è la matrice prodotto.

Notazione 4.2 In maniera analoga a quanto avviene per il prodotto di numeri reali, d'ora in poi scriveremo (quasi) sempre AB per indicare il prodotto $A \cdot B$. $\triangle$

Nota 4.3 Il prodotto AB di due matrici viene spesso chiamato **prodotto righe per colonne** della matrici A e B, per enfatizzare il modo in cui viene calcolato. $\triangle$

Esercizio di base 4.4 Date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

△

determinare quali dei seguenti prodotti sono definiti e, in caso affermativo, calcolarli: AB, BA, AA, BB.

Esercizio di base 4.5 Date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

△

calcolare AI.

4.2 Matrici e sistemi

Consideriamo il sistema di equazioni:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Indichiamo con A la sua matrice dei coefficienti:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo poi le due matrici:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice X è ottenuta considerando una colonna formata dalle incognite del sistema. La matrice B è ottenuta considerando una colonna formata dai termini noti del sistema. Se ora calcoliamo il prodotto della matrice A per la matrice X otteniamo:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che gli elementi della matrice prodotto AX sono esattamente i polinomi a primo membro delle equazioni che formano il sistema S. Dunque il sistema può essere riscritto nella forma matriciale:

$$AX = B.$$

Più precisamente determinare le soluzioni del sistema S è equivalente a determinare le matrici $\bar{X}$ di $\mathrm{M}(3, 1, \mathbb{R})$ tali che $A\bar{X} = B$. Ad esempio, ponendo

$x_1 = -12$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ le equazioni del sistema S sono entrambe soddisfatte e corrispondentemente se consideriamo la matrice:

$$\bar{X}_1 := \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

si ha (svolgere i calcoli per controllo):

$$A\bar{X}_1 = B.$$

Se, ad esempio, poniamo invece $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ le equazioni del sistema S non sono entrambe soddisfatte e corrispondentemente se consideriamo la matrice:

$$\bar{X}_2 := \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

si ha (svolgere i calcoli per controllo):

$$A\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq B.$$

Questo tipo di argomentazioni si possono applicare a ogni sistema. Consideriamo un sistema di p equazioni in q incognite:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Sia A la **matrice dei coefficienti** del sistema:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Sia X la **matrice colonna delle incognite** del sistema:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Sia B la **matrice colonna dei termini noti** del sistema:

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scrivere il sistema S nella forma matriciale:

$$AX = B.$$

Risolvere il sistema S è allora equivalente a determinare (se esistono) tutte le matrici $\bar{X}$ tali che $A\bar{X} = B$.

Esercizio di base 4.6 Dato il sistema:

$$S\colon \begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 5 \end{cases} \qquad \triangle$$

determinare le sue matrici dei coefficienti, delle incognite e dei termini noti.

4.3 Proprietà della moltiplicazione

Abbiamo definito le operazioni di addizione e di moltiplicazione tra matrici a coefficienti reali. Abbiamo visto che l'addizione tra matrici verifica proprietà analoghe alle proprietà dell'addizione tra numeri reali.

Vediamo se anche per la moltiplicazione avviene la stessa cosa. Iniziamo con l'elencare alcune proprietà della moltiplicazione tra numeri reali e proviamo poi a stabilire se valgono le corrispondenti proprietà per la moltiplicazione tra matrici:

Proposizione 4.7 *La moltiplicazione tra numeri reali soddisfa le proprietà:*

1. *Proprietà associativa.*

   $(ab)c = a(bc)$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

2. *Proprietà commutativa.*

   $ab = ba$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

3. *Esistenza dell'unità.*

   Nell'insieme $\mathbb{R}$ *vi è il numero reale* 1 *che ha la seguente proprietà:*

$$a \cdot 1 = a$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

4. *Esistenza dell'inverso.*

Dato un qualsiasi numero $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, *esiste un numero reale che, moltiplicato per* a, *dà* 1. *Questo numero è il numero* a^{-1}, *cioè l'****inverso*** *di* a. *Si ha quindi:*

$$aa^{-1} = 1.$$

Ci chiediamo ora se valgano corrispondenti proprietà per la moltiplicazione tra matrici. Cominciamo con la proprietà associativa. È vero o falso che date tre matrici A, B e C si ha $(AB)C = A(BC)$? Notiamo che il problema è mal posto. Se infatti è sempre possibile fare il prodotto di due numeri reali, sappiamo che per fare il prodotto di due matrici è necessario che le loro dimensioni soddisfino una condizione ben precisa. Quindi, prima di confrontare i prodotti $(AB)C$ e $A(BC)$ è necessario imporre delle condizioni affinché entrambi questi prodotti siano definiti. Inoltre, nel caso in cui entrambi siano definiti dobbiamo assicurarci (eventualmente imponendo ulteriori condizioni sulle dimensioni delle matrici coinvolte) che le matrici risultato abbiano le stesse dimensioni: a questo punto potremo confrontarle.

Esercizio di base 4.8 Siano date tre matrici A, B e C.

a. Che condizioni devono soddisfare le dimensioni delle matrici A, B e C affinché sia possibile calcolare il prodotto $(AB)C$?

b. Che condizioni devono soddisfare le dimensioni delle matrici A, B e C affinché sia possibile calcolare il prodotto $A(BC)$?

c. Supponendo che si possano calcolare entrambi i prodotti $(AB)C$ e $A(BC)$, le loro dimensioni sono uguali, o perché ciò avvenga è necessario imporre ulteriori condizioni alle dimensioni delle matrici A, B e C? △

Se avete risolto l'esercizio di base precedente, conoscete le condizioni da imporre affinché abbia senso parlare di proprietà associativa. Ovviamente ciò è solo il primo passo, perché poi bisogna verificare se effettivamente i due prodotti $(AB)C$ e $A(BC)$ sono uguali (o eventualmente se sono uguali in alcuni casi e in altri no). Si può dimostrare che i due prodotti sono sempre uguali. La dimostrazione, anche se non difficile concettualmente, è però piuttosto laboriosa e, pertanto, la riportiamo nel paragrafo A.4. Abbiamo dunque la:

Proposizione 4.9 *Date tre matrici* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$*,* $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *e* $C \in \mathrm{M}(r, s, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(AB)C = A(BC).$$

Vale dunque la proprietà associativa della moltiplicazione di matrici.

La proprietà associativa della moltiplicazione ci permette di scrivere il prodotto di tre (o più) matrici senza far uso delle parentesi:

$$ABC.$$

Mettendo infatti in qualsiasi modo le parentesi, si ottiene sempre lo stesso risultato. La proprietà associativa permette inoltre di definire in maniera non ambigua le potenze positive di una matrice quadrata. Più precisamente:

Definizione 4.10 Sia A una matrice quadrata e n un intero positivo. La **potenza n-esima** A^n è così definita:

$$\begin{aligned} A^1 &:= A \\ A^n &:= \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ volte}} \qquad \text{per } n > 0. \end{aligned}$$ △

Esercizio di base 4.11 Date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ △

calcolare $(AB)C$ e $A(BC)$ e verificare che si ottiene il medesimo risultato.

Veniamo ora alla proprietà commutativa. Come nel caso della proprietà associativa, prima di porci il problema dobbiamo assicurarci che la questione abbia senso. Dobbiamo considerare cioè matrici A e B tali che sia possibile fare entrambi i prodotti AB e BA e questi due prodotti siano matrici dello stesso tipo:

Esercizio di base 4.12 Siano date due matrici A e B.

a. Supponendo che si possa fare il prodotto AB, è possibile fare anche il prodotto BA o perché ciò avvenga è necessario imporre ulteriori condizioni alle dimensioni delle matrici A e B?

b. Supponendo che si possano calcolare entrambi i prodotti AB e BA, le loro dimensioni sono uguali, o perché ciò avvenga è necessario imporre ulteriori condizioni alle dimensioni delle matrici A e B? △

Se avete risolto l'esercizio di base precedente, conoscete le condizioni da imporre affinché abbia senso cercare di stabilire la validità della proprietà commutativa. Supponiamo allora di avere due matrici quadrate A e B entrambe di ordine n. In tal caso i prodotti AB e BA sono definiti e sono matrici dello stesso tipo (anch'esse matrici quadrate di ordine n). Ci chiediamo allora se è vero che $AB = BA$.

Prima di cercare una risposta, vediamo di capire bene la domanda. Vogliamo stabilire se è vera o meno una proprietà generale: ci chiediamo cioè se è vero che, date *comunque* $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$, allora $AB = BA$?

Ovviamente le possibili risposte questa domanda sono due: sì, è vero; oppure no, non è vero.

Supponiamo di voler dimostrare che la risposta è "sì". Dobbiamo allora dimostrare che $AB = BA$ *comunque* siano scelte le matrici. Non è quindi sufficiente verificare l'uguaglianza solamente per una particolare scelta delle matrici A e B.

Supponiamo di voler dimostrare che la risposta è "no". La risposta "no" vuol dire che *non sempre* si ha $AB = BA$. Esistono cioè almeno due matrici A e B che non verificano l'uguaglianza $AB = BA$. Per dimostrare che la risposta è "no", è necessario dare un esempio di due matrici A e B non verificanti tale uguaglianza. Un esempio di tal genere si dice **controesempio**. Esso è infatti un esempio che contraddice l'affermazione.

La risposta alla nostra domanda è "no", come mostra il seguente controesempio. Consideriamo le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la moltiplicazione di matrici non soddisfa la proprietà commutativa. È bene notare che ciò non implica che, date comunque A e B, si ha sempre $AB \neq BA$.

Definizione 4.13 Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine diciamo che A e B **commutano** o **permutano** se si ha $AB = BA$. △

Esercizio di base 4.14 Dare qualche esempio di coppie di matrici A e B che commutano (si consiglia di cercare matrici di ordine 2).

Rimandiamo a un capitolo successivo l'analisi delle proprietà matriciali corrispondenti alla proprietà dell'esistenza dell'unità e dell'esistenza dell'inverso.

Sappiamo per ogni numero reale a si ha:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Questa proprietà ha un'ovvia controparte nel caso matriciale. Data una matrice A di tipo (p, q) si ha:

$$\begin{aligned} A0_{q,r} &= 0_{p,r}, \\ 0_{r,p}A &= 0_{r,q}. \end{aligned}$$

Esercizio di base 4.15 Dimostrare la proprietà precedente.

Il prodotto di numeri reali soddisfano un'altra ben nota proprietà:

Proposizione 4.16 (Principio di annullamento del prodotto) *Siano a e b due numeri reali. Se $ab = 0$ allora almeno uno dei numeri a e b è uguale a 0.*

È valida una proprietà analoga per le matrici? È vero cioè che date due matrici A e B tali che $AB = 0$ allora almeno una delle matrici A e B è la matrice nulla? La risposta è no.

Esercizio di base 4.17 Determinare due matrici A e B entrambe non nulle tali che $AB = 0$. Diamo un suggerimento: analizzare gli esempi visti in precedenza.

Sappiamo che per i numeri reali si ha la legge di semplificazione rispetto alla moltiplicazione.

Proposizione 4.18 *Dati $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} - 0$ si ha:*

$$\textit{se } ac = bc \textit{ allora } a = b.$$

È valida una proprietà analoga per le matrici? E vero cioè che se C è una matrice non nulla si ha:

$$\text{se } AC = BC \text{ allora } A = B?$$

La risposta è no. Quindi la moltiplicazione tra matrici **non** gode della proprietà di semplificazione.

Esercizio di base 4.19 Mostrare con un controesempio che non vale la proprietà di semplificazione per la moltiplicazione di matrici.

Sappiamo che le operazioni tra numeri reali soddisfano la proprietà distributiva. Più precisamente:

Proposizione 4.20 *Dati tre numeri reali qualunque a, b e c si ha:*

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Ci chiediamo se valgano proprietà analoghe per le matrici. Vediamo in un esempio cosa succede.

Esercizio di base 4.21 Date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \triangle$$

calcolare $(A+B)C$ e $AC+BC$ e verificare che si ottiene il medesimo risultato.

Ciò che avviene nell'esercizio precedente non è un caso. Abbiamo infatti la:

Proposizione 4.22

1. *Date* A *e* B *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *e* C *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(A+B)C = AC + BC.$$

2. *Data* A *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *e* B *e* C *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Valgono cioè le proprietà distributive delle operazioni matriciali.

La dimostrazione di queste proprietà non è difficile ma richiede di scrivere in dettaglio le operazioni matriciali necessarie: per tale motivo la riportiamo nel paragrafo A.4.

Osservazione 4.23 Abbiamo dato un'unica proprietà distributiva per le operazioni tra numeri reali e due per le operazioni tra matrici. Come mai? Notiamo che dalla relazione tra numeri reali

$$(a+b)c = ac + bc,$$

possiamo dedurre, grazie alla commutatività della moltiplicazione di numeri reali:

$$c(a+b) = ca + cb.$$

Poiché la moltiplicazione tra matrici non è commutativa dobbiamo dare separatamente le due proprietà distributive per le operazioni tra matrici. $\triangle$

Esercizio di base 4.24 Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. È vero o falso che qualunque siano A e B si ha:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2? \qquad \triangle$$

Diamo ora una proprietà che lega la moltiplicazione tra matrici alla moltiplicazione di una matrice per uno scalare:

Proposizione 4.25 *Date le matrici* A *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, B *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *e un numero reale* h *si ha:*

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

La dimostrazione della proprietà precedente è molto semplice, ma come in precedenza omettiamo di scrivere i passaggi necessari.

Esercizio di base 4.26 Dato il numero reale $h = 3$ e le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare $3(AB)$, $(3A)B$ e $A(3B)$ e verificare che si ottiene il medesimo risultato. △

Vogliamo ora vedere come si comporta la moltiplicazione di matrici rispetto alla trasposizione. Si potrebbe pensare che valga una relazione di questo tipo:

$${}^t(AB) = {}^tA{}^tB.$$

Riprendiamo le due matrici con cui abbiamo iniziato il capitolo

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo calcolato il prodotto AB e abbiamo ottenuto una matrice di tipo $(4, 3)$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 24 & 44 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo ora che la matrice ${}^tA$ è una matrice di tipo $(2, 4)$, mentre la matrice ${}^tB$ è una matrice di tipo $(3, 2)$, quindi non si può eseguire il prodotto ${}^tA{}^tB$. Ricordiamo però che avevamo calcolato l'elemento di posto $(4, 2)$ di AB moltiplicando la quarta riga di A per la seconda colonna di B. D'altra parte gli elementi che formano la quarta riga di A formano la quarta colonna di ${}^tA$ e gli elementi che formano la seconda colonna di B formano la seconda riga di ${}^tB$:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque moltiplicare la quarta riga di A per la seconda colonna di B è equivalente a moltiplicare la seconda riga di ${}^tB$ per la quarta colonna di ${}^tA$. Pertanto l'elemento di posto $(4, 2)$ di AB è uguale all'elemento di posto $(2, 4)$ di ${}^tB{}^tA$ (notiamo che questo prodotto si può fare perché ${}^tB$ ha 2 colonne e ${}^tA$ ha 2 righe). Questa uguaglianza può essere verificata calcolando esplicitamente la trasposta di AB:

$${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 3 & 3 \\ 4 & 44 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo esplicitamente gli altri elementi di ${}^tB{}^tA$ si vede che ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. Con un po' di attenzione agli indici si può dimostrare (anche se noi non lo facciamo qui) che questa è una proprietà generale:

Proposizione 4.27 *Date le matrici $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ si ha:*

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA.$$

4.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.4.4 Il prodotto AB è definito perché il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B. Il prodotto BA non è definito perché il numero delle colonne di B non è uguale al numero delle righe di A. Il prodotto AA non è definito perché il numero delle colonne di A non è uguale al numero delle righe di A. Il prodotto BB è definito perché il numero delle colonne di B è uguale al numero delle righe di B.

Per calcolare AB notiamo innanzitutto che dato che A è di tipo $(2,3)$ e B è di tipo $(3,3)$, allora AB è di tipo $(2,3)$. Abbiamo:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 7 + 0\cdot(-3) & 1\cdot 5 + 2\cdot(-1) + 0\cdot(-2) \\ -1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 4\cdot 2 & -1\cdot 1 + 1\cdot 7 + 4\cdot(-3) & -1\cdot 5 + 1\cdot(-1) + 4\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 15 & 3 \\ 7 & -6 & -14 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare ora BB notiamo innanzitutto che dato che il primo fattore (cioè B) è di tipo $(3,3)$ e il secondo fattore (ancora B) è di tipo $(3,3)$, allora BB è di tipo $(3,3)$. Svolgendo i calcoli si trova:

$$BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & -11 \\ -9 & 51 & -10 \\ -1 & -13 & 17 \end{pmatrix}.$$

EB.4.5 Abbiamo:

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0 & 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 & 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

EB.4.6 La matrice dei coefficienti del sistema S è:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

La matrice delle incognite è:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei termini noti è:

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il sistema S viene scritto in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

EB.4.8 Quando si fa il prodotto di due matrici, il numero delle colonne della prima matrice deve essere uguale al numero delle righe della seconda matrice.

a. Per poter eseguire il prodotto $(AB)C$ dobbiamo prima effettuare il prodotto AB, quindi il numero di colonne di A deve essere uguale al numero di righe di B. Dobbiamo poi effettuare il prodotto di AB per C, quindi il numero di colonne di AB deve essere uguale al numero di righe di C. Per definizione di prodotto di matrici, il numero di colonne di AB è uguale al numero di colonne di B, dunque abbiamo che il numero di colonne di B deve essere uguale al numero di righe di C. In conclusione per poter eseguire il prodotto $(AB)C$ il numero di colonne di A e il numero di righe di B devono essere uguali e il numero di colonne di B e il numero di righe di C devono essere uguali.

b. Si ragiona in maniera analoga al caso precedente e si vede che le condizioni da imporre sulle dimensioni di A, B e C affinché sia possibile calcolare il prodotto $A(BC)$ sono le stesse da imporre affinché sia possibile calcolare il prodotto $(AB)C$.

c. Abbiamo visto quali condizioni imporre affinché entrambi i prodotti $(AB)C$ e $A(BC)$ siano definiti. Supponiamo allora che $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(r, s, \mathbb{R})$. Allora AB è una matrice di tipo (p, r) e di conseguenza $(AB)C$ è una matrice di tipo (p, s). Analogamente BC è una matrice di tipo (q, s) e di conseguenza $A(BC)$ è una matrice di tipo (p, s). Dunque $(AB)C$ e $A(BC)$ sono matrici dello stesso tipo e non è necessario imporre ulteriori condizioni alle dimensioni delle matrici A, B e C.

EB.4.11 Si ha:

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

EB.4.12

a. Sappiamo che si può fare il prodotto AB. Dunque $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$. Per poter fare il prodotto BA il numero delle colonne di B (cioè r) deve essere uguale al numero delle righe di A (cioè p). Pertanto, se il prodotto AB è definito non è detto che sia definito anche il prodotto BA.

b. Dal punto precedente sappiamo che per poter fare entrambi i prodotti AB e BA deve essere $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$. In tal caso si ha $AB \in \mathrm{M}(p, p, \mathbb{R})$ e $BA \in \mathrm{M}(q, q, \mathbb{R})$. Affinché le matrici AB e BA siano dello stesso tipo si deve quindi avere $p = q$.

EB.4.14 Un esempio ovvio si ha nel caso $A = B$. Ma vi sono tanti altri casi. Per esempio, le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

commutano per ogni a, b, c e d. Provare per credere.

EB.4.15 Sia $A := \left(a_{ij}\right)$ una matrice di tipo (p, q). Se indichiamo con il simbolo b_{jk} l'elemento di posto (j, k) della matrice $0_{q,r}$ sappiamo che $b_{jk} = 0$ per ogni j e per ogni k. L'elemento di posto (i, k) del prodotto $A0_{q,r}$ è dato dalla formula:

$$a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{iq}b_{qk} = a_{i1} \cdot 0 + \cdots + a_{iq} \cdot 0 = 0.$$

dunque l'elemento di posto (i, k) della matrice $A0_{q,r}$ è uguale a 0 per ogni i e ogni k, vale a dire $A0_{q,r}$ è la matrice nulla.

In modo analogo si dimostra che si ha $0_{r,p}A = 0_{r,q}$.

EB.4.17 Nel mostrare che la moltiplicazione tra matrici non verifica la proprietà commutativa abbiamo considerato le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto che si ha:

$$AB = 0,$$

eppure nessuna delle due matrici A e B è la matrice nulla. Questo è uno dei tanti controesempi possibili.

EB.4.19 Possiamo sfruttare la soluzione dell'esercizio di base 4.17. Abbiamo infatti:

$$AB = 0$$

Ma si ha anche:

$$0B = 0$$

Quindi:

$$AB = 0B$$

eppure $A \neq 0$. Abbiamo dato anche in questo caso uno dei tanti controesempi possibili.

EB.4.21 Si ha:

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}AC + BC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

EB.4.24 Svolgendo i calcoli si ha:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) \\ &= AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2,\end{aligned}$$

e

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2.$$

Dunque vediamo che si ha:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

se e solo se

$$AB = BA$$

cioè se e solo se A e B commutano. Poiché ciò non è sempre vero, ne consegue che la proprietà è, in generale, falsa. Questo ci mostra che le espressioni matriciali non possono essere manipolate esattamente nello stesso modo in cui manipoliamo espressioni di numeri reali, ed è quindi necessaria un po' di attenzione per non incorrere in errori che potrebbero stravolgere completamente il risultato.

EB.4.26 Si ha:

$$\begin{aligned}
3(AB) &= 3\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & -3 & 15\\3 & 0 & 6\end{pmatrix},\\
(3A)B &= \left(3\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 6\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & -3 & 15\\3 & 0 & 6\end{pmatrix},\\
A(3B) &= \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\left(3\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -3 & 3\\3 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & -3 & 15\\3 & 0 & 6\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.5 Sunto

Moltiplicazione tra matrici

Definizione Siano $A := (a_{ik}) \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e $B := (b_{kj}) \in \mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$. La **matrice prodotto** è la matrice $A \cdot B := \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{M}(p,r,\mathbb{R})$ dove:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj}. \qquad \triangle$$

Abbiamo quindi definito un'operazione di **moltiplicazione** tra matrici. Il risultato dell'operazione di moltiplicazione tra matrici è la matrice prodotto.

Notazione In maniera analoga a quanto avviene per il prodotto di numeri reali, d'ora in poi scriveremo (quasi) sempre AB per indicare il prodotto $A \cdot B$.$\triangle$

L'operazione di moltiplicazione tra matrici verifica proprietà analoghe ad alcune proprietà dell'operazione di moltiplicazione tra numeri reali.

Proposizione *Date tre matrici $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(r,s,\mathbb{R})$ si ha:*

$$(AB)C = A(BC).$$

Vale dunque la proprietà associativa della moltiplicazione di matrici.

Proposizione

1. *Date A e B in $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e C in $\mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$ si ha:*

$$(A+B)C = AC + BC.$$

2. *Data A in $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e B e C in $\mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$ si ha:*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Valgono cioè le proprietà distributive delle operazioni matriciali.

Proposizione *Date le matrici A in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, B in $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ e un numero reale h si ha:*

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

Proposizione *Date le matrici $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ si ha:*

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Vi sono poi proprietà della moltiplicazione tra numeri reali che non sono valide nel caso delle matrici. Per esempio, non vale la proprietà commutativa. Infatti se A e B sono due matrici tali che sia definito il prodotto AB, allora:

- il prodotto BA potrebbe non essere definito;
- il prodotto BA potrebbe essere definito ma avere dimensioni diverse da AB;
- il prodotto BA potrebbe essere definito e avere le stesse dimensioni di AB (questo avviene se e solo se A e B sono due matrici quadrate dello stesso ordine): anche in quest'ultimo caso, tuttavia, non è detto che i prodotti AB e BA sono uguali.

Definizione Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine diciamo che A e B **commutano** o **permutano** se si ha $AB = BA$. △

Un'altra proprietà che non vale è il principio di annullamento del prodotto: se A e B sono due matrici tali che $AB = 0$ non è detto che almeno una delle matrici A e B sia nulla.

Egualmente non vale la legge di semplificazione del prodotto: se A, B e C sono matrici tali che $AC = BC$ e $C \neq 0$, non è detto che A sia uguale alla matrice B.

Matrici e sistemi

Dato un sistema di p equazioni in q incognite:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Sia A la **matrice dei coefficienti** del sistema:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Sia X la **matrice colonna delle incognite** del sistema:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Sia B la **matrice colonna dei termini noti** del sistema:

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scrivere il sistema S nella forma matriciale:

$$AX = B.$$

Risolvere il sistema S è allora equivalente a determinare (se esistono) tutte le matrici $\bar{X}$ tali che $A\bar{X} = B$.

4.6 Esercizi

E.4.1 Date le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

verificare che si ha

$$AI = IA = A.$$

E.4.2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $AX = 0$.

E.4.3 Data la matrice A dell'esercizio E.4.2, determinare tutte le matrici Y in $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $YA = 0$.

E.4.4 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $AX = 0$.

E.4.5 Data la matrice A dell'esercizio E.4.4, determinare tutte le matrici Y in $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $YA = 0$.

E.4.6 Data la matrice A dell'esercizio E.4.4, determinare tutte le matrici X in $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $AX = A$.

E.4.7 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $AX = 0$.

E.4.8 Data la matrice A dell'esercizio E.4.7, determinare tutte le matrici Y in $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $YA = 0$.

E.4.9 Data la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ tali che $AX = XA$.

E.4.10 Data una matrice quadrata A e un numero reale h, è vero che si ha sempre
$$(hA)^2 = h^2 A^2?$$

4.7 Soluzioni degli esercizi

E.4.1 Basta svolgere i calcoli. Non li scriviamo.

E.4.2 Sia
$$X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Si ha:
$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Dunque $AX = 0$ se e solo se:
$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
Si vede facilmente che ciò avviene se e solo se $a = b = c = d = 0$, cioè se e solo se X è la matrice nulla.

E.4.3 L'unica matrice verificante la condizione è la matrice nulla.

E.4.4 Le matrici verificanti la condizione sono le matrici:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$
con c e d numeri reali qualsiasi.

E.4.5 Le matrici verificanti la condizione sono le matrici:
$$\begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix}$$
con b e d numeri reali qualsiasi.

E.4.6 Sono le matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$
con c e d numeri reali qualsiasi.

E.4.7 Sono le matrici:
$$\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$
con c e d numeri reali qualsiasi.

E.4.8 Sono le matrici:

$$\begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix}$$

con c e d numeri reali qualsiasi.

E.4.9 Sono le matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

con a e b numeri reali qualsiasi.

E.4.10 Sì. Si ha infatti:

$$(hA)^2 = (hA)(hA) = h(A(hA)) = h(hAA) = h(hA^2) = hhA^2 = h^2A^2.$$

CAPITOLO 5

Determinanti

Nel capitolo 1 abbiamo visto che l'equazione lineare in un'incognita

$$ax = b$$

ha un'unica soluzione se e solo se $a \neq 0$.

Vedremo più avanti che il sistema di due equazioni lineari

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ha un'unica soluzione se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Nel capitolo 4 abbiamo visto che ambedue questi sistemi possono essere scritti nella forma

$$AX = B$$

dove A è la matrice dei coefficienti, X è la matrice delle incognite e B è la matrice dei termini noti.

Nel caso di una equazione in un'incognita si ha:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad X \coloneqq \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}, \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}.$$

Le matrici A, X e B sono quindi matrici di tipo $(1, 1)$.

Nel caso di due equazioni in due incognite si ha:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X \coloneqq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Associamo alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

il numero reale $ad - bc$ che chiamiamo determinante di A e indichiamo con il simbolo $\det A$. Quindi:

$$\det A \coloneqq ad - bc.$$

Possiamo allora parafrasare quanto detto sopra dicendo che un sistema di due equazioni lineari in due incognite ha un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è diverso da 0.

Ritorniamo al caso di un'equazione in un'incognita. Chiamiamo determinante della matrice A dei coefficienti del sistema il suo unico elemento: il numero a. Quindi:

$$\det A := a.$$

Date queste definizioni di determinanti per le matrici di ordine 1 e 2, possiamo dire che un sistema di un'equazione in un'incognita o un sistema di due equazioni in due incognite hanno un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è diverso da 0.

Si possono poi considerare sistemi di tre equazioni in tre incognite. Le loro matrici dei coefficienti sono quadrate di ordine 3. Più in generale si possono considerare sistemi di n equazioni in n incognite. Le loro matrici dei coefficienti sono quadrate di ordine n.

In questo capitolo vediamo come associare a ogni matrice quadrata di ordine n un numero reale, che chiamiamo determinante della matrice, in modo tale che si abbia un risultato analogo a quello visto sopra: un sistema di n equazioni in n incognite ha un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0.

Daremo allora la definizione di determinante di una matrice quadrata e ne studieremo le proprietà.

5.1 Definizione

Vogliamo dare la definizione di determinante di una matrice quadrata di ordine n. Abbiamo già dato questa definizione nei casi $n = 1$ e di $n = 2$. Ricordiamo come:

- Caso $n = 1$.

  Data $A := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, poniamo

$$\det A := a_{11}.$$

Quindi, per esempio, il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

è uguale a 7.

- Caso $n = 2$.

  Data

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

poniamo:

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Spesso, per indicare il determinante di una matrice, si racchiude la matrice tra barre verticali. Cioè, per esempio, data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

si scrive
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$
per indicare il determinante di A, vale a dire:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Esercizio di base 5.1 Calcolare il determinante delle matrici
$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$
△

Prima di dare la definizione del determinante di una matrice di ordine 3 abbiamo bisogno di un'altra definizione.

Definizione 5.2 Data una matrice quadrata di ordine $n > 1$ e dato un suo elemento a_{ij}, definiamo **matrice aggiunta** di a_{ij} la matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Indichiamo questa matrice con il simbolo A_{ij}. △

Data, per esempio, la matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$
si ha:
$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$
e analogamente per le altre tre matrici aggiunte A_{31}, A_{32}, A_{33}.

Consideriamo ora la matrice
$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
si ha:
$$A_{11} = (a_{22}), \quad A_{12} = (a_{21}).$$
Notiamo che la regola per il calcolo del determinante di una matrice di ordine 2 può anche essere data in questo modo: prendere gli elementi della prima riga di A, moltiplicare ognuno di essi per il determinante del suo aggiunto; sommare infine il tutto con segni alternati. In formule:
$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12}.$$

- Caso $n = 3$.

Per definire il determinante di una matrice di ordine 3 generalizziamo il procedimento dato per il determinante delle matrici del secondo ordine: prendere gli elementi della prima riga di A, moltiplicare ognuno di essi per il determinante del suo aggiunto; sommare infine il tutto con segni alternati.

Data quindi la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

poniamo:

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

Abbiamo già definito il determinante delle matrici del secondo ordine. Sappiamo quindi calcolare $\det A_{11}$, $\det A_{12}$, $\det A_{13}$. La definizione che abbiamo dato è quindi perfettamente utilizzabile per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3.

Calcoliamo, per esempio, il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (0 \cdot 7 - 6 \cdot 3) + 5 \cdot (0 \cdot 8 - 4 \cdot 3) = -44. \end{aligned}$$

Possiamo procedere e generalizzare ulteriormente per dare la definizione di determinante per matrici quadrate di ordine qualsiasi.

Definizione 5.3 Sia A una matrice quadrata di ordine n. Chiamiamo **determinante** di A il numero $\det A$ calcolato nel modo seguente:

- Se $n = 1$ e $A = \big(a_{11}\big)$ definiamo:

$$\det A := a_{11}.$$

- Se $n > 1$ e $A = (a_{ij})$ definiamo:

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}. \qquad \triangle$$

Può sembrare, a prima vista, che la definizione appena data sia priva di senso poiché, per definire il determinante, abbiamo fatto uso del determinante stesso. Se osserviamo meglio, notiamo però che, per definire il determinante di una matrice di ordine n, abbiamo fatto uso del determinante di matrici di ordine $n-1$. Così facendo utilizziamo matrici di ordine via via minore fino ad arrivare a matrici di ordine 1. Per tali matrici abbiamo dato la definizione di determinante in maniera esplicita.

Una definizione di questo tipo si dice definizione per **induzione** o **ricorrenza**.

Nella formula che abbiamo utilizzato per definire il determinante di una matrice quadrata di ordine n gli elementi della prima riga della matrice rivestono un ruolo particolare. Per questa ragione viene chiamata formula di **sviluppo del determinante secondo la prima riga**. La formula in questione può essere scritta anche in questo modo:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Esercizio di base 5.4 Calcolare il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

5.2 Proprietà

Ricordiamo come abbiamo definito il determinante di una matrice sviluppandolo secondo la prima riga. Esprimiamolo prima a parole: prendere gli elementi della prima riga di A, moltiplicare ognuno di essi per il determinante del suo aggiunto e per -1 elevato alla somma dei suoi indici; sommare infine il tutto.

Si può dimostrare (si veda il paragrafo A.5) che il determinante di una matrice può essere calcolato anche scegliendo una qualsiasi riga, non necessariamente la prima riga. Il determinante di una matrice può cioè essere calcolato con il seguente procedimento: prendere gli elementi della i-esima riga di A, moltiplicare ognuno di essi per il determinante del suo aggiunto e per -1 elevato alla somma dei suoi indici; sommare infine il tutto. Abbiamo cioè il:

Teorema 5.5 *Sia $A := (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero i compreso tra 1 e n si ha:*

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

*Questa formula viene chiamata formula di **sviluppo del determinante secondo la i-esima riga**.*

Il poter scegliere la riga di sviluppo nel calcolo di un determinante permette spesso di semplificare i calcoli. Abbiamo calcolato, per esempio, il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

sviluppandolo secondo la prima riga. Calcoliamolo di nuovo sviluppandolo secondo la seconda riga:

$$\begin{aligned}\det A = -0\begin{vmatrix}2 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}& \\ = 0 + 4\cdot(1\cdot 7 - 5\cdot 3) - 6\cdot(1\cdot 8 - 2\cdot 3) = -44.&\end{aligned}$$

Notiamo che il fatto che nella seconda riga ci sia un elemento nullo ci ha permesso di evitare di calcolare il determinante di una matrice di ordine 2. Tutto ciò suggerisce di calcolare il determinante di una matrice sviluppandolo secondo una riga che abbia il massimo numero possibile di elementi nulli.

Esercizio di base 5.6 Consideriamo la matrice A data nell'esercizio di base 5.4. Ne abbiamo già calcolato il determinante. Il calcolo ha richiesto molto tempo e molta pazienza. Sviluppare il determinante di A secondo una riga che permetta di fare pochi calcoli.

Esercizio di base 5.7 Calcolare il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

△

Si può dimostrare (si veda il paragrafo A.5) che il determinante di una matrice può essere calcolato anche scegliendo una qualsiasi colonna. Il determinante di una matrice può cioè essere calcolato con il seguente procedimento: prendere gli elementi della j-esima colonna di A, moltiplicare ognuno di essi per il determinante del suo aggiunto e per -1 elevato alla somma dei suoi indici; sommare infine il tutto. Abbiamo cioè il:

Teorema 5.8 *Sia $A := (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero j compreso tra 1 e n si ha:*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Questa formula viene chiamata formula di ***sviluppo del determinante secondo la j-esima colonna****.*

Calcoliamo, per esempio, il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

Poiché la seconda colonna ha molti elementi nulli, ci conviene sviluppare il determinante secondo questa colonna. Si ha:

$$\det A = -0 \det A_{12} + 4 \det A_{22} - 0 \det A_{32} = 4(9 - 10) = -4.$$

Nelle formule di sviluppo del determinante per riga o per colonna in ciascun addendo compare un fattore del tipo $(-1)^{i+j}$. Questo è semplicemente un 1 o un -1. Più semplicemente nelle formule di sviluppo secondo una riga o una colonna si sommano gli addendi a segni alterni partendo con un segno positivo se stiamo sviluppando secondo una riga o colonna dispari, partendo con un segno negativo se stiamo sviluppando secondo una riga o colonna pari.

Abbiamo visto che si può calcolare il determinante di una matrice sviluppandolo secondo una sua qualsiasi riga o colonna. Questo permette di dimostrare facilmente alcune proprietà:

Proposizione 5.9 *Sia A una matrice quadrata.*

1. Se una riga o una colonna di A ha tutti i suoi elementi uguali a 0, allora $\det A = 0$.

2. Se A è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $\det A$ *è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale di A.*

Esercizio di base 5.10 Dimostrare la proposizione precedente.

Nell'esercizio di base 5.1 abbiamo calcolato il determinante di una matrice A e il determinante della sua trasposta. Abbiamo ottenuto $\det A = \det {}^tA$. Ciò è valido per ogni matrice A. Usando il fatto che possiamo sviluppare il determinante indifferentemente secondo una riga o una colonna e che le colonne di ${}^tA$ sono le righe di A è possibile dimostrare (trovate i dettagli nel paragrafo A.5) la:

Proposizione 5.11 *Data una matrice quadrata A, si ha:*

$$\det A = \det {}^tA.$$

Esercizio di base 5.12 Dimostrare che una matrice quadrata di ordine 2 con le righe uguali ha determinante nullo.

Quanto visto nell'esercizio di base 5.12 ha validità generale. Abbiamo infatti la:

Proposizione 5.13 *Una matrice quadrata con due righe o due colonne uguali ha determinante nullo.*

DIMOSTRAZIONE Consideriamo innanzitutto il caso in cui A abbia due righe uguali. Indichiamo con n l'ordine della matrice A.

Abbiamo già trattato il caso in cui $n = 2$ nell'esercizio di base 5.12.

Supponiamo ora che $n = 3$. La matrice A ha due righe uguali fra loro: pertanto le matrici aggiunte degli elementi della riga rimanente (diciamo che questa riga è la i-esima) sono matrici di ordine 2 aventi 2 righe uguali e hanno, per quanto visto in precedenza, determinante nullo. Sviluppando il determinante di A rispetto alla riga i-esima troviamo quindi che il determinante è nullo.

Supponiamo ora che $n = 4$. La matrice A ha due righe uguali fra loro: pertanto le matrici aggiunte degli elementi di una delle righe rimanenti (diciamo che questa riga è la i-esima) sono matrici di ordine 3 aventi 2 righe uguali e hanno, per quanto visto in precedenza, determinante nullo. Sviluppando il determinante di A rispetto alla riga i-esima troviamo quindi che il determinante è nullo.

Ripetendo il ragionamento per valori maggiori di n troviamo quindi che $\det A = 0$.

Se invece A ha due colonne uguali basta osservare che in tal caso ${}^tA$ ha due righe uguali e, pertanto, $\det {}^tA = 0$. Poiché $\det A = \det {}^tA$ otteniamo immediatamente la tesi. ■

Nota 5.14 Nella dimostrazione precedente abbiamo prima considerato un caso iniziale (quello per cui l'ordine della matrice $n = 2$) e poi mostrato come si può passare da un caso al caso successivo. Abbiamo poi concluso la dimostrazione scrivendo in modo (volutamente) un po' sfumato che il ragionamento poi si può ripetere.

Questo tipo di dimostrazione può essere in realtà formalizzata un po' meglio. Supponiamo allora di dover dimostrare una proprietà dipendente da un intero positivo n (nella nostra proposizione precedente la proprietà da dimostrare è "una matrice quadrata di ordine n con $n \geq 2$ avente due righe uguali ha determinante nullo". Si può allora dimostrare tale proprietà per **induzione**[1] sull'intero n procedendo in tal modo:

- si dimostra direttamente il caso iniziale della proprietà (nella nostra proposizione si prova la proprietà per matrici di ordine $n = 2$);

- si suppone poi che la proprietà sia vera per gli interi minori di n e si utilizza questa supposizione (chiamata ipotesi **induttiva** o **di induzione**) per dimostrare la proprietà per l'intero n. Nella nostra proposizione abbiamo supposto di aver dimostrato che matrici di ordine minore di n con due righe uguali abbiano determinante nullo e usato questa proprietà per provare che matrici di ordine n con due righe uguali hanno determinante nullo.

Così facendo la proprietà è dimostrata per ogni n. △

Esempio 5.15 Per chiarire meglio la tecnica di dimostrazione per induzione, dimostriamo un risultato che di per sé non interessa ai fini di questo corso. Vogliamo mostrare che la somma dei numeri interi da 1 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$. Procediamo per induzione su n:

- Consideriamo il caso iniziale $n = 1$. In tal caso la somma dei numeri interi da 1 a 1 è uguale ovviamente a 1. Otteniamo lo stesso risultato calcolando $\frac{1\cdot(1+1)}{2}$. La proprietà è dimostrata per $n = 1$.

- Sia ora $n > 1$. Supponiamo per ipotesi induttiva che la proprietà sia vera per gli interi minori di n: in particolare assumiamo che la proprietà sia vera per l'intero $n-1$, e, dunque, che la somma degli interi da 1 a $n-1$ sia uguale a $\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$ vale a dire $\frac{(n-1)n}{2}$. Per ottenere la somma degli interi da 1 a n basta allora sommare n a tale risultato ottenendo

$$\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{(n-1+2)n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Abbiamo così ottenuto che la somma degli interi da 1 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$, come volevamo. △

[1] Si ricordi che la definizione stessa di determinante (5.3) è stata introdotta per induzione. Il concetto è analogo anche se là lo usavamo per introdurre una definizione e qui per dimostrare un risultato.

Diamo allora di nuovo la dimostrazione della proposizione 5.13 usando in maniera più precisa la tecnica di dimostrazione per induzione

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che A sia una matrice quadrata di ordine n con due righe uguali e procediamo per induzione su n. Abbiamo già trattato il caso in cui $n = 2$ nell'esercizio di base 5.12. Sia allora $n > 2$ e supponiamo che la riga i_1-esima e i_2-esima siano uguali. Sviluppiamo il determinante rispetto a una qualsiasi riga diversa dalla i_1-esima e i_2-esima. Le matrici aggiunte degli elementi di tale riga sono matrici quadrate di ordine $n-1$ con due righe uguali: per ipotesi di induzione hanno determinante nullo e, quindi, utilizzando la formula dello sviluppo si ottiene che $\det A = 0$. ■

Esempio 5.16 Consideriamo le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le matrici A e B si ottengono una dall'altra scambiando fra loro le righe. Calcolandone il determinante abbiamo $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ e $\det B = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$. Dunque le due matrici hanno determinante l'una l'opposta dell'altra. △

Esercizio di base 5.17 Siano A e B due matrici quadrate di ordine 2 che si ottengono una dall'altra scambiando le righe. Provare che $\det A = -\det B$.

Quanto visto nell'esercizio di base 5.17 ha validità generale. Abbiamo infatti la:

Proposizione 5.18 *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora $\det A = -\det B$. Un'analoga proprietà vale per lo scambio di colonne.*

DIMOSTRAZIONE Abbiamo già trattato il caso in cui $n = 2$ nell'esercizio di base 5.17. Sia allora $n > 2$ e supponiamo che la riga i_1-esima e i_2-esima di A e B siano scambiate fra loro (e le altre righe siano uguali). Sviluppiamo il determinante sia di A che di B rispetto a una qualsiasi riga diversa dalla i_1-esima e i_2-esima: gli elementi di questa riga sono uguali fra loro nelle due matrici mentre le matrici aggiunte di questi elementi sono matrici quadrate che si ottengono scambiando fra loro due righe: per ipotesi di induzione hanno determinante opposto e, quindi, $\det A = -\det B$.

Per lo scambio di colonne si può ragionare in modo analogo o passare alle matrici trasposte. ■

Esempio 5.19 Vogliamo calcolare il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che scambiando fra loro la seconda e la quarta riga di A otteniamo la matrice triangolare inferiore

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale ed è, dunque, uguale a $2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 30$. Pertanto $\det A = -\det B = -30$. △

Esercizio di base 5.20 Date le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

verificare che si ha $\det(AB) = \det A \det B$. △

Anche in questa occasione ciò che è avvenuto nell'esercizio di base 5.20 non è un caso. Si ha infatti il teorema (la cui dimostrazione può essere trovata nel paragrafo A.5):

Teorema 5.21 (di Binet) *Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B si ha:*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Esercizio di base 5.22 Date le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dimostrare che non esiste alcuna matrice $X \in \mathrm{M}(3, 3, \mathbb{R})$ tale che $AX = I$. Suggerimento: calcolare $\det A$ e $\det I$ e utilizzare il teorema di Binet. △

Ci chiediamo ora se date $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ si ha:

$$\det(A + B) = \det A + \det B?$$

La risposta è in generale negativa. Diamo infatti un controesempio. Consideriamo le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\det A = -3, \quad \det B = -1, \quad \det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B.$$

Ovviamente potranno esistere delle matrici quadrate A e B dello stesso ordine per cui si ha $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Data una matrice quadrata A e uno scalare k cosa possiamo dire del determinante della matrice kA? Iniziamo a considerare il prossimo esercizio di base.

Esercizio di base 5.23 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

△

calcolare il determinante delle matrici A, $2A$, $5A$ e $-7A$.

La soluzione dell'esercizio di base 5.23 mostra che in generale non vale una formula del tipo:

$$\det(kA) = k \det A.$$

Un'analisi più approfondita della soluzione dell'esercizio di base 5.23 suggerisce che per le matrici di ordine 2 possa valere una formula del tipo:

$$\det(kA) = k^2 \det A.$$

Esercizio di base 5.24 Dimostrare che, data una matrice A di ordine 2 e un numero reale k, si ha:

$$\det(kA) = k^2 \det A.$$

△

Cosa succede in generale per una matrice di ordine n? Può essere utile risolvere prima l'esercizio di base seguente:

Esercizio di base 5.25 Sia A una matrice quadrata di ordine n e k un numero reale. Sia B la matrice che si ottiene da A moltiplicando per k gli elementi di una qualsiasi riga di A. Si ha allora:

$$\det B = k \det A.$$

△

Utilizzando il precedente esercizio di base si dimostra facilmente la:

Proposizione 5.26 *Sia A una matrice quadrata di ordine n e k un numero reale. Si ha allora:*

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

Dimostrazione La matrice kA si può ottenere dalla matrice A moltiplicando la prima riga di A per k, poi moltiplicando la seconda riga della matrice così ottenuta per k e così via. Le matrici che via via otteniamo hanno determinante uguale al determinante della matrice precedente moltiplicato per k. Dunque alla fine otteniamo il risultato cercato. ■

È possibile generalizzare la proposizione 5.13

Proposizione 5.27 *Se una matrice quadrata A ha una riga che è multipla di un'altra, allora $\det A = 0$. Un'analoga proprietà vale per le colonne.*

Dimostrazione Se la i-esima riga di A è uguale alla riga j-esima moltiplicata per k, consideriamo la matrice B che si ottiene da A sostituendo alla riga i-esima la riga j-esima. La matrice B ha la i-esima a la j-esima righe uguali e, quindi, per la proposizione 5.13 si ha $\det B = 0$. Notiamo che la matrice A si ottiene dalla matrice B moltiplicando per k la riga i-esima e, perciò, per l'esercizio di base 5.25, si ha $\det A = k \det B = k \cdot 0 = 0$.

La corrispondente proprietà per le colonne si prova in maniera analoga oppure passando alla trasposta di A. ■

Esempio 5.28 Si consideri la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & -24 & 13 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -12 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la quarta riga di A è $-\frac{3}{2}$ la seconda. Dunque $\det A = 0$. $\triangle$

5.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.5.1 Si ha:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 7 = -27,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -27.$$

Notiamo che si ha $\det A = \det {}^tA$. Ritorneremo su questo argomento alla fine del prossimo paragrafo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 4 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 0.$$

EB.5.4 Abbiamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo quindi calcolare il determinante di quattro minori di ordine 3. Calcoliamoli separatamente. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -3(2 \cdot 2 - 3 \cdot 6) = 42,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -15,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3(4 \cdot 6 - 2 \cdot 1) = 66.$$

Possiamo completare il calcolo del determinante della matrice A:

$$\det A = 2 \cdot 42 - 3 \cdot (-15) + 5 \cdot 0 - 7 \cdot 66 = -333.$$

Finalmente abbiamo finito. Il calcolo è stato molto laborioso. Notiamo che, dopotutto, il calcolo è stato alleggerito dal fatto che nella matrice vi erano molti elementi nulli. Non osiamo pensare cosa sarebbe stato il calcolo se non vi fossero stati molti elementi nulli. Il prossimo paragrafo mostrerà alcune proprietà del calcolo del determinante che permetteranno di rendere il calcolo più veloce.

EB.5.6 La seconda riga di A ha un solo elemento non nullo. Calcoliamo allora il determinante di A sviluppandolo secondo la seconda riga. Abbiamo:

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3(2(2 \cdot 2 - 3 \cdot 6) - 3(4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 7(4 \cdot 6 - 2 \cdot 1)) = -333.$$

EB.5.7 Abbiamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = 40.$$

Notiamo che nei primi due passaggi abbiamo sviluppato lungo l'ultima riga.

EB.5.10

1. Se la i-esima riga di A è nulla, sviluppiamo il determinante di A rispetto alla i-esima riga: tutti gli addendi sono nulli, e quindi $\det A = 0$. Analogamente, se la j-esima colonna di A è nulla, si sviluppa il determinante secondo la j-esima colonna.

2. Se $A := (a_{ij})$ è una matrice triangolare superiore di ordine n, allora notiamo che tutti gli elementi della prima colonna di A tranne eventualmente a_{11} sono nulli. Sviluppando il determinante di A rispetto alla prima colonna si ha:

$$\det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Il minore A_{11} è anch'esso una matrice triangolare superiore. Si sviluppi il suo determinante rispetto alla prima colonna. Si ottiene quindi:

$$\det A = a_{11} a_{22} \det B$$

dove B la matrice ottenuta data dalle ultime $n-2$ righe e colonne di A. Anche la matrice B è triangolare superiore. Si prosegue poi in questo modo e si trova:

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

La dimostrazione nel caso di matrici triangolari inferiori è analoga. In questo caso si sviluppa sempre rispetto alla prima riga.

EB.5.12 È semplicissimo: se $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$ calcolando direttamente il determinante otteniamo $\det A = ab - ba = 0$.

EB.5.17 Se $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che $B = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$. Dunque abbiamo $\det A = ad - bc$ e $\det B = cb - da$, cioè $\det A = -\det B$.

EB.5.20 Basta fare i calcoli: si ottiene $\det(AB) = \det A \det B = -64$.

EB.5.22 Abbiamo:

$$\det A = 0 \quad \text{e} \quad \det I = 1.$$

Se esistesse una matrice X tale che $AX = I$, si dovrebbe avere:

$$\det(AX) = \det I = 1.$$

Ma, applicando il teorema di Binet, otteniamo:

$$\det(AX) = \det A \det X = 0 \det X = 0,$$

in contraddizione con quanto visto prima. Non esiste quindi alcuna matrice X verificante la condizione richiesta.

EB.5.23 Si ha:

$$\det A = 2, \quad \det(2A) = 8, \quad \det(5A) = 50, \quad \det(-7A) = 98.$$

EB.5.24 Sia

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da cui

$$kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$\det(kA) = (ka)(kd) - (kb)(kc) = k^2(ad - bc) = k^2 \det A.$$

EB.5.25 Consideriamo la matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Consideriamo la matrice B che si ottiene moltiplicando per k la i-esima riga di A:

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante di B secondo la i-esima riga otteniamo:

$$\det B = (-1)^{i+1} k a_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{i+2} k a_{i2} \det B_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} k a_{in} \det B_{in}.$$

Notiamo che le matrici aggiunte degli elementi della i-esima riga di B sono uguali alle matrici aggiunte degli elementi della i-esima riga di A, si ha cioè $A_{i1} = B_{i1}$, $A_{i2} = B_{i2}$, etc. Dunque si ha:

$$\begin{aligned} \det B &= (-1)^{i+1} k a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} k a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} k a_{in} \det A_{in} \\ &= k((-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}) \\ &= k \det A. \end{aligned}$$

5.4 Sunto

Definizione di determinante

Definizione Data una matrice quadrata di ordine $n > 1$ e dato un suo elemento a_{ij}, definiamo **matrice aggiunta** di a_{ij} la matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Indichiamo questa matrice con il simbolo A_{ij}. △

Definizione Sia A una matrice quadrata di ordine n. Chiamiamo **determinante** di A il numero $\det A$ calcolato nel modo seguente:

- Se $n = 1$ e $A = \big(a_{11}\big)$ definiamo:

$$\det A \coloneqq a_{11}.$$

- Se $n > 1$ e $A = (a_{ij})$ definiamo:

$$\det A \coloneqq a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}. \qquad \triangle$$

Altre formule per il calcolo del determinante

Teorema *Sia $A \coloneqq (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero i compreso tra 1 e n si ha:*

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

Questa formula viene chiamata formula di ***sviluppo del determinante secondo la i-esima riga****.*

Teorema *Sia $A \coloneqq (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero j compreso tra 1 e n si ha:*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Questa formula viene chiamata formula di ***sviluppo del determinante secondo la j-esima colonna****.*

Proprietà del determinante

Proposizione *Data una matrice quadrata A, si ha:*

$$\det A = \det {}^t\!A.$$

Teorema (di Binet) *Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B si ha:*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

È da notare che, in generale, si ha:

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Proposizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n e k un numero reale. Si ha allora:*

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

Proposizione *Sia A una matrice quadrata.*

1. Se una riga o una colonna di A ha tutti i suoi elementi uguali a 0, allora $\det A = 0$.

2. Se A è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $\det A$ *è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale di A.*

Proposizione *Una matrice quadrata con due righe o due colonne uguali ha determinante nullo.*

Proposizione *Se una matrice quadrata A ha una riga che è multipla di un'altra, allora* $\det A = 0$. *Un'analoga proprietà vale per le colonne.*

Proposizione *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora* $\det A = -\det B$. *Un'analoga proprietà vale per lo scambio di colonne.*

5.5 Esercizi

E.5.1 Calcolare il determinante delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.5.2 Calcolare il determinante delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & d \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

E.5.3 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

calcolare il determinante della matrice A e il determinante della matrice $A + {}^tA$.

E.5.4 Calcolare il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

E.5.5 Calcolare il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & \log 3 \end{pmatrix}.$$

L'esercizio può essere risolto con pochissimi calcoli.

5.6 Soluzioni degli esercizi

E.5.1 Si ha:

$$\begin{array}{lll} \det A = 0, & \det B = 2, & \det C = 4, \\ \det D = -4, & \det E = 0, & \det F = -90. \end{array}$$

E.5.2 Si ha:

$$\det A = -cef, \quad \det B = -abc, \quad \det C = -abc.$$

E.5.3 Si ha:

$$\det A = -47 \quad \text{e} \quad \det(A + {}^t A) = -1274.$$

E.5.4 Si ha $\det A = 36$.

E.5.5 Osserviamo che nella prima colonna di A tutti gli elementi, a parte quello in posizione $(1,1)$, sono nulli. Conviene allora sviluppare il determinante di A secondo questa colonna e ottenere:

$$\det A = 5 \begin{vmatrix} \pi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & \log 3 \end{vmatrix}.$$

Possiamo ora proseguire sviluppando il determinante così ottenuto secondo la prima colonna e trovare:

$$\det A = 5\pi \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & \log 3 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ancora rispetto alla prima colonna si ha:

$$\det A = 10\pi \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & \log 3 \end{vmatrix}.$$

Dal momento che tutti gli elementi della prima riga tranne il primo sono nulli conviene sviluppare secondo la prima riga e ottenere:

$$\det A = 20\pi \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & \log 3 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ancora secondo la prima riga troviamo:

$$\det A = 40\pi \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \log 3 \end{vmatrix} = 40\pi \log 3.$$

Ricordiamo che, in ciascun passaggio, possiamo sviluppare il determinante rispetto a una qualsiasi riga o colonna (non necessariamente la prima). Usualmente è meglio scegliere una riga o colonna in cui molti elementi sono uguali a 0.

CAPITOLO 6

Matrice inversa

Abbiamo introdotto l'operazione di moltiplicazione di matrici. Abbiamo visto che tale operazione verifica alcune proprietà analoghe alle proprietà della moltiplicazione di numeri reali, come, per esempio, la proprietà associativa, mentre altre proprietà non sono verificate, come, per esempio, la proprietà commutativa.

Consideriamo ora la seguente proprietà dei numeri reali: dato un numero reale $a \neq 0$, esiste un numero reale b tale che $ab = 1$. Tale numero b non solo esiste, ma è anche unico. Esso viene indicato con il simbolo a^{-1} e viene chiamato **inverso** di a.

Ci chiediamo ora se valga una proprietà analoga per le matrici. Per rispondere a questa domanda dobbiamo capire innanzitutto se esiste una matrice corrispondente al numero 1 in $\mathbb{R}$. Mostreremo che esiste una matrice, che indichiamo con I e chiamiamo matrice unità, che verifica proprietà analoghe alle proprietà che caratterizzano il numero 1. Ci chiediamo allora se data una matrice quadrata A, con $A \neq 0$, esiste una matrice quadrata B, tale che $AB = I$? Mostreremo che la risposta è in generale negativa. Se però il determinante della matrice A è non nullo, la risposta è affermativa. Questa matrice B viene indicata con il simbolo A^{-1} e viene chiamata matrice inversa della matrice A. Studieremo le proprietà della matrice inversa e utilizzeremo le proprietà della matrice inversa per dimostrare che un sistema di n equazioni lineari in n incognite, la cui matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, ha una e una sola soluzione.

6.1 Matrice unità

Nell'introduzione abbiamo detto che dobbiamo cercare una matrice che abbia le stesse proprietà del numero 1. Il numero reale 1 è caratterizzato dalla proprietà che $a1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Vediamo se esiste una matrice verificante una proprietà analoga.

Cerchiamo una matrice I tale che $AI = A$ per ogni matrice A. In questo modo il problema è però posto male: infatti, supponendo di aver trovato la matrice I cercata, il prodotto AI non è definito per tutte le matrici A, ma solo per quelle il cui numero di colonne è uguale al numero di righe di I. Poniamo meglio il problema: cerchiamo una matrice I tale che $AI = A$ per ogni matrice A il cui numero di colonne sia uguale al numero delle righe di I. Se allora I è una matrice a q righe e r colonne, vogliamo che $AI = A$ per tutte le matrici A con p righe e q colonne. In tal caso AI è una matrice a p righe e r colonne: affinché sia uguale ad A deve (quantomeno) avere le stesse dimensioni di A, cioè deve essere $q = r$, vale a dire I deve essere una matrice quadrata. Possiamo allora porre il nostro problema in una forma ancora più precisa: cerchiamo una matrice quadrata I di ordine n tale che $AI = A$ per tutte le matrici A con n colonne. Poiché non c'è motivo di limitarsi a un solo valore di n, possiamo precisare ancora meglio il nostro problema: per ogni intero positivo n cerchiamo una matrice quadrata I_n di ordine n tale che $AI_n = A$ per tutte le matrici A con n colonne.

Torniamo per un attimo ai numeri reali: sappiamo che il numero reale 1 è anche caratterizzato dal fatto che $1a = a$ per ogni numero reale a. Non avevamo scritto esplicitamente questa proprietà perché la moltiplicazione di numeri reali soddisfa la proprietà commutativa e quindi $a1 = a$ implica $1a = a$. La moltiplicazione di matrici non è però commutativa, quindi chiediamo che le matrici I_n che stiamo cercando soddisfino l'ulteriore proprietà che $I_nB = B$ per tutte le matrici B con n righe. Le matrici che stiamo cercando esistono:

Definizione 6.1 Chiamiamo **matrice unità** o **matrice identica** di ordine n la matrice quadrata I_n avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0 (la matrice identica è, quindi, una matrice diagonale). Dunque:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$\triangle$

Dobbiamo ora verificare che la matrice identica così definita risponda effettivamente al problema che ci eravamo posti:

Proposizione 6.2 *Per ogni matrice A con n colonne si ha:*

$$AI_n = A.$$

Per ogni matrice B con n righe si ha:

$$I_nB = B.$$

Dimostrazione Dimostriamo la prima parte. Sia allora A una matrice di $\mathrm{M}(p, n, \mathbb{R})$. Calcoliamo l'elemento di posto (i, j) della matrice AI_n. Per far ciò dobbiamo considerare la i-esima riga della matrice A e la j-esima colonna della matrice I_n:

$$AI_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & \dots\dots & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & & \dots\dots & & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare l'elemento di posto (i, j) di AI_n dobbiamo moltiplicare gli elementi della i-esima riga di A per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di I_n e sommare poi i prodotti così ottenuti. L'unico elemento non nullo della j-esima colonna di I_n è il j-esimo che è uguale a 1. Moltiplicando questo elemento per il j-esimo elemento della i-esima riga di A (cioè a_{ij}) otteniamo come risultato a_{ij}. Dunque, l'elemento di posto (i, j) di AI_n è a_{ij}, cioè è uguale all'elemento di posto (i, j) di A: ma questo significa che $AI_n = A$.

La dimostrazione della seconda parte è analoga. ■

Esercizio di base 6.3 Completare la dimostrazione della proposizione 6.2.

Si può anche dimostrare (noi non lo facciamo) che la matrice I_n è l'unica che soddisfa le proprietà date dalla proposizione 6.2.

Notazione 6.4 Nel seguito useremo semplicemente il simbolo I per indicare la matrice identica quale che sia la sua dimensione. Useremo il simbolo I_n solo quando ci sia pericolo di confusione sull'ordine della matrice identica considerata. △

6.2 Matrice inversa

Ora che abbiamo dato un senso alla nozione di elemento neutro rispetto al prodotto di matrici, possiamo chiederci se esista una proprietà corrispondente all'esistenza dell'inverso. Più precisamente consideriamo l'insieme delle matrici quadrate di un dato ordine n: data una matrice $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ ci chiediamo se esista una matrice $B \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ tale che $AB = I$ e $BA = I$. Osserviamo che, poiché la moltiplicazione tra matrici non è commutativa, dobbiamo richiedere separatamente che AB e BA siano uguali a I perché, a priori, potrebbe essere verificata una sola delle due relazioni (in realtà si potrebbe dimostrare che se A e B sono due matrici quadrate dello stesso ordine tali che $AB = I$ allora necessariamente anche $BA = I$). Come nel caso del prodotto di numeri reali dobbiamo quantomeno richiedere che A non sia la matrice nulla, altrimenti, qualunque sia B, avremmo $AB = 0$ e $BA = 0$: in nessun caso possiamo ottenere la matrice identica. Ci chiediamo se la condizione che $A \neq 0$ sia, oltre che necessaria, anche sufficiente. Per rispondere a questa domanda notiamo innanzitutto che:

$$\det I = 1.$$

Esercizio di base 6.5 Dimostrare quest'ultima affermazione.

Dunque, se $\det A = 0$, non esiste alcuna matrice B tale che $AB = I$, perché, altrimenti, per il teorema di Binet (vedere 5.21) avremmo:

$$\det I = \det(AB) = \det A \det B = 0 \det B = 0.$$

Per assicurare l'esistenza dell'inversa di A non è allora sufficiente richiedere che la matrice A sia non nulla. Dunque esisteranno matrici dotate di inversa e matrici non dotate di inversa. Ciò ci porta a dare la:

Definizione 6.6 Una matrice quadrata A si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine di A tale che $AB = BA = I$. Indichiamo con $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine n. La notazione deriva dal fatto che questo insieme viene chiamato **gruppo lineare**. △

Possiamo allora dire che le matrici con determinante nullo non sono invertibili, ma al momento non sappiamo stabilire se una matrice con determinante non nullo sia invertibile o meno (più avanti vedremo che le matrici con determinante non nullo sono tutte invertibili).

Vorremmo ora introdurre il concetto di matrice inversa di una matrice invertibile A: analogamente a quanto fatto per i numeri reali ci verrebbe spontaneo dire che l'inversa di A è la matrice B tale che $AB = BA = I$. Se però esistesse un'altra matrice C tale che $AC = CA = I$, quale matrice chiameremmo inversa di A, la matrice B o la matrice C? Fortunatamente questo caso non può sussistere:

Proposizione 6.7 *Se A è una matrice invertibile e B e C sono due matrici tali che $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, allora $B = C$.*

Dimostrazione Sappiamo che $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$. Calcoliamo ora il prodotto CAB:

$$CAB = (CA)B = IB = B.$$

D'altra parte:

$$CAB = C(AB) = CI = C.$$

Dunque CAB è uguale sia a B che a C: ma allora B e C sono la stessa matrice. ■

Grazie alla proposizione 6.7 possiamo allora dare la:

Definizione 6.8 Data una matrice invertibile A si chiama **inversa** di A l'unica matrice B tale che $AB = BA = I$. Tale matrice viene indicata con il simbolo A^{-1}. △

Diamo ora un risultato che permette di stabilire se una matrice è invertibile e, in caso affermativo, permette di calcolarne esplicitamente l'inversa. Abbiamo infatti il:

Teorema 6.9 *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso, detto n l'ordine di A, la matrice inversa di A si calcola nel modo seguente:*

- *se $n = 1$ e $A := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} \end{pmatrix}$;*

- *se $n > 1$ l'elemento b_{ij} di posto (i, j) della matrice A^{-1} è dato dalla formula:*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

La dimostrazione di questo teorema è data nel paragrafo A.6.

Quindi, se $n > 1$, per calcolare l'elemento di posto (i, j) di A^{-1}, consideriamo il determinante dell'aggiunta dell'elemento di posto (j, i) di A (attenzione all'inversione degli indici), lo dividiamo per il determinante di A (che è non nullo) e moltiplichiamo il risultato per -1 elevato alla somma degli indici. Notiamo che il fattore $(-1)^{i+j}$ vale $+1$ o -1 a seconda che la somma degli indici sia pari o dispari. Questo è forse reso più chiaro dallo schema a scacchiera:

$+$	$-$	$+$	$\cdots$
$-$	$+$	$-$	$\cdots$
$+$	$-$	$+$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Esempio 6.10 Consideriamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det A = 3$. La matrice è quindi invertibile. Per determinare l'inversa utilizziamo le formule che abbiamo appena dato. Otteniamo:

$$\begin{aligned} b_{11} &= (-1)^{1+1} \frac{\det A_{11}}{\det A} = \frac{3}{3} = 1, \\ b_{12} &= (-1)^{1+2} \frac{\det A_{21}}{\det A} = -\frac{2}{3}, \\ b_{21} &= (-1)^{2+1} \frac{\det A_{12}}{\det A} = -\frac{0}{3} = 0, \\ b_{22} &= (-1)^{2+2} \frac{\det A_{22}}{\det A} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base 6.11 Verificare, nel caso particolare dell'esempio 6.10, che si ha effettivamente $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Esempio 6.12 Cerchiamo ora, se esiste, l'inversa della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $\det A = 5$. La matrice A è quindi invertibile. Abbiamo:

$$b_{11} = (-1)^{1+1}\frac{\det A_{11}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5}$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2}\frac{\det A_{21}}{\det A} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1}\frac{\det A_{12}}{\det A} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2}{5}$$

△

Esercizio di base 6.13 Completare i calcoli dell'esempio 6.12.

6.3 Proprietà dell'inversa

Sappiamo che dato un numero reale non nullo a l'inverso dell'inverso di a è ancora a. In simboli:

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Ci chiediamo se valga una proprietà analoga per le matrici invertibili. Data una matrice invertibile A ci chiediamo cioè se sia vero che A^{-1} sia una matrice invertibile e che $(A^{-1})^{-1} = A$. Come facciamo a verificare questo fatto? È molto semplice: notiamo che date due matrici A e B, per verificare che B è l'inversa di A è sufficiente calcolare i prodotti AB e BA e verificare che sono entrambi uguali alla matrice identica. Per mostrare che A è l'inversa di A^{-1} è allora sufficiente calcolare i due prodotti $A^{-1}A$ e AA^{-1} e verificare che sono uguali a I. Ricordiamo però che noi già sappiamo che A^{-1} è l'inversa di A e quindi sappiamo che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Ma questi sono esattamente i due prodotti che dovevamo calcolare. Abbiamo così dimostrato la:

Proposizione 6.14 *L'inversa di una matrice invertibile A è una matrice invertibile. Si ha:*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Nella dimostrazione della proposizione precedente non è stato necessario utilizzare il fatto che il determinante della matrice A fosse non nullo, né, tantomeno, la formula che ci permette di calcolare esplicitamente l'inversa di una matrice con determinante non nullo. Data una matrice invertibile A viene spontaneo chiedersi cosa si può dire del determinante di A^{-1}. Poiché $AA^{-1} = I$ e $\det I = 1$, dal teorema di Binet (5.21) si ha:

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

Abbiamo dunque la:

Proposizione 6.15 *Se A è una matrice invertibile (e quindi $\det A \neq 0$) si ha:*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Sappiamo che dati due numeri reali a e b diversi da 0, il loro prodotto è diverso da 0 e si ha:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

Ci chiediamo se possiamo dire qualcosa di simile per le matrici invertibili. Siano allora A e B due matrici invertibili dello stesso ordine: è vero che il prodotto AB è invertibile e che l'inversa di AB è $A^{-1}B^{-1}$? Notiamo che se diamo risposta positiva alla seconda domanda abbiamo automaticamente risposta affermativa anche alla prima domanda. Come possiamo stabilire se l'inversa di AB è $A^{-1}B^{-1}$? Ricordiamo innanzitutto come possiamo procedere per dimostrare l'analoga proprietà per i numeri reali. Dati a e b invertibili (cioè non nulli), per provare che l'inverso di ab è $a^{-1}b^{-1}$ basta fare il prodotto di ab per $a^{-1}b^{-1}$ e verificare che si ottiene 1:

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Vediamo se funziona un risultato analogo per le matrici:

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}).$$

Il prodotto di matrici non è commutativo: non possiamo quindi cambiare di posto B e A^{-1}. Non dobbiamo però perderci d'animo: questo tentativo può suggerirci come aggiustare le cose. Proviamo allora a moltiplicare AB per la matrice $B^{-1}A^{-1}$:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

In modo analogo si dimostra che si ha:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I.$$

Abbiamo dunque dimostrato la:

Proposizione 6.16 *Date due matrici invertibili A e B dello stesso ordine, anche il prodotto AB è invertibile e si ha:*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Consideriamo ora una matrice invertibile A. Ci chiediamo se la sua trasposta è invertibile. Vale allora la:

Proposizione 6.17 *Data una matrice invertibile A, la sua trasposta ${}^tA$ è invertibile e si ha:*

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Ciò ci permette di usare il simbolo ${}^tA^{-1}$ senza ambiguità.

Esercizio di base 6.18 Dimostrare la proposizione 6.17.

Nel capitolo 4 abbiamo visto che la proprietà di semplificazione per il prodotto tra numeri reali non si estende al caso delle matrici. Cioè, data una matrice non nulla $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e due matrici $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$, e $C \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ tali che $AB = AC$ non è detto che $B = C$.

A pensarci bene ciò non ci stupisce più molto. Proviamo infatti a dimostrare la proprietà di semplificazione nel caso dei numeri reali. Supponiamo allora che a, b e c siano numeri reali con $a \neq 0$ e tali che $ab = ac$. Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per a^{-1} otteniamo:

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac,$$

da cui, con semplici calcoli troviamo $b = c$. Notiamo che, nel fare la dimostrazione, abbiamo moltiplicato per l'inverso di a.

Tornando al caso delle matrici, possiamo fare una dimostrazione analoga, se possiamo moltiplicare per l'inversa della matrice A. Siano quindi $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ matrici tali che $AB = AC$. Moltiplicando a sinistra ambo i membri di questa uguaglianza per A^{-1} otteniamo:

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC,$$

da cui si trova:

$$IB = IC,$$

vale a dire $B = C$. Abbiamo così dimostrato la:

Proposizione 6.19 *Date $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ si ha:*

$$\text{se } AB = AC \text{ allora } B = C.$$

In modo analogo si dimostra la seguente proprietà:

Proposizione 6.20 *Date $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$ si ha:*

$$\text{se } BA = CA \text{ allora } B = C.$$

Esercizio di base 6.21 Dimostrare la proposizione 6.20.

6.4 Teorema di Cramer

Abbiamo visto nel capitolo 1 che l'equazione a coefficienti reali

$$ax = b$$

ha, se $a \neq 0$, una e una sola soluzione data da

$$x = a^{-1}b.$$

Possiamo ora dare una proprietà analoga nel caso matriciale. Date le matrici $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$, l'**equazione matriciale**

$$AX = B$$

(dove $X \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ è la matrice incognita) ha una e una sola soluzione data da:

$$X = A^{-1}B.$$

Esercizio di base 6.22 Dimostrare quest'ultima affermazione.

Analogamente si ha che, date $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$, l'equazione matriciale
$$XA = B$$
(dove $X \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$ è la matrice incognita) ha una e una sola soluzione data da:
$$X = BA^{-1}.$$

Esercizio di base 6.23 Dimostrare quest'ultima affermazione.

Consideriamo ora un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
Abbiamo visto che il sistema può essere scritto nella forma:
$$AX = B$$
dove $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ è la matrice dei coefficienti del sistema, $X \in \mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$ è la matrice delle incognite e $B \in \mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$ è la matrice dei termini noti. Nel caso in cui A sia una matrice invertibile, applicando i risultati visti in precedenza, possiamo concludere che il sistema ha un'unica soluzione data da:
$$X = A^{-1}B.$$
Non è però necessario calcolare esplicitamente la matrice inversa di A per determinare le soluzioni. Diamo infatti il:

Teorema 6.24 (di Cramer) *Sia dato un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite:*
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
Riscriviamo il sistema in forma matriciale:
$$AX = B.$$
Se $\det A \neq 0$, il sistema ammette una e una sola soluzione data da
$$X = A^{-1}B.$$

Equivalentemente la soluzione è data dalle formule

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A},$$

con $1 \leq i \leq n$ *dove* $A(i)$ *è la matrice ottenuta da* A *sostituendo la* i*-esima colonna di* A *con la colonna* B *dei termini noti.*

La dimostrazione completa del teorema può essere trovata nel paragrafo A.6

Definizione 6.25 Un sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice dei coefficienti sia invertibile si dice **Crameriano**. △

Esempio 6.26 Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \qquad + z = 1 \\ x + y \qquad = 2 \end{cases}$$

La sua matrice dei coefficienti è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 1$. Quindi il sistema ammette una e una sola soluzione. Calcoliamola:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = -1.$$

Abbiamo evidenziato con il colore l'inserimento della colonna dei termini noti. Quindi $(2, 0, -1)$ è l'unica soluzione del sistema. Come controllo possiamo sostituire i valori di x, y e z trovati nelle equazioni del sistema e verificare che le soddisfano tutte. Si ha infatti:

$$\begin{cases} 2 + 0 + (-1) = 1 \\ 2 \qquad + (-1) = 1 \\ 2 + 0 \qquad\quad = 2 \end{cases}$$

△

Esercizio di base 6.27 Verificare che il seguente sistema ha una e una sola soluzione e determinarla:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

△

6.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.6.3 Per calcolare l'elemento di posto (i, j) di $I_n B$ dobbiamo moltiplicare gli elementi della i-esima riga di I_n per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di B e sommare poi i prodotti così ottenuti. L'unico elemento non nullo della i-esima colonna di I_n è l'i-esimo che è uguale a 1. Moltiplicando questo elemento per l'i-esimo elemento della j-esima colonna di B (cioè b_{ij}) otteniamo come risultato b_{ij}. Dunque, l'elemento di posto (i, j) di $I_n B$ è b_{ij}, cioè è uguale all'elemento di posto (i, j) di B: ma questo significa che $I_n B = B$.

EB.6.5 La matrice I è una matrice triangolare superiore. Sappiamo che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale, ed è pertanto uguale a 1.

EB.6.11 Basta svolgere i calcoli.

EB.6.13 Svolgendo i calcoli si trova:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EB.6.18 Sappiamo che A è invertibile e che la sua inversa è A^{-1}. Dunque abbiamo $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Vogliamo mostrare che ${}^tA$ è invertibile e che la sua inversa è ${}^t(A^{-1})$. Questo equivale a calcolare i prodotti ${}^tA\,{}^t(A^{-1})$ e ${}^t(A^{-1})\,{}^tA$ e verificare che sono uguali alla matrice identica. Dalla formula della trasposta di un prodotto si ha:

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A).$$

D'altra parte $A^{-1}A = I$. Dunque:

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^tI.$$

Ma la trasposta della matrice identità è la matrice identità e, pertanto,

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I.$$

In maniera analoga si dimostra che

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tI.$$

EB.6.21 Otteniamo la tesi moltiplicando a destra ambo i membri dell'identità

$$BA = CA$$

per la matrice A^{-1}. Quest'ultima esiste poiché $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

EB.6.22 Moltiplicando a sinistra ambo i membri per la matrice A^{-1}, otteniamo la tesi.

EB.6.23 Moltiplicando a destra ambo i membri per la matrice A^{-1}, otteniamo la tesi.

EB.6.27 Ponendo:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

il sistema si scrive nella forma:

$$AX = B.$$

Svolgendo i calcoli si trova che la matrice A ha determinante 36. Il sistema ammette quindi una e una sola soluzione. Essa è data da:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = -\frac{1}{12},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{1}{6},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{1}{4},$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{36} = 0.$$

6.6 Sunto

Matrice unità

Definizione Chiamiamo **matrice unità** o **matrice identica** di ordine n la matrice quadrata I_n avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0 (la matrice identica è, quindi, una matrice diagonale). Dunque:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

△

Si ha la:

Proposizione *Per ogni matrice A con n colonne si ha:*

$$AI_n = A.$$

Per ogni matrice B con n righe si ha:

$$I_n B = B.$$

Notazione Quando non ci sia pericolo di confusione si usa il simbolo I per indicare la matrice identica quale che sia la sua dimensione. △

Matrice inversa

Definizione Una matrice quadrata A si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine di A tale che $AB = BA = I$. Indichiamo con $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine n. La notazione utilizzata dipende dal fatto che questo insieme viene chiamato **gruppo lineare**. △

Proposizione *Se A è una matrice invertibile e B e C sono due matrici tali che $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, allora $B = C$.*

Possiamo allora dare la:

Definizione Data una matrice invertibile A si chiama **inversa** di A l'unica matrice B tale che $AB = BA = I$. Tale matrice viene indicata con il simbolo A^{-1}. △

Teorema *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$. *In tal caso, detto n l'ordine di A, la matrice inversa di A si calcola nel modo seguente:*

- *se $n = 1$ e $A := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} \end{pmatrix}$;*
- *se $n > 1$ l'elemento b_{ij} di posto (i, j) della matrice A^{-1} è dato dalla formula:*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Proprietà dell'inversa

Proposizione *L'inversa di una matrice invertibile A è una matrice invertibile. Si ha:*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Inoltre:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Proposizione *Date due matrici invertibili A e B dello stesso ordine, anche il prodotto AB è invertibile e si ha:*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Proposizione *Data una matrice invertibile A, la sua trasposta ${}^tA$ è invertibile e si ha:*

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Ciò ci permette di usare il simbolo ${}^tA^{-1}$ senza ambiguità.

Proposizione *Date $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(n, r, \mathbb{R})$ si ha:*

$$\text{se } AB = AC \text{ allora } B = C.$$

Proposizione *Date $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(r, n, \mathbb{R})$ si ha:*

$$\text{se } BA = CA \text{ allora } B = C.$$

Teorema di Cramer

Teorema (di Cramer) *Sia dato un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in forma matriciale:

$$AX = B.$$

Se $\det A \neq 0$, il sistema ammette una e una sola soluzione data da

$$X = A^{-1}B.$$

Equivalentemente la soluzione è data dalle formule

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A},$$

con $1 \leq i \leq n$ dove $A(i)$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna di A con la colonna B dei termini noti.

Definizione Un sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice dei coefficienti sia invertibile si dice **Crameriano**. △

6.7 Esercizi

E.6.1 Per ognuna delle seguenti matrici, determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

E.6.2 Per ognuna delle seguenti matrici, determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$
$$E := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.6.3 Per ognuna delle seguenti matrici, determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 90 \\ 0 & 14 & 31 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \\ 43 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 15 & 91 & 302 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

E.6.4 Calcolare l'inversa della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

E.6.5

a. Dimostrare che data una matrice triangolare superiore invertibile A di ordine 2, l'inversa di A è una matrice triangolare superiore.

b. Dimostrare che data una matrice triangolare superiore invertibile A di ordine 3, l'inversa di A è una matrice triangolare superiore.

c. Dimostrare proprietà analoghe a quelle provate nei punti precedenti per matrici triangolari inferiori.

E.6.6 Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche, determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.6.7 Chi ha risolto l'esercizio E.6.6 si sarà accorto che in tutti i casi in cui era possibile calcolare l'inversa si otteneva una matrice simmetrica. Non è un caso: l'inversa di una matrice invertibile simmetrica è anch'essa simmetrica. Dimostrare questa affermazione.

Diamo un suggerimento. Ricordiamo che una matrice B è simmetrica se ${}^tB = B$. Data una matrice simmetrica invertibile A, per dimostrare che A^{-1} è simmetrica bisogna quindi provare che ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$. Si deve cioè dimostrare che la matrice ${}^t(A^{-1})$ è l'inversa di A. Questo equivale a mostrare che:

$$ {}^t(A^{-1})A = A\,{}^t(A^{-1}) = I. $$

E.6.8 Determinare i valori di λ per i quali la seguente matrice è invertibile:

$$ A_\lambda := \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}. $$

E.6.9 Date le matrici

$$ A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, $$

determinare le soluzioni delle equazioni matriciali:

a. AX=B; b. XA=B; c. AX=0; d. XA=0; e. DX=C; f. XD=C.

E.6.10 Dimostrare che l'equazione matriciale

$$ AX = B $$

dove $A \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$, $A \notin \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $X \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$, non ha soluzioni.

E.6.11 Determinare le soluzioni dell'equazione matriciale:

$$ AX = A $$

dove

$$ A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X \in \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}). $$

E.6.12 Determinare le soluzioni dell'equazione matriciale:

$$ AX = B $$

dove

$$ A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}). $$

E.6.13 Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi sfruttando il teorema di Cramer:

a. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$;

d. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$; e. $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$;

f. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$.

E.6.14 Dimostrare che un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite, avente la matrice dei coefficienti invertibile e i termini noti tutti nulli, ha come unica soluzione l'n-upla $(0, 0, \dots, 0)$.

6.8 Soluzioni degli esercizi

E.6.1 La matrice A non è invertibile. Si ha poi:

$$B^{-1} = (1)), \quad C^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right), \quad D^{-1} = \left(\tfrac{1}{3}\right).$$

E.6.2 Le matrici A, E, F, G, L, M e N non sono invertibili. Si ha poi:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = C, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{72} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}, \qquad I^{-1} = I.$$

E.6.3 Le matrici A, B, C e F non sono invertibili. Si ha poi:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

E.6.4 Poiché la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

è triangolare, il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Pertanto $\det A = 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$. La matrice A è dunque invertibile. Ricordiamo che per calcolare la matrice inversa è necessario calcolare i determinanti delle matrici aggiunte degli elementi di A. In particolare l'elemento di posto (i, j) della matrice A^{-1} è:

$$(-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Calcoliamo allora i determinanti delle matrici aggiunte:

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{6}{5}, \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 0, \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}, \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{4}{5}, \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{26}{3}, \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}, \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

La matrice A^{-1} è allora:

$$A^{-1} = \frac{5}{12} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{26}{3} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{65}{18} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che anche A è una matrice triangolare superiore.

E.6.5

a. La generica matrice triangolare di ordine 2 può essere scritta così:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Se A è invertibile il suo determinante è diverso da 0. Per mostrare che l'inversa di A è triangolare superiore non è necessario calcolare tutti gli elementi della matrice A^{-1}: è sufficiente mostrare che l'elemento di posto $(2,1)$ di A^{-1} si annulla. L'elemento di posto $(2,1)$ di A^{-1} è:

$$-\frac{\det A_{12}}{\det A}.$$

Ora A_{12} è la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la seconda colonna di A: pertanto $A_{12} = (0)$ e $\det A_{12} = 0$. Abbiamo così ottenuto quello che volevamo.

b. La generica matrice triangolare di ordine 3 può essere scritta così:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se A è invertibile il suo determinante è diverso da 0. Per mostrare che l'inversa di A è triangolare superiore non è necessario calcolare tutti gli elementi della matrice A^{-1}: è sufficiente mostrare che gli elementi di posto (i,j) di A^{-1} con $i > j$ si annullano. L'elemento di posto (i,j) di A^{-1} è:

$$-\frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che gli aggiunti A_{ji} degli elementi di posto (j,i) con $i > j$ hanno determinante nullo. Gli aggiunti che dobbiamo considerare sono:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che queste matrici hanno tutte una riga o una colonna nulle e, quindi, il loro determinante si annulla.

c. La proprietà per le matrici triangolari inferiori si dimostra in maniera analoga a quella della matrici triangolari superiori.

Si potrebbe dimostrare che data una matrice triangolare superiore invertibile di qualsiasi ordine, la sua inversa è una matrice triangolare superiore, e, analogamente che data una matrice triangolare inferiore invertibile di qualsiasi ordine, la sua inversa è una matrice triangolare inferiore.

E.6.6 La matrice D non è invertibile. Si ha poi:

$$A^{-1} = A, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

E.6.7 Dobbiamo dimostrare che data una matrice simmetrica invertibile A si ha:

$${}^t(A^{-1})A = A\,{}^t(A^{-1}) = I.$$

Poiché $A = {}^tA$, abbiamo:

$$ {}^t(A^{-1})A = {}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI = I. $$

In modo analogo si dimostra che si ha:

$$ A\,{}^t(A^{-1}) = I. $$

E.6.8 Il determinante di A è $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$, che si annulla per $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. La matrice A è dunque invertibile per tutti i valori di λ diversi da 0, 1 e 2.

E.6.9 Notiamo innanzitutto che, affinché le equazioni abbiano senso, si deve avere $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

a. La matrice A è invertibile. Si ha allora:

$$ X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}. $$

b. Si ha:

$$ X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. $$

c. Si ha $X = A^{-1}0 = 0$.

d. Si ha $X = 0A^{-1} = 0$.

e. Poiché $\det D = 0$, per ogni $X \in \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ si ha $\det(DX) = \det D \det X = 0$. Ma $\det C \neq 0$. Non esiste quindi alcuna matrice X verificante l'equazione.

f. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che non esiste alcuna matrice verificante l'equazione.

E.6.10 Poiché $\det A = 0$ si ha $\det(AX) = \det A \det X = 0$, qualunque sia la matrice X. Poiché $\det B \neq 0$, non esiste nessuna matrice X tale che $AX = B$.

E.6.11 Consideriamo una generica matrice

$$ X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} $$

di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. Calcoliamo il prodotto AX:

$$ AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Imponendo che questo prodotto sia uguale ad A:

$$ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

troviamo $a = 1$ e $b = 0$. Le soluzioni sono, dunque, le matrici del tipo:

$$ X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} $$

dove c e d sono numeri reali qualsiasi.

E.6.12 Si procede come nell'esercizio E.6.11 e si vede che non esiste alcuna soluzione.

E.6.13 Ognuno dei sistemi ha una sola soluzione. Esse sono:

a. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = -\dfrac{4}{3} \\ x_3 = \dfrac{14}{3} \\ x_4 = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$

E.6.14 In forma matriciale il sistema si scrive: $AX = 0$. Dunque l'unica soluzione del sistema è $X = A^{-1}0 = 0$.

CAPITOLO 7

Rango di una matrice

Abbiamo visto che un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite avente la matrice dei coefficienti invertibile è dotato di una e una sola soluzione. Cosa succede nel caso in cui la matrice dei coefficienti non sia invertibile?

Esistono poi sistemi in cui il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite. Cosa succede per questo tipo di sistemi?

Risponderemo a queste domande nel capitolo 8. Prima di far ciò dobbiamo introdurre un nuovo concetto: quello di rango di una matrice.

7.1 Definizione di rango

Definizione 7.1 Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ e $n \leq q$. Un **minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe e n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte. △

In generale una matrice A ha più di un minore di ordine n: per questo abbiamo detto **un** minore di ordine n e non **il** minore di ordine n.

Esempio 7.2 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

I minori di ordine 1 di A sono ovviamente le 12 matrici a una riga e una colonna formate dai 12 elementi di A.

Vediamo come possiamo ottenere un minore di ordine 2. Scegliamo 2 righe di A, ad esempio la prima e la seconda e 2 colonne di A, ad esempio la prima e la seconda e prendiamo gli elementi che stanno nelle posizioni così scelte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

In questo modo abbiamo ottenuto il minore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente non è detto che le righe e le colonne che scegliamo siano adiacenti. Se ad esempio prendiamo la prima e terza riga e la seconda e quarta colonna di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

otteniamo il minore:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Continuando così possiamo ottenere tutti i minori di ordine 2 di A. Questi sono in tutto 18. Infatti i minori ottenuti scegliendo le prime due righe di A in tutti i modi possibili sono 6. Eccoli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questi sono i minori ottenuti scegliendo la prima e la terza riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vi sono poi i 6 minori ottenuti scegliendo la seconda e la terza riga.

Veniamo ora ai minori di ordine 3. Per scegliere uno di essi dobbiamo scegliere 3 righe di A (cioè tutte) e 3 colonne di A, cioè tutte le colonne tranne una. La scelta delle tre colonne può essere fatta dunque in 4 modi diversi: abbiamo quindi 4 minori di ordine 3. Ognuno di essi è ottenuto eliminando una delle 4 colonne:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A non ha minori di ordine superiore a 3 (infatti A ha 3 righe). $\triangle$

Esercizio di base 7.3 Determinare i sei minori della matrice A dell'esempio 7.2 di ordine 2 ottenuti scegliendo la seconda e la terza riga.

I minori di una matrice sono matrici quadrate: di essi possiamo dunque calcolare i determinanti. Questo ci permette di dare la:

Definizione 7.4 Una matrice A ha **rango** (o **caratteristica**) uguale a n se:

1. esiste almeno un minore di A di ordine n con determinante diverso da 0;
2. tutti i minori di A di ordine maggiore di n hanno determinante nullo.

Se tutti i minori di A hanno determinante nullo diciamo che A ha rango uguale a 0. $\triangle$

Notazione 7.5 Per indicare che una matrice A ha rango uguale a n scriviamo $\operatorname{rk} A = n$ (dall'inglese "rank", cioè rango). In alcuni testi si trova la notazione $\operatorname{Car} A = n$. △

Esercizio di base 7.6 Dimostrare che una matrice A ha rango 0 se e solo se è la matrice nulla.

Esercizio di base 7.7 Dimostrare che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^t\!A$ per ogni matrice A.

Esempio 7.8 Riprendiamo la matrice A dell'esempio 7.2 e calcoliamone il rango:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dovremmo calcolare i determinanti di tutti i minori di A. Nel calcolare i determinanti dei minori di ordine 2 ne troveremo alcuni che sono invertibili e altri che non lo sono. Ad esempio il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

formato dalle prime due righe e prime due colonne di A è invertibile. Il rango della matrice A è quindi maggiore o uguale a 2. Svolgendo i calcoli si vede che tutti i quattro minori di A di ordine 3 non sono invertibili. Si ha quindi $\operatorname{rk} A = 2$. △

Se nell'esempio precedente abbiamo calcolato i determinanti di tutti i minori abbiamo dovuto fare molti calcoli. Vorremmo evitare di farne così tanti. Per cominciare possiamo notare che una volta che abbiamo trovato un minore di ordine 2 invertibile è inutile calcolare esplicitamente i determinanti degli altri minori di ordine 2, perché sappiamo che il rango è almeno 2 e per stabilire se è 2 o 3 è sufficiente calcolare i determinanti dei minori di ordine 3. Torneremo con più precisione più avanti su questo aspetto.

7.2 Calcolo del rango

Per determinare il rango di una matrice cercando di fare il minor numero di calcoli possibile è utile la:

Proposizione 7.9 *Sia A una matrice. Se tutti i minori estratti da A di un certo ordine fissato n hanno determinante nullo, allora tutti i minori estratti da A di ordine più grande di n hanno determinante nullo. In particolare* $\operatorname{rk} A < n$.

Dimostrazione Vogliamo innanzitutto mostrare che i minori di ordine $n+1$ hanno determinante nullo. Sia B uno qualsiasi di questi minori e calcoliamo il suo determinante. Ricordiamo che per far ciò occorre calcolare i determinanti di matrici aggiunte di elementi di B. Ma che cos'è una matrice aggiunta di un elemento di B? È un minore di ordine n estratto da B e, dunque, è anche un minore di ordine n di A. Per ipotesi i minori di ordine n di A hanno determinante nullo: se guardiamo la formula per il calcolo del determinante vediamo allora facilmente che anche il determinante di B è nullo. Abbiamo così provato che tutti i minori di ordine $n+1$ hanno determinante nullo. Ripetendo questo ragionamento possiamo dimostrare che i minori di ordine $n+2$ hanno determinante nullo e così via. ■

Vi sono vari metodi per calcolare il rango di una matrice di tipo (p, q). Si può essere ottimisti oppure pessimisti. Se si è ottimisti si pensa che il rango sia alto, se si è pessimisti si pensa che il rango sia basso.

L'ottimista inizia a considerare i minori di ordine massimo: ovviamente l'ordine massimo dei minori è uguale a n, dove n è uguale al più piccolo tra i numeri p e q.

• L'ottimista calcola i determinanti dei minori di ordine n. Possono succedere due cose:

– trova un minore con determinante diverso da 0. Il procedimento è allora finito e non è necessario calcolare i determinanti dei rimanenti minori di ordine n: il rango della matrice è n;

– tutti i minori di ordine n hanno determinante nullo. Si procede.

• L'ottimista calcola allora i determinanti dei minori di ordine $n-1$ e ripete quanto fatto per i minori di ordine n: se ce n'è uno con determinante non nullo allora il rango è $n-1$ e il procedimento è finito, altrimenti si procede esaminando i determinanti dei minori di ordine $n-2$ e così via.

Il pessimista esamina invece innanzitutto i minori di ordine 1:

• Se la matrice A è nulla il rango è uguale a 0 e il procedimento è finito. Altrimenti il rango di A è almeno 1 ed esamina i minori di ordine 2.

• Il pessimista calcola allora i determinanti dei minori di ordine 2. Possono succedere due cose:

– tutti i minori di ordine 2 hanno determinante nullo. Il procedimento è finito e la matrice ha rango 1;

– trova un minore con determinante diverso da 0. Non è necessario calcolare i determinanti dei rimanenti minori di ordine 2: il rango di A è almeno 2 e procede al passo successivo;

• Il pessimista calcola ora i determinanti dei minori di ordine 3 e procede come prima: se sono tutti nulli si può fermare e la matrice ha rango 2, se trova un minore con determinante non nullo passa ad esaminare i minori di ordine superiore e così via.

Esempio 7.10 Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

utilizzando sia il metodo ottimista che il metodo pessimista.

• Metodo ottimista. Vediamo se $\operatorname{rk} A = 4$. L'unico minore di ordine 4 è la matrice A stessa. Svolgendo i calcoli si nota che $\det A = 0$. Quindi $\operatorname{rk} A < 4$. Calcolando i determinanti di tutti i minori di ordine 3 (sono ben 16) si trova che sono tutti nulli. Quindi $\operatorname{rk} A < 3$.

Iniziamo a calcolare i determinanti dei minori di ordine 2. Quello formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha (come è facile vedere) determinante nullo. Consideriamo allora un altro minore di ordine 2. Prendiamo quello formato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna di A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo minore ha determinante diverso 0. Possiamo fermarci: non è necessario calcolare il determinante dei rimanenti minori di ordine 2 di A. Il rango di A è 2.

• Metodo pessimista. Si ha ovviamente $\operatorname{rk} A \geq 1$, perché la matrice A è non nulla. Iniziamo a calcolare i determinanti dei minori di ordine 2. Come nel metodo ottimista troviamo un minore con determinante non nullo. Dunque $\operatorname{rk} A \geq 2$ e non è più necessario calcolare i determinanti dei rimanenti minori di ordine 2. Passiamo a calcolare i determinanti dei minori di ordine 3: poiché sono tutti nulli possiamo fermarci e affermare che $\operatorname{rk} A = 2$. △

Nell'esempio precedente il metodo pessimista è risultato leggermente più conveniente perché ci ha permesso di evitare il calcolo del determinante della matrice A. Se però A avesse avuto determinante non nullo il metodo ottimista sarebbe stato più conveniente: avremmo potuto affermare subito che $\operatorname{rk} A = 4$ senza calcolare ulteriori determinanti.

In generale non c'è un metodo a priori più conveniente dell'altro: dipende caso per caso. Entrambi i metodi non sono però del tutto soddisfacenti, perché richiedono spesso molti calcoli: nell'esempio 7.10 è stato necessario calcolare i determinanti di ben 16 matrici di ordine 3 sia utilizzando il metodo pessimista, sia utilizzando quello ottimista.

Per nostra fortuna c'è una proprietà che ci permette di evitare molti calcoli. Per poter enunciare questa proprietà dobbiamo spiegare cosa significhi **orlare** un minore di una matrice:

Definizione 7.11 Dato un minore B di ordine n di una matrice A, un minore C di A di ordine $n+1$ è detto **orlato** di B se B è un minore di C. In altre parole, il minore C è ottenuto dal minore B aggiungendo ad esso un'altra riga e un'altra colonna di A. △

Esempio 7.12 Riprendiamo la matrice A dell'esempio 7.10 e consideriamo il minore B formato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Quali sono gli orlati di B? Per ottenere ciascuno di essi dobbiamo aggiungere una riga scelta tra la terza e la quarta (cioè tra quelle che non concorrono a formare B) e una colonna scelta tra la seconda e la quarta. Ad esempio scegliendo la quarta riga e la quarta colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

otteniamo il minore:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Analogamente otteniamo gli altri orlati di B

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

△

Che utilità ha il concetto di orlato? Abbiamo il seguente teorema che non dimostriamo:

Teorema 7.13 (dell'orlare) *Sia A una matrice e sia B un suo minore con determinante non nullo. Se tutti gli orlati di B hanno determinante nullo allora il rango della matrice A è uguale all'ordine del minore B.*

Il teorema dell'orlare permette di calcolare più velocemente il rango di una matrice. Vediamolo con un esempio:

Esempio 7.14 Calcoliamo di nuovo il rango della matrice A dell'esempio 7.10.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Troviamo subito un minore di ordine 1 con determinante non nullo: ad esempio quello formato dalla prima riga e dalla prima colonna. Passiamo ora a considerare i minori di ordine 2. Se non avessimo il teorema dell'orlare dovremmo considerare a uno a uno tutti questi minori fino eventualmente a trovarne uno con determinante non nullo. Grazie al teorema dell'orlare possiamo limitare la nostra analisi agli orlati del minore di ordine 1 fissato in precedenza. Con qualche calcolo troviamo un minore di ordine 2 con determinante non nullo, ad esempio quello evidenziato che chiamiamo B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo allora che il rango di A è almeno 2. Possiamo ora considerare i minori di ordine 3. Invece di calcolare i minori di tutti i 16 minori di ordine 3, possiamo limitarci a considerare solo gli orlati di B che sono 4. Facendo i calcoli vediamo che hanno tutti determinante nullo: possiamo fermarci e affermare che $\operatorname{rk} A = 2$: non è necessario calcolare i determinanti degli altri minori di ordine 3. $\triangle$

Dunque, utilizzando il teorema dell'orlare per il calcolo del rango di una matrice non nulla A, ci conviene partire da un minore B_1 di ordine 1 non nullo, quindi con determinante non nullo. Lo orliamo in tutti i modi possibili. Se tutti questi minori hanno determinante 0, allora $\operatorname{rk} A = 1$. Altrimenti, non appena troviamo un minore B_2 con determinante diverso da 0, passiamo a considerare gli orlati di B_2. E così via.

Esempio 7.15 Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il minore B_1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna. Ovviamente il suo determinante è diverso da 0. Consideriamo ora gli orlati di B_1. Cominciamo a orlare B_1 con la seconda riga e la seconda colonna di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Questo minore ha determinante nullo: dobbiamo proseguire. Orliamo B_1 con la seconda riga e la terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Anche il minore così ottenuto ha determinante nullo. Lo stesso succede se orliamo A_1 con la seconda riga e la quarta colonna, con la terza riga e la seconda colonna, con la terza riga e la terza colonna. Rimane solo un orlato di A_1 da considerare, quello ottenuto orlando A_1 con la terza riga e la quarta colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Questo minore (che chiameremo B_2) ha determinante non nullo: il rango di A è almeno 2 e dobbiamo passare a considerare gli orlati di B_2. Se orliamo B_2 con la seconda riga e la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix},$$

otteniamo un minore che ha determinante uguale a 0. Dobbiamo allora considerare un altro orlato di B_2. Orliamo B_2 con la seconda riga e la terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Anche questo orlato ha determinante nullo. Poiché B_2 non ha altri orlati, possiamo concludere che $\operatorname{rk} A = 2$. △

Nota 7.16 Quando si utilizza il teorema dell'orlare è importante ricordare che il minore da orlare deve avere determinante diverso da 0. Prendere gli orlati di un minore con determinante nullo può condurre a errori nel calcolo del determinante. △

Esercizio di base 7.17 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

△

Abbiamo già calcolato il rango di questa matrice nell'esempio 7.8. Calcolarlo di nuovo sfruttando il teorema dell'orlare.

7.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.7.3 I minori ottenuti scegliendo la seconda e la terza riga sono:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

EB.7.6 Se $A = 0$ allora tutti i minori di qualsiasi ordine estratti da A sono nulli e hanno quindi determinante nullo: dunque A ha rango 0. Viceversa, se A ha rango 0, tutti i minori estratti da A hanno determinante nullo: in particolare ciò è vero per i minori di ordine 1. Poiché il determinante di una matrice di ordine 1 è uguale all'unico elemento della matrice si ha che tutti i minori di ordine 1 sono nulli, cioè tutti gli elementi di A sono nulli.

EB.7.7 I minori di ${}^tA$ sono, ovviamente, tutte e sole le matrici trasposte dei minori di A. Poiché una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante, si trova facilmente il risultato voluto.

EB.7.17 Dobbiamo determinare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il minore B_1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna è invertibile. Quindi $\operatorname{rk} A \geq 1$. Calcoliamo il determinante degli orlati di B_1: troviamo subito che orlando B_1 con la seconda riga e la seconda colonna otteniamo un minore B_2 con determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo gli orlati di B_2. Se orliamo B_2 con la terza riga e la terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

otteniamo un minore con determinante nullo. Dobbiamo quindi considerare un altro orlato di B_2. Se orliamo B_2 con la terza riga e la quarta colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

otteniamo un altro minore con determinante nullo. Poiché B_2 non ha altri minori, possiamo dire che $\operatorname{rk} A = 2$.

7.4 Sunto

Rango di una matrice

Definizione Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ e $n \leq q$. Un **minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe e n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte. △

In generale una matrice A ha più di un minore di ordine n: per questo abbiamo detto **un** minore di ordine n e non **il** minore di ordine n.

Definizione Una matrice A ha **rango** (o **caratteristica**) uguale a n se:

1. esiste almeno un minore di A di ordine n con determinante diverso da 0;

2. tutti i minori di A di ordine maggiore di n hanno determinante nullo.

Se tutti i minori di A hanno determinante nullo diciamo che A ha rango uguale a 0. △

Osservazione Una matrice ha rango 0 se e solo se è la matrice nulla. △

Proprietà del rango

Osservazione Per ogni matrice A si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^tA$. △

Proposizione *Se una matrice A ha almeno un minore di ordine n con determinante non nullo e tutti i minori di ordine $n+1$ hanno determinante nullo, allora* $\operatorname{rk} A = n$.

Definizione Dato un minore B di ordine n di una matrice A, un minore C di A di ordine $n+1$ è detto **orlato** di B se B è un minore di C. In altre parole, il minore C è ottenuto dal minore B aggiungendo ad esso un'altra riga e un'altra colonna di A. △

Teorema (dell'orlare) *Sia A una matrice e sia B un suo minore con determinante non nullo. Se tutti gli orlati di B hanno determinante nullo allora il rango della matrice A è uguale all'ordine del minore B.*

7.5 Esercizi

E.7.1 Calcolare il rango delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E.7.2 Calcolare il rango delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

E.7.3 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ -9 & -16 & 4 & -10 & 22 \\ 9 & 24 & -6 & 15 & -33 \end{pmatrix}.$$

E.7.4 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

E.7.5 Calcolare il rango delle matrici diagonali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.7.6 Calcolare il rango delle matrici diagonali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.7.7 Calcolare il rango delle matrici triangolari:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.7.8 Calcolare il rango delle matrici triangolari:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

E.7.9 Calcolare il rango della matrice triangolare:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E.7.10 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E.7.11 Siano date le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Calcolare il rango di A e il rango di B.

b. Dato un minore di A di ordine 3 quanti sono i suoi minori orlati? Rispondere alla stessa domanda per un minore di ordine 3 di B.

c. Quanti sono i minori di ordine 4 di A? E quanti sono i minori di ordine 4 di B?

E.7.12 Sia data una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e un minore M di A di ordine s. Quanti sono gli orlati di M?

7.6 Soluzioni degli esercizi

E.7.1 Si ha:

$$\operatorname{rk} A = 2, \quad \operatorname{rk} B = 2, \quad \operatorname{rk} C = 1, \quad \operatorname{rk} D = 1.$$

E.7.2 Si ha:

$$\operatorname{rk} A = 1, \quad \operatorname{rk} B = 2, \quad \operatorname{rk} C = 2.$$

E.7.3 Il minore B formato dalle prime due righe e due colonne ha determinante non nullo. Quindi $\operatorname{rk} A \geq 2$. I tre minori ottenuti orlando B hanno tutti determinante nullo. quindi $\operatorname{rk} A = 2$.

E.7.4 Il rango della matrice A è uguale a 2.

E.7.5 Si ha:
$$\operatorname{rk} A = 3, \quad \operatorname{rk} B = 2, \quad \operatorname{rk} C = 1.$$
Notare che, in tutti e tre i casi, il rango delle matrici diagonali A, B e C è uguale al numero di elementi non nulli della diagonale principale.

E.7.6 Si ha:
$$\operatorname{rk} A = 4, \quad \operatorname{rk} B = 3, \quad \operatorname{rk} C = 2, \quad \operatorname{rk} D = 1.$$
Anche in questo caso il rango delle matrici diagonali A, B, C e D è uguale al numero di elementi non nulli della diagonale principale.

E.7.7 Si ha:
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{rk} A = 3, & \operatorname{rk} B = 2, & \operatorname{rk} C = 2, \\ \operatorname{rk} D = 2, & \operatorname{rk} E = 2, & \operatorname{rk} F = 1. \end{array}$$
Notare che, nel caso di matrici triangolari, il rango di una matrice non è necessariamente uguale al numero di elementi non nulli della diagonale principale.

E.7.8 Si ha:
$$\operatorname{rk} A = 3, \quad \operatorname{rk} B = 3.$$

E.7.9 Il rango della matrice A è uguale a 4.

E.7.10 Il rango della matrice è uguale a 3.

E.7.11

a. Calcoliamo il rango di A utilizzando il teorema dell'orlare. Determiniamo allora un minore di ordine 1 di A con determinante non nullo (ad esempio quello formato dalla prima riga e prima colonna) e calcoliamo i determinanti dei suoi minori orlati finché ne troviamo uno con determinante diverso da 0, ad esempio quello evidenziato:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calcoliamo ora i determinanti dei minori orlati del minore evidenziato M_2 finché ne troviamo uno con determinante diverso da 0. Si ha
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
(questi sono gli orlati ottenuti utilizzando la terza riga e una della colonne). Orlando poi con la quarta riga e la terza colonna troviamo invece:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$
A questo punto non è più necessario calcolare i determinanti degli altri orlati di M_2. Chiamiamo M_3 il minore così determinato e calcoliamo i determinanti dei suoi orlati. Il minore M_3 ha 4 orlati, calcolandone i determinanti, troviamo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque si ha $\operatorname{rk} A = 3$.

Calcoliamo ora il rango di B. Determiniamo allora un minore di ordine 1 di A con determinante non nullo (ad esempio quello formato dalla prima riga e prima colonna) e calcoliamo i determinanti dei suoi minori orlati finché ne troviamo uno con determinante diverso da 0, ad esempio quello evidenziato:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora i determinanti dei minori orlati del minore evidenziato N_2 finché ne troviamo uno con determinante diverso da 0. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(questi sono gli orlati ottenuti utilizzando la terza riga e una della colonne). Orlando poi con la quarta riga e la terza colonna troviamo invece:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

A questo punto non è più necessario calcolare i determinanti degli altri orlati di N_2. Chiamiamo N_3 il minore così determinato e calcoliamo i determinanti dei suoi orlati. Si vede che N_3 ha 6 orlati e questi hanno tutti hanno determinante nullo e quindi si ha $\operatorname{rk} B = 3$.

Si sarebbe potuto osservare che la prima e la terza riga di B sono uguali e, quindi, tutti i minori che coinvolgono tali righe hanno, necessariamente, determinante nullo, grazie alla proposizione 5.13. Si può infatti dimostrare in generale che una matrice quadrata con due righe uguali (o due colonne uguali) ha determinante nullo.

b. Per orlare un minore dobbiamo aggiungervi una riga tra quelle che non sono coinvolte nel minore e una colonna tra quelle che non sono coinvolte nel minore. Se dobbiamo allora orlare un minore di ordine 3 di A possiamo scegliere la riga da aggiungere in 2 modi e la colonna da aggiungere in 2 modi. Dunque il minore ha $4 = 2 \cdot 2$ orlati. Se invece dobbiamo orlare un minore di ordine 3 di B possiamo scegliere la riga da aggiungere in 2 modi e la colonna da aggiungere in 3 modi. Dunque il minore ha $6 = 2 \cdot 3$ orlati.

c. Per determinare un minore di ordine 4 di A dobbiamo scegliere 4 righe e 4 colonne di A. Scegliere 4 righe di A è lo stesso che cancellare una riga di A: possiamo operare questa scelta in 5 modi diversi. Analogamente possiamo scegliere 4 colonne di A in 5 modi diversi. Dunque A ha $25 = 5 \cdot 5$ minori di ordine 4.

Per determinare un minore di ordine 4 di B dobbiamo scegliere 4 righe e 4 colonne di B. Come per A posso scegliere le 4 righe in 5 modi differenti. Scegliere invece 4 colonne di B è lo stesso che cancellare 2 colonne. Posso allora scegliere la prima colonna da cancellare in 6 modi differenti, la seconda colonna da cancellare andrà scelta tra le rimanenti 5 colonne e quindi posso operare 5 differenti scelte. In tutto ho $30 = 6 \cdot 5$ scelte, ma occorre notare che a due a due queste scelte sono uguali: per esempio, cancellare prima la terza colonna e poi la quinta è ovviamente uguale a cancellare prima la quinta colonna e poi la terza. Dunque posso scegliere le due colonne da cancellare in $15 = \frac{30}{2}$ modi diversi. Riassumendo possiamo scegliere le 4 righe in 5 modi diversi e le 4 colonne in 15 modi diversi: in tutto ho $75 = 15 \cdot 5$ minori di ordine 4.

Notiamo che, per calcolare il rango della matrice A, grazie al teorema dell'orlare abbiamo calcolato i determinanti di 4 minori di ordine 4. Se non avessimo usato il teorema dell'orlare avremmo dovuto calcolare i determinanti di tutti e 25 i minori di ordine 4. Analoga osservazione vale per B.

E.7.12 Per orlare M dobbiamo aggiungere una riga e una colonna di A scelte tra quelle non coinvolte in M. Le righe di A non coinvolte in M sono $p - s$, le colonne di A non coinvolte in M sono $q - s$. Dunque M ha $(p - s)(q - s)$ orlati.

CAPITOLO 8

Sistemi di equazioni lineari

Nel capitolo 6 abbiamo mostrato che un sistema di n equazioni in n incognite la cui matrice dei coefficienti è invertibile, ha una e una sola soluzione (teorema di Cramer).

Vogliamo ora studiare il caso più generale in cui il numero delle equazioni non sia necessariamente uguale al numero delle incognite o anche il caso in cui il numero delle incognite e delle equazioni coincidano ma la matrice dei coefficienti del sistema non sia invertibile.

Vedremo come il calcolo del rango di due matrici ci permette di sapere se un sistema ha o non ha soluzioni. Vogliamo quindi dare un metodo per il calcolo delle eventuali soluzioni di un sistema. Vi sono vari metodi: noi studieremo in questo capitolo il metodo di Rouché-Capelli, mentre nel capitolo 9 studieremo il metodo di Gauss.

8.1 Definizioni

Sia dato un sistema di p equazioni lineari a coefficienti reali in q incognite:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e x_1, x_2, ..., x_q sono le incognite.

Una soluzione del sistema S è una q-upla di numeri reali $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q)$ che, sostituiti nelle equazioni del sistema alle incognite $(x_1, x_2, \dots, x_q)$, danno delle identità. Indichiamo con $\mathbb{R}^q$ l'insieme delle q-uple di numeri reali. Quindi $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q) \in \mathbb{R}^q$. Indichiamo con il simbolo $\mathrm{Sol}(S)$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^q$ formato dalle soluzioni del sistema S.

Abbiamo visto nel capitolo 1 che esistono sistemi S che hanno soluzioni e altri che non ne hanno. Chiamiamo **sistemi risolubili** i sistemi che hanno soluzioni.

Abbiamo anche visto che, dato il sistema S di cui sopra, la matrice di tipo (p, q):

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

viene detta **matrice dei coefficienti del sistema**.

La matrice di tipo $(p, 1)$

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

viene detta **matrice colonna dei termini noti**.

La matrice di tipo $(q, 1)$:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

viene detta **matrice colonna delle incognite**.

La matrice di tipo $(p, q+1)$:

$$A' := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix}$$

viene detta **matrice completa del sistema**.

La matrice A' è quindi ottenuta dalla matrice A aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti.

Abbiamo già visto che ogni sistema S può essere scritto nella forma matriciale:

$$S\colon AX = B.$$

Quando si usa per i sistemi il simbolismo matriciale è comodo pensare le soluzioni del sistema S come matrici colonna. In questo caso $X_0 \in \mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$ è soluzione dell'equazione matriciale:

$$S\colon AX = B$$

se, sostituita in S alla matrice colonna X, si ottiene l'identità $AX_0 = B$.

Esempio 8.1 Consideriamo di nuovo il sistema 1.5. È il primo esempio di sistema da noi visto:

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

La matrice A dei coefficienti e la colonna B dei termini noti sono:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa del sistema è :

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è invertibile. Si tratta quindi di un sistema Crameriano. Esso è pertanto dotato di una sola soluzione. Svolgendo i calcoli vediamo che essa è:

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Notiamo che abbiamo indicato la soluzione come coppia di numeri reali. Scriviamo pertanto:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

In questo caso stiamo considerando $\mathrm{Sol}(S)$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Se invece vogliamo scrivere la soluzione come matrice, scriviamo:

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo pertanto:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

In questo caso stiamo considerando $\mathrm{Sol}(S)$ come sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 1, \mathbb{R})$. $\triangle$

Naturalmente vi sono sistemi che non hanno soluzioni.

Esempio 8.2 È facile vedere che il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

non ha soluzioni: infatti la prima e terza condizione sono evidentemente incompatibili. Possiamo allora scrivere che:

$$\mathrm{Sol}(S) = \varnothing.$$

La matrice A dei coefficienti e la colonna B dei termini noti sono:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa del sistema è :

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

8.2 Teorema di Rouché-Capelli

Diamo ora, senza dimostrazione, un risultato che permette di stabilire se un dato sistema lineare è risolubile o meno.

Teorema 8.3 (Rouché-Capelli) *Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema. Il sistema S è risolubile se e solo se* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$.

Vediamo qualche esempio:

Esempio 8.4 Consideriamo di nuovo l'esempio 8.1

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

La matrice A del sistema e la matrice completa del sistema sono:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice A è invertibile, abbiamo $\operatorname{rk} A = 2$. Pertanto $\operatorname{rk} A' \geq 2$. Ma la matrice A' ha due sole righe e quindi ovviamente $\operatorname{rk} A' = 2$. Abbiamo quindi $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Il teorema di Rouché-Capelli ci conferma quel che già sappiamo dal teorema di Cramer: il sistema ha soluzioni. △

Osservazione 8.5 Quel che abbiamo visto nell'esempio precedente si generalizza a qualsiasi sistema Crameriano.

Un sistema Crameriano di n equazioni in n incognite ha la matrice dei coefficienti e la matrice completa ambedue di rango n. Il teorema di Rouché-Capelli ci dice che abbiamo soluzioni. Informazione che già avevamo dal teorema di Cramer. △

Esempio 8.6 Riprendiamo ancora il sistema dell'esempio 8.2:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Abbiamo già determinato con elementari osservazioni che il sistema non è risolubile. Mostriamolo nuovamente utilizzando il teorema di Rouché-Capelli. La matrice del sistema e la matrice completa del sistema sono:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli troviamo che il rango di A è 2 (il minore B formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante non nullo):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di A' possiamo osservare che B è un minore anche di A' e, pertanto, A' ha rango almeno 2. Per calcolare il rango di A' è allora sufficiente calcolare il determinante dell'unico minore di ordine 3, cioè A' stessa. Poiché A' ha determinante diverso da 0, vediamo che A' ha rango 3, diverso dal rango di A, e, dunque, il sistema non è risolubile.

Notiamo che in questo caso il teorema dell'orlare non ci avrebbe risparmiato alcun calcolo, perché l'unico orlato di B è anche l'unico minore di ordine 3 di A'. △

Esempio 8.7 Consideriamo il sistema

$$S\colon \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \\ 6x + 9y - z - 2w = 3 \end{cases}$$

La matrice del sistema è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli si trova che A ha rango 2 e che un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, il minore B formato dalla prima e seconda riga e dalla prima e terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare il rango della matrice completa del sistema:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prima di metterci a fare i calcoli cerchiamo di risparmiare un po' di fatica e di sfruttare i calcoli che abbiamo già fatto per il calcolo del rango di A. Il minore B è, ovviamente anche un minore di A':

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Possiamo così affermare che $\operatorname{rk} A'$ è almeno 2. Consideriamo gli orlati di B in A'. Orliamo B con la terza riga e la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il determinante del minore così ottenuto. Ma, un momento: il minore che abbiamo evidenziato è un minore anche di A. Dunque abbiamo già calcolato il suo determinante e sappiamo che è 0: è inutile calcolarlo nuovamente.

È sufficiente allora calcolare solo i determinanti degli orlati di B in A' che non sono minori di A: gli orlati che dobbiamo considerare sono solo quelli che si ottengono orlando B con una riga e con la quinta colonna di A' (in questo caso l'unica riga che possiamo scegliere è la terza):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli si trova che questo minore ha determinante nullo: dunque A' ha rango 2 e il sistema è risolubile. △

Esercizio di base 8.8 Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema. Mostrare che $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} A'$.

Esempio 8.9 Consideriamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

La matrice del sistema è:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli si trova che A ha rango 2 e che un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, il minore B evidenziato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare il rango della matrice completa del sistema:

$$A' \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Come nell'esempio 8.7, non ripartiamo da zero per calcolare il rango di A. Abbiamo già un minore di A' di ordine 2 con determinante non nullo: il minore B. Abbiamo già calcolato i determinanti di tutti gli orlati di B contenuti in A. Possiamo allora calcolare i determinanti degli orlati di B in A' che non sono contenuti in A: dobbiamo cioè orlare B sempre con la colonna dei termini noti. Orlando B con la terza riga e la quinta colonna otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli vediamo che il minore così ottenuto ha determinante nullo. Orliamo allora B con la quarta riga e la quinta colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli vediamo che il minore così ottenuto ha determinante diverso da 0. Dovremmo allora proseguire con il calcolo del rango di A' ma non è necessario: abbiamo mostrato infatti che il rango di A' è almeno 3, cioè $\operatorname{rk} A \neq \operatorname{rk} A'$. Pertanto il sistema non è risolubile. △

Osservazione 8.10 Nell'esempio 8.9 non abbiamo calcolato il rango della matrice completa del sistema ma ci siamo limitati a constatare che questo rango era maggiore del rango della matrice del sistema e, pertanto, il sistema non era risolubile. Si potrebbe dimostrare facilmente (ma noi non lo faremo) che se A e A' sono rispettivamente la matrice e la matrice completa di un sistema allora il rango di A' o è uguale a $\operatorname{rk} A$ o è uguale a $1 + \operatorname{rk} A$. △

8.3 Procedimento di Rouché-Capelli

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il teorema di Rouché-Capelli ci permette di stabilire se un sistema lineare è risolubile oppure no, ma non siamo ancora in grado di determinare esplicitamente tutte le soluzioni di un sistema risolubile. Diamo allora, senza dimostrazione, il:

Teorema 8.11 *Sia S un sistema lineare risolubile, e siano A e A' rispettivamente la matrice dei coefficienti di S e la matrice completa di S. Sia n il rango di A (e anche di A', dato che S è risolubile) e sia B un minore invertibile di A di ordine n. Allora il sistema S è equivalente al **sistema ridotto** SR che si ottiene considerando solo le n equazioni di S corrispondenti alle righe di B. Dunque:*

$$\operatorname{Sol}(S) = \operatorname{Sol}(SR).$$

Il teorema 8.11 ci dice che, scelte in modo opportuno n equazioni di S, le altre sono conseguenza di queste n.

Qualche esempio può aiutare a chiarire meglio:

Esempio 8.12 Riprendiamo il sistema S dell'esempio 8.7:

$$S\colon \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \\ 6x + 9y - z - 2w = 3 \end{cases}$$

Abbiamo visto che S è risolubile, che la sua matrice dei coefficienti A ha rango 2 e che un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, il minore B formato dalla prima e seconda riga e dalla prima e terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per formare B abbiamo utilizzato la prima e seconda riga di A: dunque S è equivalente al sistema ridotto:

$$SR\colon \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \end{cases}$$

formato dalla prima e seconda equazione di S.

Bene, essere passati da un sistema risolubile a un sistema ridotto ad esso equivalente ha semplificato un po' le cose ma ancora non si vede come sia possibile trovare le soluzioni del sistema. Notiamo che la matrice dei coefficienti del sistema ridotto SR è:

$$\bar{A} \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo evidenziato il minore B di ordine 2 con determinante diverso da 0 già trovato in precedenza. Proviamo ora a riscrivere il sistema SR nel modo seguente:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3y + 3w \\ 4x + z = 2 - 6y - w \end{cases}$$

Non abbiamo fatto altro che portare a secondo membro le incognite y e w i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore B. Se osserviamo il sistema scritto in questo modo e dimentichiamo per un istante ciò che c'è a secondo membro, potrebbe sembrare un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x e z la cui matrice dei coefficienti è il minore B, dunque invertibile. Sembra quindi un sistema Crameriano ma non lo è, perché a secondo membro non abbiamo dei termini noti ma delle incognite. Assegnando ora a y e w dei valori arbitrari, ad esempio ponendo $y = 1$ e $w = -2$, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2z = -8 \\ 4x + z = -2 \end{cases}$$

Questo è un sistema Crameriano in x e z, la cui unica soluzione è (svolgendo i calcoli) $x = -\frac{6}{5}$, $z = \frac{14}{5}$. Abbiamo dunque trovato una soluzione del sistema ridotto SR e quindi anche del sistema S, precisamente:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{14}{5} \\ w = -2 \end{cases}$$

Volendo potremmo verificare che effettivamente questi valori risolvono il sistema, sostituendoli nelle equazioni di S:

$$S\colon \begin{cases} 2\left(-\dfrac{6}{5}\right) + 3\cdot 1 - 2\dfrac{14}{5} - 3(-2) = 1 \\ 4\left(-\dfrac{6}{5}\right) + 6\cdot 1 + \dfrac{14}{5} + (-2) = 2 \\ 6\left(-\dfrac{6}{5}\right) + 9\cdot 1 - \dfrac{14}{5} - 2(-2) = 3 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto delle identità e quindi la soluzione trovata è corretta. Potrebbero però esserci altre soluzioni. Se infatti assegniamo a y e w altri valori arbitrari, troviamo un sistema Crameriano in x e z dalla cui soluzione otteniamo una soluzione per il sistema SR. È chiaro che non possiamo sostituire a uno a uno tutti i valori possibili (sono infiniti), però possiamo trattare y e w come fossero dei parametri e risolvere il sistema in x e w così ottenuto. Se poniamo allora $y = h$ e $w = k$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3h + 3k \\ 4x + z = 2 - 6h - k \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema con la regola di Cramer troviamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3h+3k & -2 \\ 2-6h-k & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{(1-3h+3k) - (2-6h-k)(-2)}{10} = \frac{5-15h+k}{10},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3h+3k \\ 4 & 2-6h-k \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{2(2-6h-k) - 4(1-3h+3k)}{10} = -\frac{7}{5}k.$$

Le soluzioni del sistema SR e, quindi di S, sono date da:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5-15h+k}{10} \\ y = h \\ z = -\dfrac{7}{5}k \\ w = k \end{cases}$$

al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Abbiamo finalmente risolto il nostro sistema.

Ogni qual volta si determinano le soluzioni di un sistema è buona norma controllare se si è fatto qualche errore di calcolo. Possiamo verificare che le soluzioni così trovate sono corrette sostituendo le espressioni trovate nelle equazioni del sistema S. Sostituendo ad esempio nella prima equazione di S troviamo:

$$2\frac{5-15h+k}{10} + 3h - 2\left(-\frac{7}{5}k\right) - 3k = 1 - 3h + \frac{1}{5}k + 3h + \frac{14}{5}k - 3k = 1.$$

Abbiamo quindi un'identità. Con analoghi calcoli possiamo verificare che le soluzioni trovate soddisfano anche le altre equazioni. △

Osservazione 8.13 Nell'esempio precedente abbiamo verificato che le soluzioni trovate soddisfacessero effettivamente le equazioni del sistema. Questo è solitamente un buon metodo per verificare di non aver fatto errori concettuali o di calcolo: se infatti una delle equazioni non fosse stata verificata, potevamo affermare che da qualche parte avevamo fatto un errore e cercare un errore.

Se però la verifica va a buon fine ciò non significa che sicuramente abbiamo risolto correttamente il sistema. Se, ad esempio, avessimo trovato come soluzioni del sistema S:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}h \\ y = h \\ z = 7 \\ w = -5 \end{cases}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$, avremmo potuto verificare facilmente che sostituendo queste espressioni nelle equazioni del sistema S si ottengono delle identità. Questo però non è sufficiente ad assicurarci di non avere fatto errori: infatti sappiamo che ci sono anche altre soluzioni oltre a quelle che stiamo considerando, ad esempio le soluzioni per cui si ha $z \neq 7$.

In effetti sostituendo le soluzioni che abbiamo trovato nelle equazioni del sistema, verifichiamo solo che quelle che abbiamo trovato siano effettivamente soluzioni, ma non stiamo verificando che siano **tutte** le soluzioni. Tuttavia questo tipo di verifica, anche se non può garantire di avere risolto correttamente il sistema, è comunque utile perché permette spesso di individuare la presenza di errori. Questa verifica perde ovviamente senso se arriviamo a stabilire che un certo sistema non è risolubile: in tal caso infatti, non determiniamo nessuna soluzione che può essere sostituita nelle equazioni. $\triangle$

Ci rendiamo conto facilmente che il procedimento risolutivo utilizzato nell'esempio 8.12 può essere generalizzato a un qualsiasi sistema. Vediamo qualche altro esempio per chiarirci le idee:

Esempio 8.14 Consideriamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Notiamo che questo sistema differisce dal sistema dato nell'esempio 8.9 solo per il termine noto dell'ultima equazione. In particolare sappiamo che la matrice A dei coefficienti ha rango 2 e che un minore di A di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, il minore B evidenziato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli si vede che anche la matrice completa del sistema ha rango 2 e, pertanto, il sistema è risolubile (come al solito, per calcolare il rango della matrice completa del sistema è sufficiente considerare gli orlati di B con ogni possibile riga e con la colonna dei termini noti). Poiché per formare il minore B abbiamo utilizzato le prime due righe di A, possiamo dire che il sistema S è equivalente al sistema SR formato dalle prime due equazioni di S:

$$SR\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Per formare il minore B abbiamo utilizzato le prime due colonne di A, cioè quelle corrispondenti ai coefficienti di x_1 e x_2. Portiamo allora a secondo membro le altre incognite, cioè x_3 e x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = \phantom{1 +{}} 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

Ora poniamo $x_3 = h$ e $x_4 = k$ e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + h - k \\ 2x_1 + x_2 = \phantom{1 +{}} 3h - 2k \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema in x_1 e x_2 con la regola di Cramer troviamo:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2h - k \\ x_2 = 2 \phantom{{}+{}} - h \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema SR e, quindi di S, sono date da:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2h - k \\ x_2 = 2 - h \\ x_3 = h \\ x_4 = \phantom{-1 + 2h - {}}k \end{cases}$$

al variare di h e k in $\mathbb{R}$. △

Esempio 8.15 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S\colon \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Calcoliamo la matrice A dei coefficienti di S e la matrice completa A' del sistema. Abbiamo:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli si nota che si ha:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 2.$$

Il sistema ammette quindi soluzioni. Un minore invertibile di A di ordine 2 è il minore:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formato dalla prima e terza riga di A e dalla prima e terza colonna di A. Consideriamo il sistema ridotto formato dalle equazioni che servono a formare il minore B:

$$SR\colon \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Portiamo a secondo membro l'incognita i cui coefficienti non concorrono a formare il minore B (cioè y) e poniamo tale incognita uguale a un parametro reale h:

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 - 2h \\ x + z = 3 - h \end{cases}$$

Ora risolviamo il sistema Crameriano in x e z così ottenuto:

$$\begin{cases} x = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema SR e, quindi di S, sono date da:

$$\begin{cases} x = 5 - h \\ y = h \\ z = -2 \end{cases}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$. △

Notiamo che il metodo di Rouché-Capelli si basa sulla scelta di un minore invertibile di ordine uguale al rango della matrice del sistema. In generale di minori di tal tipo ve ne è più di uno.

Esercizio di base 8.16 Risolvere il sistema dell'esempio 8.15 utilizzando il minore invertibile C di A formato dalle ultime due righe e ultime due colonne.

Se avete risolto l'esercizio di base 8.16 avrete trovato le soluzioni:

$$\begin{cases} x = h \\ y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$. Queste soluzioni sembrano diverse da quelle determinate nell'esempio 8.15. In effetti non è così.

Esercizio di base 8.17 Spiegare perché non vi è contraddizione.

In generale, dunque, le soluzioni di un medesimo sistema possono essere espresse per mezzo di parametrizzazioni alquanto diverse. Quello che senz'altro non cambia è il numero di parametri. Notiamo infatti che teniamo a primo membro un numero di incognite uguale al rango della matrice del sistema mentre le altre incognite vengono trattate come parametri e portate a secondo membro: dunque il numero di parametri è dato dalla differenza tra il numero delle incognite e il rango della matrice del sistema. Più precisamente:

Osservazione 8.18 Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite. Sia n il rango della matrice del sistema. Allora le soluzioni di S dipendono da $q-n$ parametri. $\triangle$

Esercizio di base 8.19 Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite. Sia n il rango della matrice del sistema. Cosa significa che $n = p$? Cosa significa che $n = q$?

Esempio 8.20 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S\colon \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + \ \ y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice A dei coefficienti di S e la matrice completa A' del sistema. Abbiamo:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli si nota che si ha:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 2.$$

Il sistema ammette quindi soluzioni. Poiché il rango della matrice del sistema è uguale al numero delle incognite possiamo affermare che il sistema ha un'unica soluzione. Un minore invertibile di A di ordine 2 è il minore:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formato dalle prime due righe (e da entrambe le colonne) di A. Consideriamo il sistema ridotto formato dalle equazioni che servono a formare il minore B:

$$SR\colon \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + \ \ y = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema Crameriano: non dobbiamo portare a secondo membro alcuna incognita. Possiamo risolvere il sistema con la regola di Cramer e trovare l'unica soluzione di S:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\triangle$

Esercizio di base 8.21 Determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$\triangle$

Esempio 8.22 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \phantom{{}+x_5} = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 17 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+3x_3} + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice dei coefficienti del sistema

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che il minore B_2 formato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna ha determinante diverso da 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora considerare gli orlati di B fino a che eventualmente ne troviamo uno con determinante non nullo. Facendo i calcoli (sono 6 orlati) vediamo che hanno tutti determinante 0, dunque A ha rango 2. Consideriamo ora la matrice completa del sistema:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di A' consideriamo gli orlati di B con la colonna dei termini noti e con ogni possibile riga e ne calcoliamo i determinanti fino a che eventualmente ne troviamo uno con determinante non nullo, nel qual caso il sistema non sarebbe risolubile. Nel nostro caso invece tutti questi orlati (sono 2) hanno determinante nullo: pertanto A' ha rango 2 e il sistema è risolubile. Poiché per formare il minore B abbiamo utilizzato le prime due righe di A, possiamo dire che il sistema S è equivalente al sistema SR formato dalle prime due equazioni di S:

$$SR\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \phantom{{}+x_5} = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

Per formare il minore B abbiamo utilizzato la prima e terza colonna di A, cioè quelle corrispondenti ai coefficienti di x_1 e x_3. Portiamo allora a secondo membro le altre incognite, cioè x_2, x_4 e x_5:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2x_2 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

Ora poniamo $x_2 = h_1$, $x_4 = h_2$ e $x_5 = h_3$ e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - h_1 - 2h_2 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2h_1 - 3h_2 - h_3 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema Crameriano in x_1 e x_2 troviamo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - h_1 - h_2 - h_3 \\ x_3 = 3 \qquad\;\; - h_2 + h_3 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema SR e, quindi di S, sono date da:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - h_1 - h_2 - h_3 \\ x_2 = \quad\;\; h_1 \\ x_3 = 3 \qquad\;\; - h_2 + h_3 \\ x_4 = \qquad\qquad h_2 \\ x_5 = \qquad\qquad\qquad h_3 \end{cases}$$

al variare di h_1, h_2 e h_3 in $\mathbb{R}$. $\triangle$

8.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.8.8 Sia r il rango di A: allora A possiede almeno un minore di ordine r con determinante non nullo. Sia B un tal minore. Ovviamente B è un minore anche di A' che ha, pertanto, rango almeno r.

EB.8.16 Il sistema S è equivalente al sistema ridotto formato dalla seconda e terza equazione di S

$$SR\colon \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + \;\; z = 3 \end{cases}$$

Portiamo a secondo membro l'incognita i cui coefficienti non concorrono a formare il minore C (cioè x) e poniamo tale incognita uguale a un parametro reale h:

$$\begin{cases} y + 2z = 1 - h \\ y + \;\; z = 3 - h \end{cases}$$

Ora risolviamo il sistema Crameriano in y e z così ottenuto:

$$\begin{cases} y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema SR e, quindi di S, sono date da:

$$\begin{cases} x = h \\ y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$.

EB.8.17 Scegliendo un minore abbiamo determinato le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 5 - h \\ y = h \\ z = -2 \end{cases}$$

Scegliendo un altro minore abbiamo determinato le soluzioni:

$$\begin{cases} x = h \\ y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

Se nella seconda forma cambiamo il nome al parametro otteniamo:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 5 - k \\ z = -2 \end{cases}$$

Ponendo in quest'ultime $k = 5 - h$, otteniamo le soluzioni determinate con il primo metodo. Non vi è quindi alcuna contraddizione.

EB.8.19 Se $n = p$, quando consideriamo il sistema ridotto dobbiamo prendere n equazioni, quindi tutte le equazioni di S. Pertanto tutte le equazioni di S sono necessarie e nessuna è conseguenza delle altre.

Se $n = q$ quando consideriamo il sistema ridotto abbiamo un sistema di n equazioni in q incognite (quindi in questo caso con un numero di equazioni e di incognite uguali) e la matrice del sistema ridotto contiene un minore di ordine n invertibile (dunque la matrice del sistema ridotto è essa stessa invertibile). Il sistema ridotto è pertanto Crameriano. Ciò significa che il sistema S ha un'unica soluzione.

EB.8.21 Abbiamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} \phantom{-x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ \phantom{-x_1 + {}} 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Vediamo innanzitutto se il sistema ha soluzioni. Per il teorema di Rouché-Capelli dobbiamo calcolare i ranghi della matrice A dei coefficienti e della matrice completa A'. Abbiamo:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo innanzitutto il rango della matrice A. Notiamo che il minore B_2 di A ottenuto scegliendo le prime due righe e le prime due colonne è invertibile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\operatorname{rk} A \geq 2$. Dobbiamo considerare gli orlati i B. Iniziamo a orlare B_2 con la terza riga e la terza colonna di A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il minore B_3 così ottenuto ha determinante diverso da 0. Otteniamo un minore C invertibile. non è necessario calcolare il determinante degli altri orlati di B_2. Sappiamo quindi che $\operatorname{rk} A \geq 3$. Dobbiamo ora orlare B_3. L'unico orlato di B_3 è la matrice A stessa. Svolgendo i calcoli si verifica che il determinante di A è uguale a 0. Quindi $\operatorname{rk} A = 3$. Calcoliamo ora il rango della matrice A'. Come al solito, non partiamo da zero ma consideriamo il minore B_3 con determinante non nullo e ne prendiamo gli orlati in A' che non stanno in A, cioè orliamo B_3 con la colonna dei termini noti. Si ottiene così un unico possibile minore:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli si vede che il minore così ottenuto ha determinante nullo. Dunque $\operatorname{rk} A' = 3$, e il sistema ha soluzioni.

Sappiamo che possiamo eliminare le equazioni che non servono a formare il minore B_3. Otteniamo il sistema ridotto:

$$SR\colon \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

equivalente al sistema S.

Portiamo adesso a secondo membro le incognite i cui coefficienti non concorrono a formare il minore B_3 (in questo caso dunque dobbiamo portare a secondo membro solo x_4):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}$$

Assegniamo ora a x_4 il valore di un parametro h:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - h \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - h \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2h \end{cases}$$

e risolviamo il sistema Crameriano parametrico in x_1, x_2 e x_3 così ottenuto. Facendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 - h \\ x_4 = h \end{cases}$$

8.5 Sunto

Definizioni

Sia dato un sistema di p equazioni lineari a coefficienti reali in q incognite:

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $x_1,\ x_2, \dots, x_q$ sono le incognite. Le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix}$$

vengono dette rispettivamente **matrice dei coefficienti del sistema** e **matrice completa del sistema**. Le matrici:

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

vengono dette rispettivamente **matrice colonna dei termini noti** e **matrice colonna delle incognite**.

Una soluzione del sistema S è una q-upla di numeri reali $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q)$ che, sostituiti nelle equazioni del sistema alle incognite $(x_1, x_2, \dots, x_q)$, danno delle identità. Indichiamo con il simbolo $\mathrm{Sol}(S)$ l'insieme delle soluzioni del sistema S. Quindi $\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathbb{R}^q$.

Un sistema si dice **risolubile** se è dotato di soluzioni.

Il sistema S può essere scritto nella forma:

$$AX = B.$$

In tal caso di solito si preferisce indicare le soluzioni sotto forma di matrici a una colonna. L'insieme delle eventuali soluzioni viene quindi considerato come un sottoinsieme di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$.

Teorema di Rouché-Capelli

Teorema (Rouché-Capelli) *Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema.*

Il sistema S è risolubile se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$.

Procedimento di Rouché-Capelli

Teorema *Sia S un sistema lineare risolubile, e siano A e A' rispettivamente la matrice dei coefficienti di S e la matrice completa di S. Sia n il rango di*

A (e anche di A', dato che S è risolubile) e sia B un minore invertibile di A di ordine n. Allora il sistema S è equivalente al ***sistema ridotto*** *SR che si ottiene considerando solo le n equazioni di S corrispondenti alle righe di B. Dunque:*

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(SR).$$

Diamo ora un procedimento per la risoluzione di un sistema lineare S di p equazioni in q incognite. Sia A la matrice del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema.

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante non nullo;

2. calcoliamo il rango della matrice A': per far questo basta calcolare i determinanti degli orlati di B con l'ultima colonna di A' (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe:

• se anche uno solo degli orlati così determinati ha determinante non nullo, il rango di A' è diverso dal rango di A (è anzi esattamente uguale a $1 + \operatorname{rk} A$): il sistema non è risolubile e ci fermiamo;

• se tutti gli orlati così determinati hanno determinante nullo allora $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile: possiamo passare al punto successivo;

3. consideriamo il sistema ridotto SR formato dalle n equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore B. Il sistema ridotto SR è equivalente al sistema S;

4. portiamo a secondo membro (nel sistema SR) le $q - n$ incognite i cui coefficienti non concorrono a formare il minore B;

5. poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri h_1, h_2, ..., h_{q-n} (ovviamente se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

6. risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri h_1, h_2, ..., h_{q-n} e possiamo così scrivere le soluzioni del sistema S combinando le espressioni così ottenute con le assegnazioni dei parametri fatte al punto precedente.

Il procedimento precedente dipende dal minore B che scegliamo. Cambiando B otterremo ovviamente le stesse soluzioni ma parametrizzate in forma diversa.

Osservazione Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite. Sia n il rango della matrice del sistema. Allora le soluzioni di S dipendono da $q - n$ parametri. In particolare se $q = n$ allora il sistema ha un'unica soluzione. $\triangle$

8.6 Esercizi

E.8.1 Determinare le eventuali soluzioni dei sistemi:

$$S_1 : \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$$

E.8.2 Determinare le eventuali soluzioni dei sistemi:

$$S_1 : \begin{cases} x + y \qquad = 3 \\ 3x \qquad + z = 3 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + y + \ \ z = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} x + \ \ y \qquad = 1 \\ x \qquad + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ 3x + 5y + 7z = 4 \end{cases}$$

E.8.3 Determinare le eventuali soluzioni dei sistemi:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

8.7 Soluzioni degli esercizi

E.8.1

$$\text{Sol}(S_1) = \varnothing, \qquad \text{Sol}(S_2) = \{(1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\text{Sol}(S_3) = \varnothing, \qquad \text{Sol}(S_4) = \{(2+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

E.8.2

$$\text{Sol}(S_1) = \left\{ \left(1 - \frac{t}{3}, 2 + \frac{t}{3}, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{Sol}(S_2) = \{(1+t, 1-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\text{Sol}(S_3) = \{(1,0)\}, \qquad \text{Sol}(S_4) = \varnothing,$$
$$\text{Sol}(S_5) = \{(1+t, -2t, t)) \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{Sol}(S_6) = \varnothing.$$

E.8.3

$$\text{Sol}(S_1) = \{(-1-t, -t, 1+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Sol}(S_2) = \varnothing.$$

CAPITOLO 9

Metodo di Gauss

Nel capitolo precedente abbiamo visto il metodo di Rouché-Capelli per la determinazione di eventuali soluzioni di sistemi di p equazioni in q incognite. Questo metodo si fonda sulla determinazione dell'unica soluzione dei sistemi di n equazioni in n incognite in cui la matrice dei coefficienti è invertibile. Si può fare il calcolo di questa soluzione utilizzando il metodo di Cramer, descritto nel capitolo 6. Il metodo di Cramer si basa a sua volta sul calcolo dei determinanti di alcune matrici.

Il numero di operazioni necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine n aumenta molto velocemente al crescere di n. Poiché nelle applicazioni pratiche può essere necessario risolvere sistemi con alcune decine di equazioni e incognite, anche utilizzando un computer il metodo di Rouché-Capelli può risultare non efficiente, e, pertanto, solitamente si implementano altri metodi per la soluzione di un sistema.

Descriviamo qui il metodo di Gauss che, per sistemi con un numero alto di equazioni, è più efficiente del metodo di Rouché-Capelli. Questo metodo consiste, essenzialmente, nel rimpiazzare il sistema di cui si cercano le eventuali soluzioni con un sistema avente le stesse soluzioni per il quale sia abbastanza agevole la loro determinazione.

9.1 Alcuni esempi

Diamo alcuni esempi di sistemi. Potremmo determinare le eventuali soluzioni di ognuno di essi utilizzando il metodo di Rouché-Capelli. Alcune particolarità di questi sistemi ci suggeriranno di determinarne le soluzioni utilizzando altri metodi.

Esempio 9.1 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \qquad\quad 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ \qquad\qquad - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

La particolare forma di questo sistema ci suggerisce di determinare x_4 dalla quarta equazione. Otteniamo:

$$x_4 = 0.$$

Sostituiamo il valore così ottenuto nella terza equazione e ricaviamo x_3. Otteniamo:

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

Sostituiamo i valori di x_3 e x_4 nella seconda equazione e ricaviamo x_2. Otteniamo:

$$x_2 = \frac{1}{6}$$

Sostituiamo infine i valori di x_2, x_3 e x_4 nella prima equazione. Otteniamo:

$$x_1 = -\frac{1}{12}$$

Il sistema ha quindi come unica soluzione:

$$\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right).$$

△

Esempio 9.2 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Anche in questo caso la particolare forma del sistema ci suggerisce come determinare le eventuali soluzioni. Ricaviamo dalla terza equazione

$$x_3 = 2 - x_4.$$

Sostituiamo questa espressione di x_3 nella seconda equazione. Ricaviamo:

$$x_2 = -1.$$

Sostituiamo x_2 e x_3 nella prima equazione. Otteniamo:

$$x_1 = 1$$

Non abbiamo alcuna condizione su x_4. Possiamo quindi assegnare a x_4 il valore di un parametro h e calcolare le altre incognite in dipendenza da h. Le soluzioni del sistema dipendono quindi da un parametro. Esse sono:

$$(1, -1, 2 - h, h)$$

con h parametro reale. △

Esempio 9.3 Vogliamo determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \phantom{\frac{1}{2}}x_4 = 1 \\ 2x_3 - \phantom{\frac{1}{2}}x_4 = 2 \\ - \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Anche in questo caso la particolare forma del sistema ci suggerisce come determinare le eventuali soluzioni. Dall' ultima equazione abbiamo:

$$x_4 = -7.$$

Sostituendo il valore ottenuto di x_4 nella terza equazione otteniamo:

$$x_3 = -\frac{5}{2}.$$

Sostituendo i valori ottenuti di x_3 e x_4 nella prima equazione otteniamo:

$$x_1 = -x_2 + \frac{21}{2}.$$

Non abbiamo alcuna altra condizione su x_2. Possiamo quindi assegnare a x_2 il valore di un parametro h e calcolare le altre incognite in dipendenza da h. Le soluzioni del sistema dipendono quindi da un parametro. Esse sono:

$$\left(-h + \frac{21}{2}, h, -\frac{5}{2}, -7\right)$$

con h parametro reale. △

Esempio 9.4 Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\; - x_2 - x_3 \qquad\;\; = -2 \end{cases}$$

Cerchiamone le eventuali soluzioni.

Dalla seconda equazione ricaviamo:

$$x_2 = 2 - x_3.$$

Sostituendo x_2 nella prima equazione otteniamo:

$$x_1 = -1 + 2x_3 - x_4.$$

Non abbiamo altre condizioni su x_3 e x_4. Possiamo quindi assegnare a x_3 il valore di un parametro h_1 e a x_4 il valore di un parametro h_2 e calcolare le altre incognite in dipendenza da h_1 e h_2. Le soluzioni sono quindi:

$$(-1 + 2h_1 - h_2, 2 - h_1, h_1, h_2)$$

con h_1 e h_2 parametri reali. △

Negli esempi dati la particolare forma dei sistemi ci ha suggerito un metodo per determinarne le soluzioni. Ma quale è questa particolare forma che li accomuna?

Per rispondere a questa domanda scriviamo le matrici dei coefficienti dei quattro sistemi. Eccole:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sono tutte matrici **a scalini**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tutti gli elementi che si trovano sotto la **scala** sono nulli.

Nella prima matrice abbiamo quattro scalini di altezza uguale a una riga e larghezza uguale a una colonna.

Nella seconda matrice abbiamo tre scalini di altezza uguale a 1, il primo di larghezza uguale a 2 e gli altri due di larghezza uguale a 1.

Nella terza matrice abbiamo tre scalini di altezza uguale a 1, i primi due di larghezza uguale a 1 e il terzo di larghezza uguale a 2.

Nella quarta matrice abbiamo due scalini di altezza uguale a 1, il primo di larghezza uguale a 1 e il secondo di larghezza uguale a 3.

Quando noi parleremo di matrici a scalini, intenderemo che gli scalini devono avere tutti altezza uguale a 1.

Ecco una generica matrice triangolare superiore invertibile di ordine 4:

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix},$$

dove con $\bullet$ si è indicato un qualsiasi numero reale non nullo mentre con $*$ si è indicato un qualsiasi numero reale. È una matrice a scalini.

È facile vedere che ogni matrice quadrata a scalini è una matrice triangolare. Però non tutte le matrici triangolari superiori sono matrici a scalini. Ecco un esempio di matrice triangolare superiore di ordine 4 in cui un elemento della diagonale principale è nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Non è una matrice a scalini nel senso da noi detto: uno scalino ha altezza 2.

Ecco altri esempi di matrici a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio di base 9.5 Stabilire quali delle seguenti matrici sono matrici a scalini e quali no:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

9.2 Metodo di Gauss

Vogliamo descrivere un metodo per la determinazione delle eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari diverso da quello di Rouché-Capelli.

In effetti nel capitolo 1 abbiamo già utilizzato un metodo diverso da quello di Rouché-Capelli.

Esempio 9.6 Nell'esempio 1.5 abbiamo considerato il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

Per determinarne le soluzioni, abbiamo sottratto alla seconda equazione la prima. Abbiamo ottenuto il sistema equivalente:

$$S'\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \phantom{x+{}} 3y = 2 \end{cases}$$

Il sistema S ha una e una sola soluzione:

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Scriviamo la matrice dei coefficienti del sistema S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti del sistema S' è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Essa è una matrici a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

△

Esempio 9.7 Nell'esempio 1.7 abbiamo sostituito il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

con il sistema equivalente:

$$S'\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2. Ovviamente questo sistema non ha soluzioni. Anche in questo caso la matrice del sistema S' è a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

Esempio 9.8 Nell'esempio 1.8 abbiamo sostituito il sistema

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

con il sistema:

$$S'\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

sottraendo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per 2. L'insieme delle soluzioni è

$$\{(1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

△

In ognuno dei sistemi appena visti abbiamo sostituito il sistema iniziale con uno la cui matrice dei coefficienti fosse a scalini. Quest'ultimo sistema è ottenuto dal sistema iniziale sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per un numero reale opportuno.

Il metodo di Gauss non è altro che una generalizzazione di questo procedimento. Tale procedimento si compone di vari passi: ad ogni passo modificheremo il sistema per mezzo di una delle operazioni descritte nel capitolo 1 e che richiamiamo qui per comodità.

Proposizione 9.9 *Se in un sistema S sommiamo a una equazione un'altra equazione del sistema moltiplicata per una costante, otteniamo un sistema S' equivalente al sistema S.*

Proposizione 9.10 *Se in un sistema S moltiplichiamo un'equazione per una costante non nulla, otteniamo un sistema S' equivalente al sistema S.*

Proposizione 9.11 *Se in un sistema scambiamo tra loro due equazioni, otteniamo un sistema ad esso equivalente.*

Ovviamente non applicheremo questi passi in maniera casuale: il nostro obiettivo è arrivare ad avere un sistema equivalente al sistema di partenza la cui forma sia più semplice (in particolare vorremo un sistema la cui matrice sia a scalini).

Illustreremo questo metodo per mezzo di alcuni altri esempi. Dopo aver visto questi esempi sarà chiaro che tale metodo è utilizzabile per qualsiasi sistema.

Esempio 9.12 Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \phantom{{}+y} + z = 1 \\ x + y \phantom{{}+z} = 2 \end{cases}$$

Nell'esempio 6.26 abbiamo già determinato l'unica sua soluzione utilizzando il metodo di Cramer.

Vogliamo determinare la soluzione modificando il sistema in modo tale da ottenere una matrice dei coefficienti che sia a scalini.

Consideriamo la matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Facciamo in modo che l'elemento di posto $(2,1)$ sia nullo. Sottraendo alla seconda equazione la prima equazione otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ - y \phantom{{}+z} = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è diventata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per annullare l'elemento di posto $(3,1)$, sottraiamo alla terza equazione la prima. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ - y \phantom{{}+z} = 0 \\ - z = 1 \end{cases}$$

Siamo stati fortunati, oltre all'elemento di posto $(3,1)$, si è annullato anche l'elemento di posto $(3,2)$. La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È una matrice a scalini. Dalla seconda e dalla terza equazione otteniamo $z = -1$ e $y = 0$. Sostituendo questi valori nella prima equazione otteniamo $x = 2$. Il sistema ha quindi una sola soluzione:

$$(2, 0, -1).$$

△

Esempio 9.13 Vogliamo utilizzare lo stesso metodo per determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

La sua matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo annullare gli elementi di posto $(2, 1)$, $(3, 1)$ e $(4, 1)$, vale a dire eliminare l'incognita x_1 dalla seconda, terza e quarta equazione. A tal scopo sottraiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per 2. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo ora alla terza equazione la prima moltiplicata per 3, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \quad - 6x_2 - 8x_3 - 13x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Infine, sottraendo alla quarta equazione la prima moltiplicata per 2, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \quad - 6x_2 - 8x_3 - 13x_4 = -3 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & -13 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando lo stesso procedimento vogliamo ora annullare gli elementi di posto $(3, 2)$ e $(4, 2)$, vale a dire eliminare l'incognita x_2 dalla terza e quarta equazione. Se sommassimo alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per 3, annulleremmo sì l'elemento di posto $(3, 2)$, ma renderemmo non nullo l'elemento di posto $(1, 3)$. Rovineremmo il bel lavoro fatto finora. Utilizzando la prima equazione introdurremmo nuovamente l'incognita x_1 in altre equazioni oltre alla prima. Non coinvolgiamo più la prima equazione nei vari passaggi da un sistema a un sistema ad esso equivalente. Ci conviene allora sottrarre alla terza equazione la seconda moltiplicata per 2. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \phantom{x_1 - 3x_2 - {}} 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ - 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -2 \end{cases}$$

Sottraendo poi alla quarta equazione la seconda, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \phantom{x_1 - 3x_2 - {}} 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Siamo stati fortunati: anche l'elemento di posto $(4,3)$ si è annullato (vale a dire x_3 è stata eliminata dalla quarta equazione. La matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

è una matrice a scalini. Abbiamo già determinato le soluzioni di questo sistema nell'esempio 9.1. Vi è una sola soluzione data da:

$$\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right).$$

△

Esempio 9.14 Determiniamo le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ 4x + 6y + 3z = 8 \end{cases}$$

Utilizziamo il solito metodo. Sottraiamo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $\frac{1}{2}$. Successivamente sottraiamo alla terza equazione la prima moltiplicata per 2. Otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ - y + \dfrac{1}{2}z = 2 \\ - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Ora dobbiamo eliminare la y dalla terza equazione. Non utilizziamo la prima equazione per far ciò ma la seconda. Sommiamo alla terza equazione la seconda moltiplicata per -2:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ - y + \dfrac{1}{2}z = 2 \\ \phantom{2x - y + {}} 0 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un'identità come ultima equazione. La matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice a scalini. Le soluzioni del sistema sono presto trovate. Dalla seconda equazione otteniamo $y = -2 + \frac{1}{2}z$. Sostituendo questa espressione per y nella prima equazione otteniamo $x = 5 - \frac{3}{2}z$. Le soluzioni dipendono quindi da un parametro reale h:

$$\left(5 - \frac{3}{2}h, -2 + \frac{1}{2}h, h\right).$$

△

Esempio 9.15 Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Nell'esempio 8.14 ne abbiamo già determinato le soluzioni utilizzando il procedimento di Rouché-Capelli. Vogliamo ora determinarne le soluzioni riducendo a scalini la matrice dei coefficienti. Annulliamo gli elementi di posto $(2,1)$, $(3,1)$ e $(4,1)$, cioè eliminiamo x_1 dalle equazioni successive alla prima. Per far ciò sommiamo successivamente alla seconda, terza e quarta equazione la prima equazione moltiplicata per opportuni numeri reali. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ -2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Annulliamo gli elementi di posto $(3,2)$ e $(4,2)$ sommando successivamente alla terza e alla quarta equazione la seconda equazione moltiplicata per opportuni numeri reali. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già determinato le soluzioni di questo sistema nell'esempio 9.4. Le soluzioni sono:

$$(-1 + 2h_2 - h_1, 2 - h_2, h_2, h_1)$$

con h_1 e h_2 parametri reali. △

Esempio 9.16 Consideriamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Abbiamo già determinato le sue soluzioni nell'esercizio di base 8.21 utilizzando il metodo di Rouché-Capelli. Vogliamo ora determinarne le eventuali soluzioni modificando il sistema in modo tale da arrivare a una matrice a scalini. Notiamo che non si possono annullare i coefficienti della x_1 nella seconda, terza e quarta equazione sommando ad esse la prima equazione moltiplicata per un fattore di proporzionalità, perché x_1 non appare nella prima equazione. A prima vista il metodo utilizzato finora non sembra utilizzabile.

Non ci scoraggiamo per così poco. Possiamo infatti scambiare tra loro le prime due equazioni. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Ora possiamo procedere con il solito metodo.

Sommando alla terza equazione la prima equazione otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Sommando alla terza e alla quarta equazione la seconda moltiplicate per -4 e -5 rispettivamente otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \\ -x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Sottraendo alla quarta equazione la terza equazione otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è ora a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così ottenuto il sistema dell'esempio 9.2. Le sue soluzioni sono:

$$(1, -1, 2-h, h)$$

con h parametro reale. △

Esempio 9.17 Consideriamo il sistema:

$$S\colon \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Determiniamone le eventuali soluzioni con la riduzione della matrice dei coefficienti a matrice a scalini. Notiamo che, a parte il termine noto della quarta equazione, il sistema è identico a quello dell'esempio precedente. Svolgendo in modo identico i primi tre passaggi otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \\ -x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Sottraendo alla quarta equazione la terza equazione otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema non ammette quindi soluzioni. △

Esempio 9.18 Vogliamo determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Sottraiamo la prima equazione dalla seconda e la prima equazione moltiplicata per 2 dalla terza. In tal modo eliminiamo x_1 dalla seconda e terza equazione e otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Per eliminare x_3 dalla terza equazione, sottraiamo la seconda equazione moltiplicata per $\frac{1}{2}$ dalla terza:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 - x_4 = 2 \\ -\frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto il sistema dell'esempio 9.3, le cui soluzioni sono:

$$\left(-h+\frac{21}{2}, h, -\frac{5}{2}, -7\right)$$

△

Il metodo di Gauss dovrebbe ora essere chiaro. È quello che abbiamo utilizzato in tutti questi esempi. Per essere sicuri facciamo ancora un esempio. In esso mettiamo in luce i principali passi del metodo di Gauss.

Esempio 9.19 Cerchiamo le eventuali soluzioni del seguente sistema utilizzando il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

• Annulliamo i coefficienti di x_1 nella seconda, terza e quarta equazione sommando ad esse la prima equazione moltiplicata per opportuni numeri reali (in questo caso -2, -3 e 0 rispettivamente). Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_3 - 2x_4 = 11 \\ -2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che è stato possibile fare ciò perché il coefficiente di x_1 nella prima equazione è non nullo. Se esso fosse stato nullo, avremmo scambiato la prima equazione con la prima delle successive equazioni avente il coefficiente di x_1 non nullo. Se tutte le equazioni hanno il coefficiente di x_1 nullo, non dobbiamo far niente.

• Non utilizziamo più la prima equazione fino al momento della determinazione delle soluzioni. Consideriamo la prima incognita che appare nelle equazioni successive alla prima: è x_2. Notiamo che il coefficiente di x_2 nella seconda equazione è nullo, mentre quello nella terza è non nullo. Scambiamo allora tra loro la seconda e la terza equazione. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17 \\ x_3 - 2x_4 = 11 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora eliminare x_2 dalle equazioni successive alla seconda. Il coefficiente di x_2 nella terza equazione è già nullo. Non lo è quello della quarta. Sommiamo pertanto alla quarta equazione la seconda equazione moltiplicata per $\frac{1}{2}$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17 \\ x_3 - 2x_4 = 11 \\ -3x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{17}{2} \end{cases}$$

• Non utilizziamo più la prima e la seconda equazione fino al momento della determinazione delle soluzioni. Consideriamo la prima incognita che appare nelle equazioni successive alla seconda: è x_3. Sommando alla quarta equazione la terza equazione moltiplicata per 3 otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17 \\ x_3 - 2x_4 = 11 \\ - \dfrac{11}{2}x_4 = \dfrac{83}{2} \end{cases}$$

• Ricaviamo ora x_4 dalla quarta equazione, poi sostituiamo il valore così ottenuto nella terza equazione e ricaviamo x_3 e così via. L'unica soluzione del sistema è, quindi:

$$\left(-\frac{3}{11}, \frac{159}{11}, -\frac{45}{11}, -\frac{83}{11}\right).$$

△

Esercizio di base 9.20 Determinare le eventuali soluzioni del seguente sistema utilizzando il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10 \\ -x_1 - x_2 - 4x_4 = -9 \end{cases}$$

△

9.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.9.5 Solo A_2 è una matrice a scalini:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EB.9.20 Per annullare l'elemento di posto $(2,1)$ sommiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ - x_4 = -2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10 \\ -x_1 - x_2 - 4x_4 = -9 \end{cases}$$

Per annullare l'elemento di posto $(3,1)$ sommiamo alla terza equazione la prima moltiplicata per -4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ - x_4 = -2 \\ - x_3 - x_4 = -10 \\ -x_1 - x_2 - 4x_4 = -9 \end{cases}$$

Per annullare l'elemento di posto $(4, 1)$ sommiamo alla quarta equazione la prima:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\quad - \ x_4 = -2 \\ \qquad\quad - x_3 - \ x_4 = -10 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Bene, ora x_1 non compare nelle equazioni successive alla prima. La prima equazione a comparire nelle equazioni successive alla prima è x_3 che non compare nella seconda equazione ma nella terza. Scambiamo allora la seconda equazione con la terza:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\quad - x_3 - \ x_4 = -10 \\ \qquad\qquad\quad - \ x_4 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Ora eliminiamo x_3 dalle equazioni successive alla seconda. Poiché x_3 non compare nella terza equazione, per far ciò basta sommare alla quarta equazione la seconda equazione:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\quad - x_3 - \ x_4 = -10 \\ \qquad\qquad\quad - \ x_4 = -2 \\ \qquad\qquad\quad - 3x_4 = -14 \end{cases}$$

La prima incognita che compare nelle equazioni successive alla seconda è x_4. Quest'incognita compare nella terza equazione: eliminiamola dalla quarta equazione, sommando alla quarta equazione la terza moltiplicata per -3. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\quad - x_3 - \ x_4 = -10 \\ \qquad\qquad\quad - \ x_4 = -2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = -8 \end{cases}$$

Dalla quarta equazione vediamo che il sistema non ha soluzioni.

9.4 Sunto

Metodo di Gauss

Il metodo di Gauss per la determinazione delle eventuali soluzioni di un sistema S consiste nel trasformare il sistema S in un sistema S' ad esso equivalente avente la matrice dei coefficienti **a scalini**. Ecco schematizzate alcune matrici a scalini:

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove con $\bullet$ si sono indicati numeri reali non nulli e con $*$ numeri reali qualsiasi. Il metodo per ottenere una matrice a scalini è descritto nell'esempio 9.19.

9.5 Esercizi

E.9.1 Si consideri il sistema a coefficienti reali nelle incognite x, y, z e w:

$$\begin{cases} y - z + w = 1 \\ 2x + 3y + z - 2w = 3 \\ 4x + 7y + z - 3w = 7 \end{cases}$$

a. risolvere il sistema usando il teorema di Rouché-Capelli;

b. risolvere il sistema con il teorema di Rouché-Capelli, ma utilizzando un minore di ordine massimo con determinante non nullo, diverso da quello utilizzato al punto precedente;

c. risolvere il sistema usando il metodo di Gauss.

E.9.2 Riprendere gli esercizi del capitolo 8 e risolverli di nuovo utilizzando il metodo di Gauss.

9.6 Soluzioni degli esercizi

E.9.1

a. Consideriamo la matrice del sistema:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che la matrice ha rango 2 e che un minore di ordine 2 con determinante diverso da 0 è, ad esempio, il minore M formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango della matrice completa del sistema è ora sufficiente calcolare il determinante degli orlati di M che si ottengono aggiungendo la colonna dei termini noti e una riga. Di tali minori ce ne è uno solo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è 0, quindi anche la matrice completa del sistema ha rango 2. Sappiamo allora che il sistema è risolubile e che è equivalente a quello formato dalle due equazioni corrispondenti al minore M:

$$\begin{cases} y - z + w = 1 \\ 2x + 3y + z - 2w = 3 \end{cases}$$

Portiamo ora a secondo membro le incognite i cui coefficienti non concorrono a formare il minore M, cioè z e w:

$$\begin{cases} y = 1 + z - w \\ 2x + 3y = 3 - z + 2w \end{cases}$$

Assegniamo ora a z e w valori parametrici ponendo $z = h$ e $w = k$ e risolviamo il sistema Crameriano parametrico nelle incognite z e w così ottenuto:

$$\begin{cases} y = 1 + h - k \\ 2x + 3y = 3 - h + 2k \end{cases}$$

Le soluzioni sono allora:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+h-k & 1 \\ 3-h+2k & 3 \end{vmatrix}}{\det M} = \dfrac{4h-5k}{-2} = \dfrac{-4h+5k}{2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1+h-k \\ 2 & 3-h+2k \end{vmatrix}}{\det M} = \dfrac{-2-2h+2k}{-2} = 1+h-k \end{cases}$$

Dunque le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x = -2h + \dfrac{5}{2}k \\ y = 1 + h - k \\ z = h \\ w = k \end{cases}$$

con h e k parametri reali.

b. Supponiamo ora di considerare un altro minore N di ordine 2 con determinante diverso da 0 estratto dalla matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Allora il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y - z + w = 1 \\ 4x + 7y + z - 3w = 7 \end{cases}$$

e trattando come parametri le incognite y e w non coinvolte nel minore N troviamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 2 - 2h + \dfrac{1}{2}k \\ y = h \\ z = -1 + h + \phantom{\frac{1}{2}}k \\ w = \phantom{-1 + 2h + \frac{1}{2}}k \end{cases}$$

Ovviamente le soluzioni devono essere le stesse trovate prima: una stessa soluzione particolare si trova in un caso o nell'altro in corrispondenza di valori diversi dei parametri. Ad esempio nel primo caso in corrispondenza dei valori $h = k = 0$ si trova la soluzione $\{x = 0, y = 1, z = 0, w = 0\}$ che nel secondo caso si trova in corrispondenza dei valori dei parametri $h = 1$, $k = 0$.

c. Risolviamo ora il sistema con il metodo di Gauss. Scambiamo allora la prima equazione con la seconda:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 2w = 3 \\ y - z + w = 1 \\ 4x + 7y + z - 3w = 7 \end{cases}$$

Sommiamo ora la prima equazione moltiplicata per -2 alla terza:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 2w = 3 \\ y - z + w = 1 \\ y - z + w = 1 \end{cases}$$

Sommando ora la seconda equazione moltiplicata per -1 alla terza troviamo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 2w = 3 \\ y - z + w = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A questo punto assegniamo a z il valore del parametro h e a w il valore del parametro k: dalla seconda equazione troviamo allora il valore di y, e dalla prima il valore di x:

$$\begin{cases} x = \quad - 2h + \dfrac{5}{2}k \\ y = 1 + h - k \\ z = \qquad h \\ w = \qquad\quad k \end{cases}$$

Poiché i parametri usati sono gli stessi utilizzati nel primo metodo di soluzione, le soluzioni sono espresse esattamente nella stessa forma.

E.9.2 Ovviamente si ottengono le stesse soluzioni ottenute utilizzando il metodo di Rouché-Capelli. In alcuni casi otteniamo però diverse parametrizzazioni.

CAPITOLO 10

Applicazioni del metodo di Gauss

Nel capitolo precedente abbiamo descritto il metodo di Gauss e abbiamo visto la sua efficacia per la determinazione delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Per mezzo di questo metodo si sostituisce un sistema con uno ad esso equivalente avente la matrice dei coefficienti a scalini.

Con il metodo di Gauss possiamo quindi ottenere, a partire da una qualsiasi matrice, una matrice a scalini. Ebbene, quest'ultima matrice ha lo stesso rango della matrice originaria.

Vedremo che è molto semplice calcolare il rango di una matrice a scalini. Tutto ciò ci dà un metodo per determinare il rango di una matrice. Esso, per matrici grandi, è molto più efficiente del metodo studiato in precedenza che, come sappiamo, si basa sul calcolo dei determinanti dei minori della matrice.

In particolare possiamo ottenere, con il procedimento di Gauss, a partire da una matrice quadrata, una matrice a scalini. Il determinante di quest'ultima è uguale od opposto al determinante della matrice originaria.

Ricordiamo che una matrice quadrata a scalini è una particolare matrice triangolare e che il determinante di una matrice triangolare uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci dà un metodo per la determinazione del determinante di una matrice quadrata che è estremamente efficiente nel caso in cui l'ordine della matrice sia alto.

Per fare questo introdurremo il concetto di operazione elementare su una matrice. Illustreremo poi i metodi di Gauss per la determinazione del rango di una qualsiasi matrice e del determinante di una qualsiasi matrice quadrata.

10.1 Operazioni elementari

Nel capitolo 9 abbiamo descritto il metodo di Gauss. Siamo in grado, per mezzo di esso, di sostituire a un qualsiasi sistema un altro sistema ad esso equivalente la cui matrice dei coefficienti sia a scalini. Per far ciò abbiamo utilizzato due tipi di operazioni. Il primo consiste nel sommare a una equazione del sistema un'altra equazione del sistema moltiplicata per un numero reale. Il secondo consiste nello scambiare tra loro due equazioni del sistema. In corrispondenza a ciò la matrice del sistema varia per mezzo di una delle operazioni seguenti:

- Sommare alla riga i-esima della matrice la riga j-esima moltiplicata per un numero reale k, con $i \neq j$.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**.

Esempio 10.1 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ottenere a partire da questa matrice una matrice a scalini applicando successivamente alcune operazioni elementari di riga secondo il metodo di Gauss. Come prima cosa sommiamo alla terza riga la prima moltiplicata per -2. Otteniamo la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo tra loro la seconda e la terza riga della matrice A'. Otteniamo la matrice a scalini:

$$A'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base 10.2 Dimostrare che si può passare dalla matrice A'' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga.

Si può generalizzare tutto ciò. È facile dimostrare che, se si può passare da una matrice A a una matrice A' per mezzo di successive operazioni elementari di riga, allora si può passare dalla matrice A' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga. Questo suggerisce la:

Definizione 10.3 Due matrici si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di un numero finito di successive operazioni elementari di riga. △

La definizione di equivalenza per riga è effettivamente una relazione di equivalenza. Infatti soddisfa le proprietà

1. **Proprietà riflessiva** Ogni matrice A è equivalente per riga a sé stessa.

   Infatti per passare da A a sé non è necessaria nessuna operazione (potremmo dire che servono 0 operazioni elementari).

2. **Proprietà simmetrica** Se una matrice A è equivalente per riga a una matrice A' allora A è equivalente a A'.

Basta infatti ripercorre a ritroso ciascun passaggio: in maniera analoga a quanto fatto per i sistemi nell'esercizio di base 1.19, si vede facilmente che ciascun passaggio a ritroso è, a sua volta, un'operazione elementare.

3. **Proprietà transitiva** Se una matrice A è equivalente per riga a una matrice A' e se A' è equivalente per riga a una matrice A'' allora A è equivalente a A''.

Se passiamo prima da A a A' e poi da A' a A'' per mezzo di operazioni elementari, siamo, di fatto, passati da A a A'' per mezzo di operazioni elementari.

10.2 Calcolo del determinante

Supponiamo ora di avere due matrici quadrate A e A' equivalenti per riga. Ci chiediamo in che relazione sia il loro determinante. Poiché possiamo passare da A ad A' per mezzo di operazioni elementari di riga dobbiamo allora chiederci come cambia il determinante dopo ciascuna di tali operazioni. Sappiamo già (si veda la proposizione 5.18) che scambiando tra loro due righe, si ottiene una matrice di determinante opposto a quella di partenza. Per quanto riguarda l'altro tipo di operazione elementare abbiamo la proposizione la cui dimostrazione riportiamo nel paragrafo A.10

Proposizione 10.4 *Sia A una matrice quadrata e sia A' la matrice ottenuta da A sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per k. Allora* $\det A = \det A'$.

Ora sappiamo come varia il determinante quando applichiamo a una matrice una operazione elementare di riga. Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, allora quando nei vari passaggi applichiamo un'operazione di somma a una riga di un multiplo di un'altra riga il determinante non cambia, quando invece applichiamo uno scambio di righe il determinante cambia di segno. Pertanto dobbiamo contare il numero di operazioni di scambio di righe necessari per passare da A ad A': se è pari il determinante di A e di A' coincidono, se è dispari il determinante di A e di A' sono opposti. In entrambi i casi possiamo dedurre il determinante di A dal determinante di A'. Riassumiamo tutto ciò nella:

Proposizione 10.5 *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A': tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma a una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Utilizzando il metodo di Gauss possiamo ottenere da una matrice quadrata A una matrice quadrata a scalini ad essa equivalente per righe. È facile vedere che una matrice quadrata a scalini è triangolare superiore e, quindi, il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci suggerisce un metodo per il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Metodo 10.6 (di Gauss per il calcolo del determinante) Calcoliamo il determinante di una matrice quadrata data A nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

3. Si ha quindi:
$$\det A = (-1)^m \det A'.$$
△

Esempio 10.7 Calcoliamo il determinante della matrice A:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già determinato nell'esempio 9.12 una matrice a scalini ad essa equivalente:
$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A' è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale ed è, dunque, uguale a 1. Per passare da A ad A' non abbiamo fatto alcun scambio di righe (cioè un numero pari di scambi): il determinante di A è allora uguale al determinante di A' cioè:
$$\det A = \det A' = 1.$$
△

Esempio 10.8 Calcoliamo il determinante della matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una matrice a scalini ad essa equivalente. Scambiamo la seconda riga con la terza:
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:
$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini, equivalente per righe alla matrice A. La matrice A' ha determinante uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale, cioè 5. Per passare da A ad A' abbiamo operato un numero dispari di scambi di riga (cioè uno solo): il determinante di A è allora uguale all'opposto del determinante di A' cioè:

$$\det A = -\det A' = -5.$$

△

Esempio 10.9 Vogliamo calcolare il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la quarta riga con la prima:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:

$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto è inutile proseguire: anche se la matrice che abbiamo ottenuto non è a scalini (dovremmo fare un ulteriore passaggio) è comunque una matrice triangolare. Il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Poiché uno fra essi è 0, il determinante di A' è 0. Pertanto anche A ha determinante 0: infatti il determinante di A è uguale oppure opposto al determinante di A'. In questo caso non ci interessa quindi contare il numero di scambi utilizzati per passare da A ad A'. △

10.3 Calcolo del rango

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che relazione ci sia tra di determinanti di matrici quadrate equivalenti per riga. Ci chiediamo ora che relazione ci sia tra i ranghi di matrici (anche non quadrate) equivalenti per riga. Non è difficile dimostrare il:

Teorema 10.10 *Se A e A' sono matrici (non necessariamente quadrate) equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A.$$

La dimostrazione richiede un po' di attenzione: diamo i dettagli nel paragrafo A.10.

Quindi, se dobbiamo calcolare il rango di una matrice possiamo considerare una matrice ad essa equivalente per righe per cui, possibilmente, il calcolo del rango sia facile. In particolare, sappiamo che con il metodo di Gauss è possibile, data una matrice A, determinare una matrice a scalini equivalente per righe alla matrice A. Ci chiediamo se questo ci aiuta, cioè se sia facile determinare il rango di una matrice a scalini. Consideriamo allora qualche esempio:

Esempio 10.11 Consideriamo la matrice a scalini:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha 3 scalini. Consideriamo ora il minore di A formato dalle righe non nulle di A e dalle tre colonne contenenti gli scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo minore è una matrice triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale ed è quindi diverso da 0. Pertanto A ha rango almeno 3. D'altra parte ogni minore di A di ordine 4 deve avere una riga tutta di 0 e ha pertanto determinante nullo. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$, cioè il rango di A è uguale al numero degli scalini. $\triangle$

Quanto visto nell'esempio 10.11 non è un caso. Utilizzando lo stesso approccio si può dimostrare facilmente (anche se noi non lo daremo in dettaglio) che vale la:

Proposizione 10.12 *Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.*

Tutto ciò ci suggerisce un metodo per il calcolo del rango di una matrice.

Metodo 10.13 (di Gauss per il calcolo del rango) Calcoliamo il rango di una matrice data A nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

2. Contiamo il numero di scalini di A'. Siano n. Si ha allora:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = n. \qquad \triangle$$

Esempio 10.14 Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già determinato nell'esempio 9.12 una matrice a scalini ad essa equivalente:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' ha 3 scalini. Quindi $\operatorname{rk} A = 3$. △

Esempio 10.15 Vogliamo determinare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cominciamo con il sommare alla terza riga la prima e alla quarta riga la prima moltiplicata per -2:

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga della matrice A' la seconda riga di A' moltiplicata per 2 e alla quarta riga la seconda riga di A' moltiplicata per -1:

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine scambiamo tra loro la terza e quarta riga della matrice A'' ottenendo una matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 3 scalini ad ha, quindi, rango 3. Pertanto anche la matrice A ha rango 3. △

10.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.10.2 Per ottenere la matrice A dalla matrice A'' per mezzo di operazioni elementari di riga, facciamo il procedimento a ritroso. Scambiamo tra loro la seconda e la terza riga di A''. Sommiamo poi alla terza riga la prima riga moltiplicata per 2.

10.5 Sunto

Operazioni elementari

Definizione Due matrici A e A' si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di successive operazioni del tipo:

- Sommare alla riga i-esima della matrice la riga j-esima moltiplicata per un numero reale k, con $i \neq j$.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**. △

Metodo per il calcolo del determinante di una matrice

Proposizione *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A': tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma a una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Metodo (di Gauss per il calcolo del determinante) Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A, operiamo nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

3. Si ha quindi:

$$\det A = (-1)^m \det A'.$$

△

Metodo per il calcolo del rango di una matrice

Teorema *Se A e A' sono matrici equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A.$$

Metodo (di Gauss per il calcolo del rango) Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

2. Contiamo il numero di scalini di A'. Siano n. Si ha allora:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = n.$$

△

10.6 Esercizi

E.10.1 Verificare che la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è equivalente per righe alla matrice I.

E.10.2 Calcolare il determinante delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

E.10.3 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ -9 & -16 & 4 & -10 & 22 \\ 9 & 24 & -6 & 15 & -33 \end{pmatrix}.$$

E.10.4 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

E.10.5 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.10.6 Calcolare il rango delle matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.7 Soluzioni degli esercizi

E.10.1 È sufficiente scambiare la prima e la terza riga.

E.10.2 La seconda riga di A è uguale alla prima moltiplicata per 2. Quindi A ha determinante 0.

La seconda colonna di B è uguale alla terza moltiplicata per 2. Quindi B ha determinante 0.

Sommiamo alla seconda riga di C la prima riga moltiplicata per -1 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{3}{2}$ e otteniamo così la matrice:

$$C' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo la seconda riga e la terza e otteniamo la matrice a scalini:

$$C'' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di C''è uguale a -8. Per passare da C a C''abbiamo operato un numero dispari di scambi e, pertanto $\det C = -\det C'' = 8$.

E.10.3 Sommiamo alla seconda riga di A la prima riga moltiplicata per 3 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per -3 e otteniamo così la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha due scalini abbiamo che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 2$.

E.10.4 Sommiamo alla seconda riga di A la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$, alla terza la prima moltiplicata per 2 e alla quarta la prima moltiplicata per -4:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga di A' la seconda moltiplicata per -8:

$$A'' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine sommiamo alla quarta riga di A'' la terza moltiplicata per $-\frac{2}{25}$ e otteniamo la matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{25} \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 4 scalini e, dunque, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A''' = 4$.

E.10.5 Tramite le seguenti operazioni: scambio della prima e seconda riga, somma alla quarta riga la prima moltiplicata per -1, somma alla terza riga la seconda moltiplicata per -1, somma alla quarta riga la seconda moltiplicata per $\frac{3}{2}$, somma alla quarta riga la terza moltiplicata per $\frac{1}{2}$ otteniamo la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha 4 scalini, abbiamo che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 4$.

E.10.6 Applichiamo il metodo di Gauss alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per -3, alla terza riga la prima moltiplicata per -4, alla quarta riga la prima moltiplicata per -1 e alla quinta riga la prima moltiplicata per 2. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora alla terza riga la seconda moltiplicata per -1, alla quarta riga la seconda moltiplicata per $-\frac{1}{3}$ e alla quinta riga la seconda moltiplicata per $\frac{2}{3}$. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo di posto la terza e quarta riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e infine sommiamo alla quinta riga la terza moltiplicata per -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini con 3 righe non nulle. Il rango di A è dunque 3.

Consideriamo ora la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sommiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per -2, alla terza riga la prima moltiplicata per -1, alla quarta riga la prima moltiplicata per -1 e alla quinta riga la prima. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora alla quarta riga la seconda moltiplicata per $-\frac{1}{2}$ e alla quinta riga la seconda moltiplicata per $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Scambiamo ora terza e quarta riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e infine sommiamo alla quinta riga la terza moltiplicata per -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini con 3 righe non nulle. Il rango di B è dunque 3.

CAPITOLO 11

I vettori geometrici

Introduciamo il concetto di vettore di un piano. Definiamo quindi le operazioni di addizione di due vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale e osserviamo che esse hanno le stesse proprietà delle operazioni di addizione tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per un numero reale. Estendiamo poi allo spazio le definizioni di vettore e delle loro operazioni e verifichiamo che queste ultime hanno proprietà simili alle proprietà dei vettori del piano.

11.1 Vettori del piano

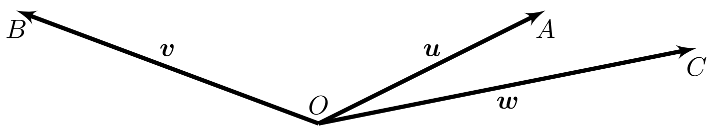
Consideriamo un piano e fissiamo su esso una distanza con unità di misura U_1U_2. Fissiamo poi una volta per tutte un punto O del piano, che chiamiamo **origine**.

Definizione 11.1 Dato comunque un punto P, chiamiamo **vettore applicato** in O di **vertice** P la coppia di punti O e P. Indichiamo questo vettore con il simbolo $\overrightarrow{OP}$. Diremo anche che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha come **origine** il punto O. Indichiamo con il simbolo $V^2(O)$ l'insieme dei vettori applicati in O. Il vettore $\overrightarrow{OO}$ viene chiamato **vettore nullo** e indicato con il simbolo $\mathbf{0}$. Abbiamo quindi

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{OO}. \qquad \triangle$$

Quando non è necessario indicare esplicitamente il punto finale di un vettore useremo una sola lettera in grassetto; useremo cioè un simbolo del tipo $\boldsymbol{v}$. Quando scriveremo $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ intenderemo dire che il vettore $\boldsymbol{v}$ è il vettore applicato in O di vertice P.

I vettori sono rappresentati graficamente per mezzo di frecce.

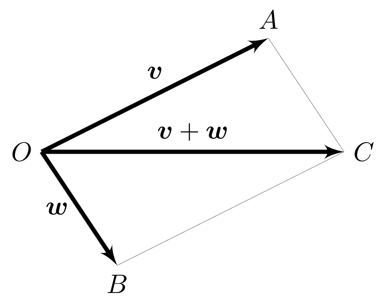


Nella figura abbiamo indicato tre vettori $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{OC}$.

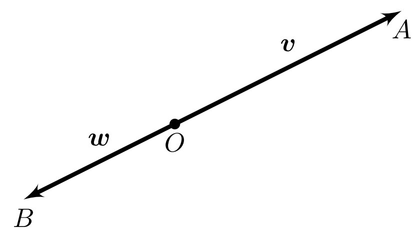
11.2 Addizione di vettori

Vogliamo ora introdurre nell'insieme $V^2(O)$ un'operazione di addizione. Dati quindi due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, vogliamo definire il **vettore somma** che indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

Definizione 11.2 (regola del parallelogramma) Dati i vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OB}$, poniamo per definizione $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} := \overrightarrow{OC}$, dove C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma. $\triangle$



Osserviamo che in alcuni casi non è possibile applicare la regola del parallelogramma. Ecco uno di questi casi:

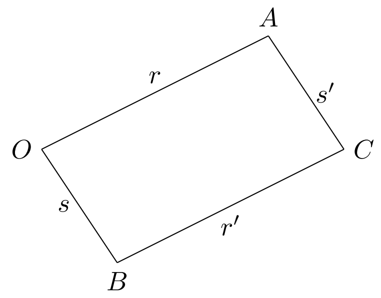


Per superare questo problema dobbiamo ritornare sulla definizione di parallelogramma.

Analizziamo con attenzione il metodo da noi utilizzato per la costruzione, a partire da tre punti O, A e B, del punto C, quarto vertice del parallelogramma $OACB$.

1. Sia r la retta passante per O e A e s la retta passante per O e B. Determiniamo la retta r' passante per B e parallela alla retta r. Determiniamo la retta s' passante per A e parallela alla retta s.

2. Determiniamo il punto C come intersezione delle rette r' e s'.



Osserviamo che:

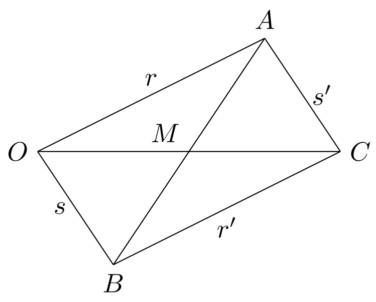
• Se $O = A$ la retta r è indeterminata (analogamente se $O = B$ la retta s è indeterminata);

• anche se le rette r e s sono determinate (cioè$O \neq A$ e $O \neq B$), non possiamo determinare la loro intersezione se le rette r e s coincidono, cioè se i punti A, B e O sono allineati.

In definitiva non possiamo applicare il nostro procedimento se i nostri tre punti O, A e B sono allineati.

Per superare questo problema facciamo un passo indietro e torniamo a considerare un parallelogramma. Sappiamo che in un parallelogramma i lati opposti hanno la stessa lunghezza. C'è una seconda proprietà dei parallelogrammi che ci è ora molto utile:

Proposizione 11.3 *Le diagonali di una parallelogramma si intersecano in un punto M che è punto medio dei vertici opposti.*



In altre parole, il punto M è punto medio di A e B e il punto C è il simmetrico di O rispetto a M.

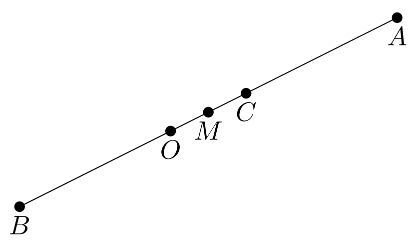
Questa proprietà ci fornisce un nuovo metodo per determinare, a partire da tre punti non allineati O, A e B, il punto C, quarto vertice del parallelogramma $OACB$

1. Determiniamo il punto medio M dei punti A e B;

2. determiniamo il punto C simmetrico del punto O rispetto a M.

Applichiamo ora il procedimento appena descritto nel caso in cui i tre punti O, A e B sono allineati. Esaminiamo dapprima i casi in cui i tre punti non sono distinti. Notiamo che, per costruzione, il punto C è allineato ai punti O, A e B. Si ha inoltre:

$$\mathrm{d}(O, A) = \mathrm{d}(B, C) \quad \text{e} \quad \mathrm{d}(O, B) = \mathrm{d}(A, C).$$



Possiamo ora porre la definizione:

Definizione 11.4 Dati quattro punti qualsiasi A, B, C, D, diciamo che essi formano un **parallelogramma** se il punto C è il simmetrico del punto A rispetto al punto M medio di B e D. $\triangle$

La definizione appena data implica che:

• Se i punti A, B, D non sono allineati, otteniamo un quadrilatero i cui lati opposti appartengono a rette parallele. In questo caso diciamo che abbiamo un **parallelogramma non degenere**. Per quanto detto, questa definizione di parallelogramma non degenere coincide con la usuale definizione di parallelogramma.

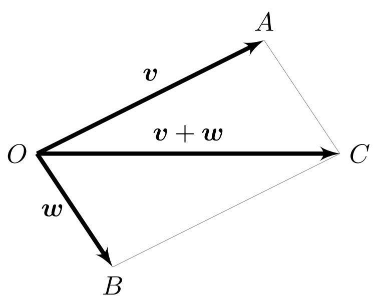
• Se i punti A, B, e D sono allineati, anche il punto C è allineato a essi e si ha $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(C,D)$ e $\mathrm{d}(B,C) = \mathrm{d}(D,A)$. In questo caso diciamo che abbiamo un **parallelogramma degenere**.

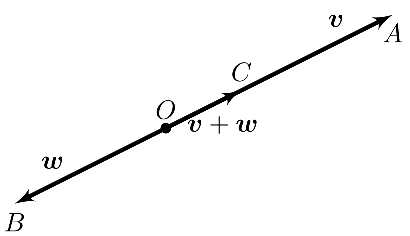
Siamo ora in grado di definire l'operazione di addizione tra vettori.

Definizione 11.5 L'operazione di addizione associa a due vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OB}$, il vettore $\overrightarrow{OC}$ dove il punto C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma. In altri termini C è il simmetrico di O rispetto al punto medio M di A e B.

Chiamiamo il vettore $\overrightarrow{OC}$ ottenuto in questo modo **vettore somma** e lo indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. $\triangle$

Ricordiamo ancora che il parallelogramma potrà essere non degenere o degenere.





Diamo ora le principali proprietà dell'addizione di vettori.

Teorema 11.6 *L'operazione di addizione tra vettori soddisfa le proprietà:*

1. ***Proprietà associativa:***

   $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$.

2. ***Proprietà commutativa:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$.

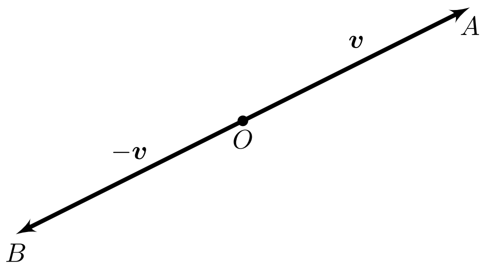
3. ***Esistenza dello zero:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$.

4. ***Esistenza dell'opposto:***

Dato comunque un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA} \in V^2(O)$*, esiste ed è unico un vettore che sommato al vettore* $\boldsymbol{v}$ *dà il vettore nullo. Esso è chiaramente il vettore* $\overrightarrow{OB}$ *dove* B *è il simmetrico di* A *rispetto a* O*. Questo vettore viene indicato con il simbolo* $-\boldsymbol{v}$ *e viene chiamato* ***vettore opposto*** *di* $\boldsymbol{v}$*. Si ha quindi:*

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}.$$



Non diamo la dimostrazione della proprietà associativa ma consigliamo di fare la figura che descrive questa proprietà. Si deve quindi disegnare inizialmente i tre vettori $\boldsymbol{u} := \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OB}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OC}$, e poi i vettori $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

La proprietà commutativa è chiaramente verificata perché la definizione di vettore somma non dipende dall'ordine con il quale vengono scelti i due vettori.

Esercizio di base 11.7 Dimostrare la proprietà del vettore nullo.

Notiamo che l'operazione di addizione tra vettori appena definita ha le stesse proprietà dell'operazione di addizione tra matrici. Possiamo poi adottare per i vettori le stesse convenzioni usate per le matrici:

• Possiamo usare senza ambiguità il simbolo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ (la proprietà associativa ce lo permette);

• Usiamo il simbolo $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ al posto del simbolo $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$.

11.3 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione 11.8 Dato un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ e uno scalare $h \in \mathbb{R}$, definiamo il vettore $h\boldsymbol{v} \in V^2(O)$.

• Se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ poniamo:

$$h\boldsymbol{0} := \boldsymbol{0}$$

qualsiasi sia $h \in \mathbb{R}$.

• Se $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ i punti O e P, sono distinti e determinano quindi una retta che chiamiamo r. Indichiamo con r_1 la semiretta delimitata da O contenente il punto P e con r_2 la semiretta delimitata da O non contenente il punto P. Poniamo per definizione

$$h\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OQ} \qquad \triangle$$

dove:

– se $h = 0$ allora $Q = O$;
– se $h > 0$ allora Q è il punto di r_1 tale che $\mathrm{d}(O, Q) = h\,\mathrm{d}(O, P)$;
– se $h < 0$ allora Q è il punto di r_2 tale che $\mathrm{d}(O, Q) = -h\,\mathrm{d}(O, P)$.

Notiamo che per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$ si ha

$$0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Si ha poi il:

Teorema 11.9 *L'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verifica le proprietà:*

1. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$*;*

2. $h(k\boldsymbol{v}) = (hk)\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$*,* $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$*.*

Esercizio di base 11.10 Dimostrare la prima proprietà.

Non dimostriamo la seconda proprietà.
Abbiamo poi:

Teorema 11.11 *Le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verificano le seguenti proprietà, dette* ***proprietà distributive****:*

1. $(h + k)\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$*,* $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$*;*

2. $h(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = h\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$*,* $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$*,* $h \in \mathbb{R}$*.*

Non dimostriamo queste proprietà, ma consigliamo di darne una rappresentazione grafica.

Esercizio di base 11.12 Verificare che:

$$(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$$ △

per ogni $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$.

Osservazione 11.13 Notiamo che l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare ha le stesse proprietà dell'operazione di moltiplicazione di una matrice per uno scalare. △

11.4 Vettori dello spazio

Definizione 11.14 Fissato un punto O dello spazio, possiamo associare a ogni punto P dello spazio il **vettore** $\overrightarrow{OP}$ applicato nel punto O in modo analogo a quanto fatto nel piano. Indichiamo con $V^3(O)$ l'insieme dei vettori dello spazio applicati nel punto O. In $V^3(O)$ definiamo le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale così come si è fatto nel caso del piano. △

Abbiamo visto in precedenza che l'insieme $V^2(O)$ dei vettori di un piano con le operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verifica proprietà analoghe a quelle dell'insieme delle matrici con le operazioni di addizione di matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare. Nel caso dei vettori dello spazio abbiamo un teorema analogo.

Teorema 11.15 *L'insieme $V^3(O)$ dei vettori dello spazio con le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verifica le proprietà:*

1. ***Proprietà associativa:***

   $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in V^3(O)$, $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^3(O)$.

2. ***Proprietà commutativa:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^3(O)$.

3. ***Esistenza dello zero:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$.

4. ***Esistenza dell'opposto:***

   Dato comunque un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA} \in V^3(O)$, *esiste ed è unico un vettore che sommato al vettore* $\boldsymbol{v}$ *dà il vettore nullo. Esso è chiaramente il vettore* $\overrightarrow{OB}$ *dove* B *è il simmetrico di* A *rispetto a* O. *Questo vettore viene indicato con il simbolo* $-\boldsymbol{v}$ *e viene chiamato* ***vettore opposto*** *di* $\boldsymbol{v}$. *Si ha quindi:*

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0};$$

5. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$;

6. $h(k\boldsymbol{v}) = (hk)\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;

7. $(h + k)\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;

8. $h(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = h\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$.

Notiamo che, a parte la proprietà associativa, tutte le altre dimostrazioni si basano su proprietà di geometria del piano e quindi sono state da noi analizzate. Non dimostriamo la proprietà associativa.

11.5 Rette e piani per l'origine

Consideriamo una retta r (nel piano o nello spazio) passante per l'origine O. Se ora prendiamo due punti A e B di r, il loro punto medio M appartiene pure a r. Dal momento che O e M sono punti di r, anche il simmetrico C di O rispetto a M appartiene a r. Pertanto la somma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un vettore $\overrightarrow{OC}$ il cui termine appartiene a r. Abbiamo dunque la:

Osservazione 11.16 Se r è una retta passante per l'origine, e A e B sono due punti di r allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di r. $\triangle$

Consideriamo ora il prodotto $k\overrightarrow{OA}$ dove k è uno scalare qualsiasi e A è ancora un punto di r. Nel caso in cui A coincida con O (cioè $\overrightarrow{OA}$ è il vettore nullo), per definizione abbiamo $k\overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$, qualunque sia k: dunque $k\overrightarrow{OA}$ è un vettore il cui termine (che in questo caso è O) appartiene a r. Nel caso in cui A sia diverso da O dalla definizione del prodotto scalare vettore, si ha che il termine del vettore $k\overrightarrow{OA}$ appartiene alla retta passante per O e A cioè r stessa. Abbiamo dunque la:

Osservazione 11.17 Se r è una retta passante per l'origine, e A è un punto di r allora il termine D del vettore $k\overrightarrow{OA}$ è un punto di r. △

In maniera analoga possiamo osservare che:

Osservazione 11.18 Se π è un piano passante per l'origine, e A e B sono due punti di π allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di π. △

Osservazione 11.19 Se π è un piano passante per l'origine, e A è un punto di π allora il termine D del vettore $k\overrightarrow{OA}$ è un punto di π. △

Esercizio di base 11.20 Sia r una retta non passante per l'origine e siano A e B due punti di r. Il vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ha termine su r? Se k è uno scalare, il vettore $k\overrightarrow{OA}$ ha termine su r?

11.6 Punto medio

Ricordiamo che, dati due punti A e B distinti, il punto medio M di A e B è il punto M del segmento di estremi A e B equidistante dai punti A e B, mentre nel caso in cui $A = B$, il punto medio di A e B coincide con $A = B$.

Teorema 11.21 *Dati due punti A e B del piano o dello spazio, il loro punto medio M è dato dalla formula*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

DIMOSTRAZIONE Sia C il punto tale che $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Dobbiamo mostrare che $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Dalla definizione di somma di vettori sappiamo che il punto C è il simmetrico di O rispetto al punto M. Distinguiamo due casi. Se M coincide con O anche C coincide con O, e, dunque, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, da cui otteniamo $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Se M non coincide con O, detta r la retta passante per O e M, per la definizione di prodotto scalare vettore il termine del vettore $2\overrightarrow{OM}$ è esattamente il simmetrico di M rispetto ad O: in altri termini $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$, che è quanto volevamo. ■

11.7 Soluzioni degli esercizi di base

EB.11.7 Dati i vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OB}$, il vettore $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ è uguale, per definizione, al vettore $\overrightarrow{OC}$ dove C è il punto tale che $OACB$ è un parallelogramma (eventualmente degenere). Quindi il punto C è il simmetrico del punto O rispetto al punto M, il quale a sua volta è il punto medio dei punti A e B.

Noi ora vogliamo calcolare il vettore $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}$. Pertanto nel nostro caso abbiamo $\boldsymbol{w} = \mathbf{0} = \overrightarrow{OO}$ e quindi $B = O$. Sia allora M il punto medio tra A e B, cioè il punto medio tra A e O: allora il simmetrico di O rispetto a M è il punto A stesso. Abbiamo pertanto:

$$\boldsymbol{v}+\mathbf{0} = \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{v},$$

cioè la nostra tesi.

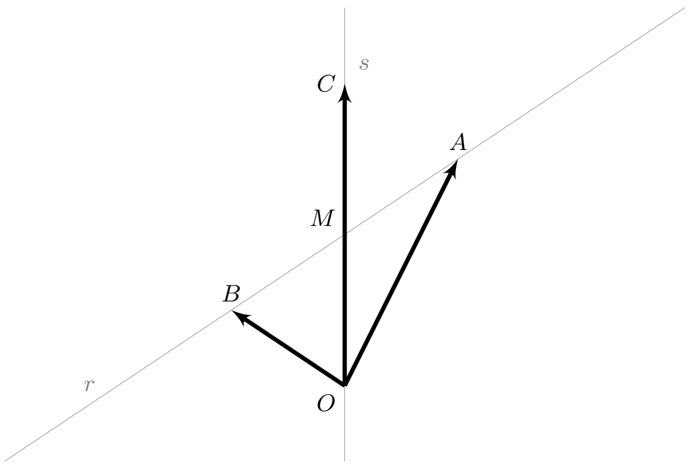
EB.11.10 Dato il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$, vogliamo determinare il vettore $1\boldsymbol{v}$. Per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ha che:

- se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, si ha $1\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ e quindi $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$;
- se $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$, si ha $O \neq A$ e, chiamata r_1 la semiretta delimitata da O e passante per A, il vettore $1\boldsymbol{v}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{OB}$ dove B è il punto della semiretta r_1 tale che $\mathrm{d}(O,B) = 1\,\mathrm{d}(O,A)$. Pertanto abbiamo $B = A$ e quindi $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

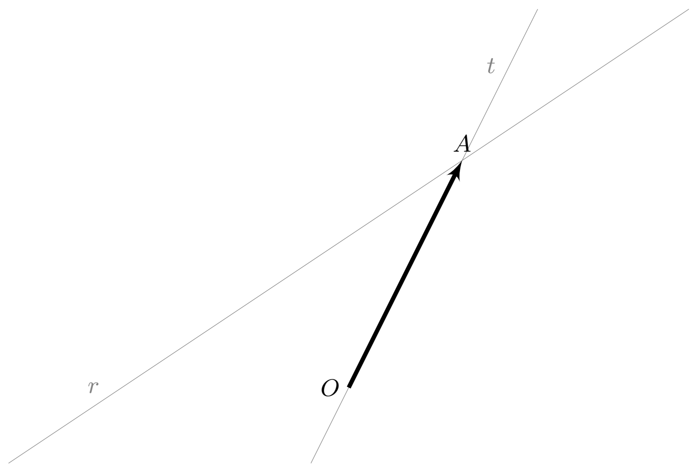
EB.11.12 Dato il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$, vogliamo dimostrare che il vettore $-1\boldsymbol{v}$ è uguale al vettore $-\boldsymbol{v}$. Ricordiamo che, per definizione, dato $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OA}$ abbiamo che il vettore $-\boldsymbol{v}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{OC}$ dove C è il simmetrico di A rispetto a O. Ricordiamo inoltre che per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ha che:

- se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, si ha $-1\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Inoltre $-\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Dunque $-1\boldsymbol{v} = \mathbf{0} = -\boldsymbol{v}$;
- se $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$, si ha $O \neq A$ e, chiamata r_2 la semiretta di r delimitata da O e non passante per A, il vettore $-1\boldsymbol{v}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{OB}$ dove B è il punto della semiretta r_2 tale che $\mathrm{d}(O,B) = |-1|\,\mathrm{d}(O,A) = 1\,\mathrm{d}(O,A) = \mathrm{d}(O,A)$. Pertanto abbiamo che B non è altro che il simmetrico di A rispetto a O e quindi anche in questo caso $-1\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

EB.11.20 Il punto medio M tra A e B appartiene a r. Poiché O non appartiene a r, in particolare O è diverso da M. Il simmetrico C di O rispetto a M è allora un punto appartenente alla retta s passante per O e M ed è diverso da M. Dunque C non appartiene a r, perché l'unico punto in comune tra r e s è il punto M.



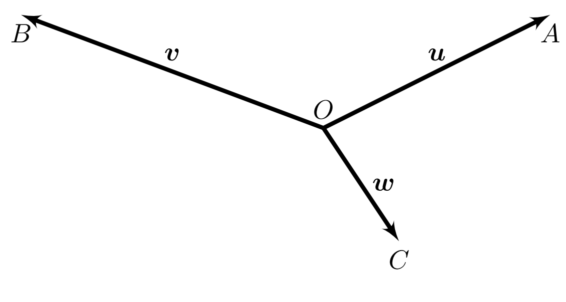
Per quanto riguarda il prodotto $k\overrightarrow{OA}$, notiamo che O e A sono diversi (perché O non appartiene a r mentre A appartiene a r). Per definizione di prodotto si ha allora che il termine di $k\overrightarrow{OA}$ è un punto della retta t passante per O e A: per $k = 1$ si ottiene il vettore $\overrightarrow{OA}$ stesso il cui termine appartiene ovviamente a r, per $k \neq 1$ si ottiene un vettore il cui termine è un punto di t diverso da A e, quindi, non appartiene a r perché l'unico punto in comune tra r e t è A.



11.8 Sunto

Definizione Consideriamo un piano e fissiamo su esso una distanza con unità di misura U_1U_2. Fissiamo poi un punto O del piano, che chiamiamo **origine**.

Dato comunque un punto P, chiamiamo **vettore applicato** in O di **vertice** P la coppia di punti O e P. Indichiamo questo vettore con il simbolo $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$. Diremo anche che il vettore $\boldsymbol{v}$ ha come **origine** il punto O. I vettori sono rappresentati graficamente per mezzo di frecce.



Indichiamo con $V^2(O)$ l'insieme dei vettori aventi origine in O. Chiamiamo **vettore nullo** il vettore $\mathbf{0} = \overrightarrow{OO}$. △

Definizione Nello spazio diamo una definizione analoga di **vettore**. Indichiamo con $V^3(O)$ l'insieme dei vettori dello spazio aventi origine in O. △

Definizione Dati due vettori (del piano o dello spazio) $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OB}$, chiamiamo **vettore somma** dei due vettori il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} := \overrightarrow{OC}$ dove il punto C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma (eventualmente degenere). Rimandiamo alla definizione 11.4 per la definizione di parallelogramma degenere. Abbiamo in questo modo definito un'operazione di **addizione** in $V^2(O)$ e in $V^3(O)$. △

Definizione Dato un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ (del piano o dello spazio) e uno scalare $h \in \mathbb{R}$, definiamo il vettore $h\boldsymbol{v}$.

- Se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ poniamo:

$$h\boldsymbol{0} := \boldsymbol{0}$$

qualsiasi sia $h \in \mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ i punti O e P, sono distinti e determinano quindi una retta che chiamiamo r. Indichiamo con r_1 la semiretta delimitata da O contenente il punto P e con r_2 la semiretta delimitata da O non contenente il punto P. Poniamo per definizione

$$h\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OQ}$$

dove:

– se $h = 0$ allora $Q = O$;

– se $h > 0$ allora Q è il punto di r_1 tale che $\mathrm{d}(O, Q) = h\,\mathrm{d}(O, P)$;

– se $h < 0$ allora Q è il punto di r_2 tale che $\mathrm{d}(O, Q) = -h\,\mathrm{d}(O, P)$. △

Teorema *Le due operazioni in $V^2(O)$ appena definite verificano le proprietà:*

1. ***Proprietà associativa:***

   $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$.

2. ***Proprietà commutativa:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$.

3. ***Esistenza dello zero:***

   $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$.

4. ***Esistenza dell'opposto:***

Dato comunque un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA} \in V^2(O)$, esiste ed è unico un vettore che sommato al vettore $\boldsymbol{v}$ dà il vettore nullo. Esso è chiaramente il vettore $\overrightarrow{OB}$ dove B è il simmetrico di A rispetto a O. Questo vettore viene indicato con il simbolo $-\boldsymbol{v}$ e viene chiamato ***vettore opposto*** *di $\boldsymbol{v}$. Si ha quindi:*

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0};$$

5. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$;
6. $h(k\boldsymbol{v}) = (hk)\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;
7. $(h + k)\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;
8. $h(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = h\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^2(O)$, $h \in \mathbb{R}$.

Teorema *Le due operazioni in $V^3(O)$ verificano le stesse proprietà di $V^2(O)$.*

Rette e piani per l'origine

Osservazione Se r è una retta passante per l'origine, e A e B sono due punti di r allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di r. $\triangle$

Osservazione Se r è una retta passante per l'origine, e A è un punto di r allora il termine D del vettore $k\overrightarrow{OA}$ è un punto di r. $\triangle$

Osservazione Se π è un piano passante per l'origine, e A e B sono due punti di π allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di π. $\triangle$

Osservazione Se π è un piano passante per l'origine, e A è un punto di π allora il termine D del vettore $k\overrightarrow{OA}$ è un punto di π. $\triangle$

Punto medio

Teorema *Dati due punti A e B del piano o dello spazio, il loro punto medio M è dato dalla formula*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

11.9 Esercizi

E.11.1 Siano O, A e B tre punti distinti di una retta r. Siano r_1 e r_2 le semirette della retta r aventi origine in O. Consideriamo il punto C in modo tale che $OACB$ sia un parallelogramma degenere. Determinare come devono essere disposti i punti A e B affinché il punto C:

a. appartenga a una fissata semiretta di r delimitata dal punto O.

b. coincida con il punto O.

11.10 Soluzioni degli esercizi

E.11.1 Il punto medio M di A e B coincide con il punto medio di O e C.

a. Il punto C appartiene a una determinata semiretta r_1 avente origine in O, se e solo se anche M appartiene alla stessa semiretta. Ovviamente, se i punti A e B appartengono entrambi alla semiretta r_1, anche il loro punto medio M appartiene a r_1. Studiamo ora il caso in cui uno dei punti, per esempio A, appartenga a r_1 e il punto B appartenga alla semiretta r_2. Si ha allora che il punto M appartiene a r_1 se e solo se $\mathrm{d}(O, A) > \mathrm{d}(O, B)$.

b. Affinché il punto C coincida con O si deve avere $M = O$. Ciò avviene se il punto O è punto medio dei punti A e B.

CAPITOLO 12

Combinazioni lineari di vettori geometrici

Introduciamo il concetto di combinazione lineare di vettori (del piano o dello spazio) e di vettori linearmente indipendenti.

Dimostriamo poi che nel piano esistono coppie di vettori linearmente indipendenti ma non esistono più di due vettori linearmente indipendenti.

Dimostriamo infine che nello spazio esistono terne di vettori linearmente indipendenti ma non esistono più di tre vettori linearmente indipendenti.

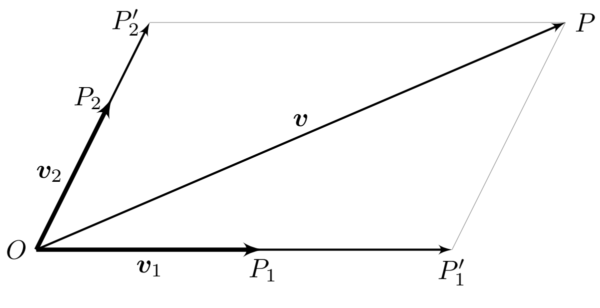
12.1 Combinazione lineare di vettori

Diamo una definizione valida sia per i vettori del piano, che per i vettori dello spazio.

Definizione 12.1 Dati n vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, e n numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il vettore

$$\boldsymbol{v} \coloneqq a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

viene chiamato **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ con **coefficienti** $a_1, a_2, \ldots, a_n$. △



Nella figura abbiamo: $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$, $a_1\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{OP_1'}$, $a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP_2'}$, $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP}$.

Abbiamo la seguente proprietà delle combinazioni lineari valida sia per vettori del piano che per vettori dello spazio.

Proposizione 12.2 *Dati comunque n vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ si ha*

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Esercizio di base 12.3 Dimostrare la proposizione 12.2 specificando quali proprietà delle operazioni tra vettori vengono utilizzate.

Ci chiediamo se vi siano combinazioni lineari di vettori con almeno un coefficiente diverso da 0 che diano come risultato il vettore nullo.

Esercizio di base 12.4 La risposta è affermativa. Dare qualche esempio.

Poniamo allora la seguente definizione valida sia per vettori del piano che per vettori dello spazio.

Definizione 12.5 Dati n vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono coefficienti a_1, $a_2, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Vettori non linearmente dipendenti si dicono **linearmente indipendenti**. Detto in altro modo $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'uguaglianza

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

è verificata solo nel caso in cui $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, cioè se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è la combinazione lineare con tutti i coefficienti nulli. △

Analizziamo il significato geometrico del concetto di indipendenza lineare. Abbiamo innanzitutto il seguente teorema valido per un vettore sia del piano che dello spazio:

Teorema 12.6 *Un vettore $\boldsymbol{v}_1$ è linearmente dipendente se e solo se $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$.*

Esercizio di base 12.7 Dimostrare il teorema 12.6.

Consideriamo ora un vettore linearmente indipendente $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ del piano o dello spazio. Ciò implica che i punti O e A sono distinti. Sia r la retta passante per O e A. Sia $h \in \mathbb{R}$. Consideriamo il vettore $h\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$. Per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare il punto P appartiene alla retta r.

Il viceversa è anche vero: dato un punto qualsiasi P della retta r, esiste uno e un solo numero $h \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OA}$.

Esercizio di base 12.8 Dimostrare questo fatto.

Possiamo sintetizzare tutto ciò nel seguente modo:

Teorema 12.9 *Sia dato un vettore del piano o dello spazio $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ linearmente indipendente. L'insieme delle combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}$, cioè l'insieme dei vettori $h\boldsymbol{v}$ al variare di h in $\mathbb{R}$, è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto P appartenga alla retta passante per i punti distinti O e A.*

Abbiamo studiato il caso di un vettore. Studiamo ora il caso di due vettori. Abbiamo il seguente teorema valido per vettori sia del piano che dello spazio.

Teorema 12.10 *Due vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$ e $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1 e P_2 sono allineati.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo innanzitutto che O, P_1 e P_2 siano allineati. Distinguiamo due casi: $P_1 = O$ e $P_1 \neq O$. Se $P_1 = O$ allora $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$. Pertanto

$$1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Abbiamo così una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ con almeno un coefficiente diverso da 0 che dà come risultato il vettore nullo, e, dunque $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Se invece $P_1 \neq O$ allora i punti P_1 e O individuano una retta r. Poiché O, P_1 e P_2 sono allineati il punto P_2 appartiene a r. Grazie al teorema 12.9, esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{v}_2 = h\boldsymbol{v}_1$. Allora abbiamo:

$$h\boldsymbol{v}_1 + (-1)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0},$$

e, dunque $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente dipendenti.

Viceversa supponiamo ora che $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ siano linearmente dipendenti e dimostriamo che O, P_1 e P_2 sono allineati. Sappiamo che esistono due numeri reali h_1 e h_2 non entrambi nulli tali che:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Possiamo supporre, ad esempio, che $h_2 \neq 0$. Moltiplicando ambo i membri della relazione precedente per h_2^{-1} troviamo:

$$h_2^{-1}h_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0},$$

e, dunque:

$$\boldsymbol{v}_2 = -h_2^{-1}h_1\boldsymbol{v}_1,$$

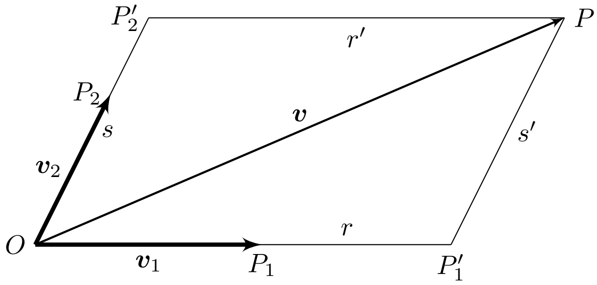
cioè $\boldsymbol{v}_2$ è multiplo di $\boldsymbol{v}_1$. Sia ora r una retta passante per O e P_1 (notiamo che se $O \neq P_1$ esiste una e una sola retta passante per essi, mentre se $O = P_1$ esistono infinite rette passanti per essi): per l'osservazione 11.17 i multipli di $\boldsymbol{v}_1$ hanno termine su r. In particolare il termine di $\boldsymbol{v}_2$, cioè P_2, appartiene a r. Pertanto esiste una retta r che contiene O, P_1 e P_2. ∎

Consideriamo ora due vettori linearmente indipendenti del piano. Ovviamente ogni loro combinazione lineare è un vettore del piano. Vogliamo ora dimostrare il viceversa. Vogliamo cioè dimostrare il:

Teorema 12.11 *Dati comunque due vettori linearmente indipendenti di $V^2(O)$, ogni vettore di $V^2(O)$ è loro combinazione lineare. In altre parole, se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono vettori di $V^2(O)$ linearmente indipendenti, allora per ogni $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$ esistono $h_1 \in \mathbb{R}$ e $h_2 \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2.$$

Dimostrazione Poniamo $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$. Poiché i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per il teorema 12.10 i tre punti O, P_1 e P_2 non sono allineati. Sia r la retta passante per O e P_1 e s la retta passante per O e P_2. Consideriamo la retta r' passante per P e parallela a r. Sia P_2' il punto di intersezione della retta r' e la retta s. In modo analogo consideriamo il punto P_1' intersezione della retta r con la retta s' passante per P e parallela a s.



Per costruzione, abbiamo che $= OP_1'PP_2'$ è un parallelogramma (eventualmente degenere). Abbiamo quindi:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1'} + \overrightarrow{OP_2'}.$$

D'altronde, poiché P_1' appartiene alla retta r, per il teorema 12.9 esiste $h_1 \in \mathbb{R}$ tale che $OP_1' = h_1\boldsymbol{v}_1$. Analogamente esiste $h_2 \in \mathbb{R}$ tale che $OP_2' = h_2\boldsymbol{v}_2$. Abbiamo pertanto

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1'} + \overrightarrow{OP_2'} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2.$$

Abbiamo dimostrato quel che volevamo. ■

Il teorema 12.11 nel caso di vettori dello spazio diventa:

Teorema 12.12 *Siano $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ due vettori di $V^3(O)$ linearmente indipendenti. L'insieme delle loro combinazioni lineari è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto P appartenga al piano passante per i punti non allineati O, P_1 e P_2.*

Vogliamo ora dimostrare il:

Teorema 12.13 *Dati comunque tre vettori di $V^2(O)$, essi sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ i tre vettori. Distinguiamo due casi:

- i primi due vettori sono dipendenti. In tal caso esistono h_1 e h_2 non entrambi nulli tali che

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Pertanto

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$$

e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti;

• i primi due vettori sono linearmente indipendenti. Ma allora per il teorema 12.11 esistono due numeri reali h_1 e h_2 tali che:

$$\boldsymbol{v}_3 = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pertanto:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. ■

Da tutto ciò segue il:

Teorema 12.14 *Dati comunque n vettori di $V^2(O)$ con $n \geq 3$, essi sono linearmente dipendenti.*

Esercizio di base 12.15 Dimostrare il teorema 12.14.

Pertanto in $V^2(O)$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare è 2. Questa è la ragione per la quale abbiamo usato il numero 2 nel simbolo $V^2(O)$. Ovviamente possiamo scegliere 2 vettori linearmente indipendenti di $V^2(O)$ in infiniti modi diversi.

Vediamo ora cosa succede in $V^3(O)$. Abbiamo il:

Teorema 12.16 *Tre vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $\boldsymbol{v}_3 := \overrightarrow{OP_3}$ di $V^3(O)$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1, P_2 e P_3 sono complanari.*

Dimostrazione Supponiamo innanzitutto che O, P_1, P_2 e P_3 siano complanari, cioè siano contenuti in un piano π (questo piano è determinato univocamente in maniera unica se i punti O, P_1, P_2 e P_3 non sono allineati, altrimenti ce ne sono infiniti possibili). Possiamo allora pensare i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ come vettori di $V^2(O)$ rispetto a questo piano: per il teorema 12.13 i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Viceversa supponiamo ora che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ siano linearmente dipendenti. Sappiamo che esistono tre numeri reali h_1, h_2 e h_3 non tutti nulli tali che:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$$

Se, per esempio, $h_3 \neq 0$ allora, moltiplicando ambo i membri di quest'ultima uguaglianza per h_3^{-1}, otterremmo:

$$h_3^{-1}h_1\boldsymbol{v}_1 + h_3^{-1}h_2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0},$$

e, quindi,

$$\boldsymbol{v}_3 = -h_3^{-1}h_1\boldsymbol{v}_1 - h_3^{-1}h_2\boldsymbol{v}_2,$$

vale a dire $\overrightarrow{OP_3}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$. Sia allora π un piano contenente O, P_1 e P_2 (se i tre punti non sono allineati tale piano è univocamente determinato, altrimenti ne esistono infiniti). Dalle osservazioni 11.18 e 11.19 facendo una combinazione lineare di vettori il cui termine giace su π otteniamo un vettore il cui termine giace su π. In particolare il punto terminale di $\overrightarrow{OP_3}$ giace su π, e, dunque, esiste un piano π contenente O, P_1, P_2 e P_3. ■

Consideriamo ora tre vettori linearmente indipendenti di $V^3(O)$. Ovviamente ogni loro combinazione lineare è un vettore di $V^3(O)$. Vogliamo ora dimostrare il viceversa. Vogliamo cioè dimostrare il:

Teorema 12.17 *Dati comunque tre vettori linearmente indipendenti di $V^3(O)$, ogni vettore di $V^3(O)$ è loro combinazione lineare. In altre parole se $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $\boldsymbol{v}_3 := \overrightarrow{OP_3}$ sono vettori di $V^3(O)$ linearmente indipendenti, allora per ogni $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP} \in V^3(O)$, esistono $h_1 \in \mathbb{R}$, $h_2 \in \mathbb{R}$ e $h_3 \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3.$$

Dimostrazione Sia r la retta passante per O e P_3. Distinguiamo due casi.

• Il punto P appartiene alla retta r. Per il teorema 12.9 esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OP_3}$ e quindi il vettore $\overrightarrow{OP}$ si scrive come combinazione lineare dei tre vettori:

$$\overrightarrow{OP} = 0\overrightarrow{OP_1} + 0\overrightarrow{OP_2} + h\overrightarrow{OP_3}.$$

• Il punto P non appartiene alla retta r. Per il teorema 12.16 i punti O, P_1, P_2 e P_3 non sono complanari: in particolare O, P_1 e P_2 non sono allineati. Sia allora π il piano passante per O, P_1 e P_2. Dal momento che P_3 non appartiene al piano π, la retta r è incidente il piano π. Consideriamo la retta r' passante per P e parallela a r (si consiglia di fare una figura).

Sia Q il punto di intersezione della retta r' con il piano π. Dal momento che P non appartiene alla retta r, il punto Q non coincide con il punto O. Sia s la retta passante per O e Q. Sia poi s' la retta passante per P e parallela alla retta s. Sia S il punto di intersezione della retta r con la retta s'. Il quadrilatero O, Q, P, S è per costruzione un parallelogramma. Abbiamo perciò:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS}.$$

D'altronde il punto Q appartiene al piano π e quindi esistono $h_1 \in \mathbb{R}$ e $h_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\overrightarrow{OQ} = h_1\overrightarrow{OP_1} + h_2\overrightarrow{OP_2}.$$

Il punto S appartiene alla retta r e quindi esiste $h_3 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\overrightarrow{OS} = h_3\overrightarrow{OP_3}.$$

Da tutto ciò segue:

$$\overrightarrow{OP} = h_1\overrightarrow{OP_1} + h_2\overrightarrow{OP_2} + h_3\overrightarrow{OP_3}.$$

Abbiamo dimostrato ciò che volevamo. ■

Abbiamo visto che in $V^2(O)$ non esistono più di due vettori linearmente indipendenti. In $V^3(O)$ vale un risultato analogo, la cui dimostrazione lasciamo per esercizio:

Teorema 12.18 *Dati comunque $n \geq 4$ vettori di $V^3(0)$, essi sono linearmente dipendenti.*

Pertanto in $V^3(O)$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare è 3. Questa è la ragione per la quale abbiamo usato il numero 3 nel simbolo $V^3(O)$. Ovviamente possiamo scegliere 3 vettori linearmente indipendenti di $V^3(O)$ in infiniti modi diversi.

12.2 Soluzioni degli esercizi di base

EB.12.3 Dobbiamo dimostrare che si ha

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ricordiamo che, per definizione, abbiamo $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ per ogni vettore $\boldsymbol{v}$. Pertanto

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

L'ultima uguaglianza si ottiene applicando ripetutamente la proprietà

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Quest'ultima uguaglianza si ottiene come caso particolare della proprietà

$$\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$$

ponendo $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

EB.12.4 Vi sono molti esempi di combinazioni lineari di vettori con coefficienti non tutti nulli che sono uguali al vettore nullo. Eccone una molto semplice. Dato un qualsiasi vettore $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$, consideriamo i vettori $\boldsymbol{v}_1 := \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_2 := -\boldsymbol{v}$. Si ha allora

$$1\boldsymbol{v}_1 + 1\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}.$$

EB.12.7 Supponiamo che $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$: allora $1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare del vettore $\boldsymbol{v}_1$ con coefficiente non nullo uguale al vettore nullo. Dunque $\boldsymbol{v}_1$ è linearmente dipendente.

Viceversa supponiamo che $\boldsymbol{v}_1$ sia linearmente dipendente. Allora esiste $h \neq 0$ tale che $h\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$. Moltiplicando ambo i membri per h^{-1} otteniamo $h^{-1}h\boldsymbol{v}_1 = h^{-1}\mathbf{0}$. D'altra parte $h^{-1}h\boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1$ e $h^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dunque $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$.

Notiamo che, nel fare questa dimostrazione, abbiamo solamente usato le proprietà della moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Non abbiamo in alcun modo utilizzato la definizione geometrica di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. In effetti, usando la definizione geometrica, la dimostrazione della seconda parte (il "viceversa") è molto semplice.

EB.12.8 Dobbiamo dimostrare che, dati i punti O e A distinti e dato comunque un punto P della retta r passante per O e A, esiste un numero reale h tale che $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OA}$. Se $P = O$ allora $\overrightarrow{OP} = \mathbf{0}$: basta porre $h = 0$. Se $P \neq O$, consideriamo il numero reale k tale che $\mathrm{d}(P, O) = k\,\mathrm{d}(A, O)$. Sia ora r_1 la semiretta delimitata da O passante per A. Sia r_2 l'altra semiretta di r delimitata da O. Per definizione di moltiplicazione di un vettore per numero reale si ha:

- se $P \in r_1$, allora $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}$; poniamo allora $h = k$.
- se $P \in r_2$, allora $\overrightarrow{OP} = -k\overrightarrow{OA}$; poniamo allora $h = -k$.

EB.12.15 Dobbiamo dimostrare che in $V^2(O)$ non esistono più di due vettori che siano tra loro linearmente indipendenti. Abbiamo dimostrato alla fine del paragrafo 12.1 che, dati comunque 3 vettori, essi sono tra loro linearmente dipendenti. Siano ora dati n vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, con $n > 3$. Sappiamo che i primi tre sono linearmente dipendenti. Esistono quindi h_1, h_2 e h_3 non tutti nulli tali che:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Ma allora si ha:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Abbiamo determinato una combinazione lineare degli n vettori che, pur avendo un coefficiente non nullo, è uguale al vettore nullo. Gli n vettori sono pertanto linearmente dipendenti.

12.3 Sunto

Definizione Dati n vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, e n numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n$, il vettore

$$\boldsymbol{v} := a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

viene chiamato **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ con **coefficienti** $a_1, a_2, \dots, a_n$. △

Definizione Dati n vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Vettori non linearmente dipendenti si dicono **linearmente indipendenti**. Detto in altro modo $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'uguaglianza

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

è verificata solo nel caso in cui $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, cioè se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è la combinazione lineare con tutti i coefficienti nulli. △

Teorema *Un vettore $\boldsymbol{v}_1$ è linearmente dipendente se e solo se $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$.*

Teorema *Sia dato un vettore del piano o dello spazio $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ linearmente indipendente. L'insieme delle combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}$, cioè l'insieme dei vettori $h\boldsymbol{v}$ al variare di h in $\mathbb{R}$, è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto P appartenga alla retta passante per i punti distinti O e A.*

Teorema *Due vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$ e $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1 e P_2 sono allineati.*

Teorema *Se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono vettori di $V^2(O)$ linearmente indipendenti, allora per ogni $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$ esistono $h_1 \in \mathbb{R}$ e $h_2 \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2.$$

Teorema *Siano $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ due vettori di $V^3(O)$ linearmente indipendenti. L'insieme delle loro combinazioni lineari è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto P appartenga al piano passante per i punti non allineati O, P_1 e P_2.*

Teorema *Dati comunque n vettori di $V^2(O)$ con $n \geq 3$, essi sono linearmente dipendenti.*

Pertanto in $V^2(O)$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare è 2. Questa è la ragione per la quale abbiamo usato il numero 2 nel simbolo $V^2(O)$. Ovviamente possiamo scegliere 2 vettori linearmente indipendenti di $V^2(O)$ in infiniti modi diversi.

Teorema *Tre vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $\boldsymbol{v}_3 := \overrightarrow{OP_3}$ di $V^3(O)$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1, P_2 e P_3 sono complanari.*

Teorema *Se* $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$ *e* $\boldsymbol{v}_3 := \overrightarrow{OP_3}$ *sono vettori di* $V^3(O)$ *linearmente indipendenti, allora per ogni* $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP} \in V^3(O)$, *esistono* $h_1 \in \mathbb{R}$, $h_2 \in \mathbb{R}$ *e* $h_3 \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3.$$

Teorema *Dati comunque* $n \geq 4$ *vettori di* $V^3(0)$, *essi sono linearmente dipendenti.*

Pertanto in $V^3(O)$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare è 3. Questa è la ragione per la quale abbiamo usato il numero 3 nel simbolo $V^3(O)$. Ovviamente possiamo scegliere 3 vettori linearmente indipendenti di $V^3(O)$ in infiniti modi diversi.

CAPITOLO 13

Spazi vettoriali sui reali

Iniziamo lo studio degli spazi vettoriali. Si tratta di una generalizzazione di argomenti introdotti in precedenza e che, a prima vista, appaiono molto distanti tra loro: l'insieme delle matrici $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ con le operazioni di addizione tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare e l'insieme dei vettori $V^2(O)$ o $V^3(O)$ con le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

13.1 Gli spazi vettoriali

Esempio 13.1 Prendiamo in considerazione l'insieme $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali a p righe e q colonne. Nel capitolo 3 abbiamo introdotto in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ l'operazione di addizione e l'operazione di moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Abbiamo visto che queste due operazioni godono delle proprietà:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

2. $A + B = B + A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

3. Esiste una matrice 0 tale che $A + 0 = A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

4. Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ esiste una matrice $-A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ tale che $A + (-A) = 0$.

5. $1A = A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

6. $h(k(A)) = (hk)A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

7. $(h + k)A = ha + kA$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

8. $h(A + B) = hA + hB$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Esempio 13.2 Se consideriamo l'insieme $V^2(O)$ dei vettori del piano applicati in un punto O o l'insieme $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O abbiamo visto che le operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore godono di proprietà analoghe a quelle appena enunciate per le operazioni tra matrici. △

Abbiamo dunque due esempi di insiemi dotati di due operazioni (addizione tra elementi dell'insieme e moltiplicazione di un numero reale per un elemento dell'insieme) che soddisfano 8 proprietà. Ci sono molti risultati che possono essere dimostrati solo a partire da queste proprietà. È allora opportuno introdurre un concetto che unifichi le due situazioni date negli esempi. Diamo la:

Definizione 13.3 (di spazio vettoriale sui reali) Sia dato un insieme non vuoto V, i cui elementi vengono chiamati **vettori**. Chiameremo invece **scalari** gli elementi di $\mathbb{R}$. In V sia definita un'**operazione binaria interna**, cioè una legge che a ogni coppia $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ di vettori di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. Tale operazione viene chiamata **addizione** in V e il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ viene detto **somma** dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sia inoltre definita un'**operazione binaria esterna**, cioè una legge che a ogni coppia $(k, \boldsymbol{v})$ formata da uno scalare k e da un vettore $\boldsymbol{v}$ di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $k\boldsymbol{v}$. Tale operazione viene chiamata **moltiplicazione per uno scalare** e il vettore $k\boldsymbol{v}$ viene detto **prodotto** dello scalare k per il vettore $\boldsymbol{v}$. L'insieme V dotato delle operazioni di addizione e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare viene detto **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$ se sono verificate le proprietà:

1. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in V$.
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$.
3. Esiste un vettore $\boldsymbol{e} \in V$ tale che $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.

   Si può dimostrare che un tale vettore $\boldsymbol{e}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $\mathbf{0}$ e lo chiamiamo **vettore nullo**.

   Scriveremo allora $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.
4. Per ogni vettore $\boldsymbol{u} \in V$ esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

   Si può dimostrare che un tale vettore $\boldsymbol{v}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $-\boldsymbol{u}$ e lo chiamiamo **vettore opposto** del vettore $\boldsymbol{u}$.

   Scriveremo allora $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.
5. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.
6. $h(k(\boldsymbol{u})) = (hk)\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
7. $(h + k)\boldsymbol{u} = h\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
8. $h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = h\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{v}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$. △

Esercizio di base 13.4 Dimostrare che per ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di uno spazio vettoriale V si ha $2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}$. Specificare quali proprietà delle operazioni è necessario usare.

13.2 Esempi di spazi vettoriali

Gli esempi dati in precedenza mostrano che $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $V^2(O)$ e $V^3(O)$, con le operazioni descritte in precedenza sono spazi vettoriali. Vediamo altri esempi:

Esempio 13.5 L'insieme $\mathbb{R}$ con l'operazione di addizione e di moltiplicazione è ovviamente uno spazio vettoriale (qui i numeri reali rivestono il ruolo sia di vettori che di scalari). $\triangle$

Esempio 13.6 Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-uple di numeri reali, dove n è un numero naturale. Abbiamo cioè:

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ per } 1 \leq i \leq n\}.$$

Osserviamo che $\mathbb{R}^n$ può essere facilmente identificato con l'insieme $\mathrm{M}(1, n, \mathbb{R})$ delle matrici reali a una riga e n colonne: a ogni elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di $\mathbb{R}^n$ possiamo associare la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e viceversa. Possiamo anche trasportare le operazioni da $\mathrm{M}(1, n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^n$ in modo tale che $\mathbb{R}^n$ risulti uno spazio vettoriale. Poniamo allora:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \\ k(a_1, a_2, \dots, a_n) &:= (ka_1, ka_2, \dots, ka_n). \end{aligned}$$ $\triangle$

Esempio 13.7 Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con le operazioni così definite:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ k(a_1, a_2) &:= (0, ka_2). \end{aligned}$$

Poiché l'operazione di addizione è la stessa utilizzata nell'esempio 13.6, le proprietà 1, 2, 3 e 4 (che coinvolgono solo l'operazione di addizione) sono verificate. Per verificare la proprietà 5, osserviamo che $1(a_1, a_2) = (0, a_2)$: dunque se $a_1 \neq 0$, troviamo che $1(a_1, a_2) \neq (a_1, a_2)$. La proprietà 5 non è dunque verificata e, pertanto, $\mathbb{R}^2$ con queste operazioni non è uno spazio vettoriale. Si potrebbe vedere che le proprietà 6, 7 e 8 sono verificate. $\triangle$

Esempio 13.8 Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Possiamo considerare l'usuale addizione tra polinomi e l'usuale moltiplicazione di uno scalare per un polinomio. Si verifica facilmente che con queste operazioni $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale. $\triangle$

13.3 Proprietà degli spazi vettoriali

Nel terzo capitolo abbiamo visto le seguenti proprietà di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$

1. Data la matrice nulla $0 \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha:

$$h0 = 0.$$

2. Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ si ha:

$$0A = 0.$$

Notiamo che a sinistra con 0 abbiamo indicato $0 \in \mathbb{R}$, a destra invece con 0 abbiamo indicato $0 \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$

3. Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ si ha:

$$(-1)A = -A$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $V^2(O)$. In esso sono valide proprietà analoghe:

1. Dato il vettore nullo $\mathbf{0} \in V^2(O)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha:

$$h\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2. Per ogni $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$ si ha:

$$0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

3. Per ogni $\boldsymbol{v} \in V^2(O)$ si ha:

$$(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}.$$

Viene allora spontaneo chiedersi se valgano analoghe proprietà in tutti gli spazi vettoriali. Possiamo verificare facilmente che è così per tutti gli esempi di spazi vettoriali che abbiamo fornito in questo capitolo: basta calcolare esplicitamente i vari prodotti interessati. Il fatto che valgano per tutti gli esempi che abbiamo dato non è però sufficiente a concludere che valgano in generale. Se vogliamo provare a dimostrare queste proprietà per uno spazio vettoriale qualunque dobbiamo operare in modo diverso: per definizione di spazio vettoriale sappiamo che esistono delle operazioni, e sappiamo che tali operazioni soddisfano alcune proprietà ma non abbiamo una formula che ci permetta di calcolarle esplicitamente. Dobbiamo quindi cercare di dimostrare queste proprietà in maniera, per così dire, astratta.

Cominciamo dando il:

Teorema 13.9 (legge di cancellazione della somma) *Siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Allora*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \textit{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}.$$

Come casi particolari abbiamo:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \textit{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \mathbf{0};$$
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \textit{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}.$$

Esercizio di base 13.10 Dimostrare la legge di cancellazione.

Vogliamo ora calcolare il prodotto dello scalare 0 per un vettore qualsiasi $\boldsymbol{v}$. Utilizzando unicamente le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale abbiamo allora:

$$0\boldsymbol{v} = (0 + 0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}.$$

Dalla legge di cancellazione segue allora che $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Calcoliamo ora il prodotto di uno scalare qualsiasi h per il vettore nullo. Utilizzando le proprietà di spazio vettoriale abbiamo allora:

$$h\mathbf{0} = h(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = h\mathbf{0} + h\mathbf{0}.$$

Dalla legge di cancellazione segue allora che $h\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Abbiamo così dimostrato la:

Proposizione 13.11 *In uno spazio vettoriale V valgono le proprietà:*

1. $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$*;*

2. $h\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *per ogni* $h \in \mathbb{R}$.

Viene spontaneo chiedersi se sia possibile ottenere il vettore nullo come prodotto di uno scalare per un vettore in altri modi. La risposta è data dal:

Teorema 13.12 *Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore di uno spazio vettoriale V, e sia h un elemento di $\mathbb{R}$. Se $h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ allora $h = 0$ oppure $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione Sappiamo che $h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Dobbiamo mostrare che $h = 0$ opuure $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Se $h = 0$ abbiamo finito, se $h \neq 0$ mostriamo che $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Moltiplichiamo per h^{-1} entrambi i membri dell'uguaglianza $h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ e otteniamo:

$$h^{-1}(h\boldsymbol{v}) = h^{-1}\mathbf{0}.$$

Ora $h^{-1}(h\boldsymbol{v}) = (h^{-1}h)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, e $h^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$: pertanto $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. ■

Proposizione 13.13 *Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di uno spazio vettoriale V allora vale l'uguaglianza $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.*

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che $(-1)\boldsymbol{v}$ è l'opposto del vettore $\boldsymbol{v}$. Dobbiamo cioè mostrare che $\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Allora:

$$\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$ ■

13.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.13.4 Ovviamente $2\boldsymbol{v} = (1+1)\boldsymbol{v}$. Dalla proprietà 7 abbiamo che $(1+1)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v}+1\boldsymbol{v}$. La proprietà 5 ci dice che $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. In conclusione:

$$2\boldsymbol{v} = (1 + 1)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}.$$

EB.13.10 Chiaramente se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ allora vale l'uguaglianza $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$. Viceversa se $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ allora sommando ad ambo i membri di questa uguaglianza il vettore $-\boldsymbol{u}$ otteniamo

$$-\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$$

da cui si ha, per la proprietà associativa:

$$(-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w}$$

cioè

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0} + \boldsymbol{w}$$

vale a dire $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

13.5 Sunto

Spazi vettoriali

Definizione (di spazio vettoriale sui reali) Sia dato un insieme non vuoto V, i cui elementi vengono chiamati **vettori**. Chiameremo invece **scalari** gli elementi di $\mathbb{R}$. In V sia definita un'**operazione binaria interna**, cioè una legge che a ogni coppia $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ di vettori di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. Tale operazione viene chiamata **addizione** in V e il vettore $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ viene detto **somma** dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sia inoltre definita un'**operazione binaria esterna**, cioè una legge che a ogni coppia $(k, \boldsymbol{v})$ formata da uno scalare k e da un vettore $\boldsymbol{v}$ di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $k\boldsymbol{v}$. Tale operazione viene chiamata **moltiplicazione per uno scalare** e il vettore $k\boldsymbol{v}$ viene detto **prodotto** dello scalare k per il vettore $\boldsymbol{v}$. L'insieme V dotato delle operazioni di addizione e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare viene detto **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$ se sono verificate le proprietà:

1. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in V$.

2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$.

3. Esiste un vettore $\boldsymbol{e} \in V$ tale che $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.

   Si può dimostrare che un tale vettore $\boldsymbol{e}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $\mathbf{0}$ e lo chiamiamo **vettore nullo**.

   Scriveremo allora $\boldsymbol{u}+\mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.

4. Per ogni vettore $\boldsymbol{u} \in V$ esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

   Si può dimostrare che un tale vettore $\boldsymbol{v}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $-\boldsymbol{u}$ e lo chiamiamo **vettore opposto** del vettore $\boldsymbol{u}$.

   Scriveremo allora $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

5. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$.

6. $h(k(\boldsymbol{u})) = (hk)\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

7. $(h+k)\boldsymbol{u} = h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

8. $h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = h\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{v}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Proprietà degli spazi vettoriali

Teorema (legge di cancellazione della somma) *Siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Allora*

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \text{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}.$$

Come casi particolari abbiamo:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \mathbf{0};$$
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \text{ se e solo se } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}.$$

Proposizione *In uno spazio vettoriale V valgono le proprietà:*

1. $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$*;*

2. $h\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *per ogni* $h \in \mathbb{R}$*.*

Teorema *Sia* $\boldsymbol{v}$ *un vettore di uno spazio vettoriale* V*, e sia* h *un elemento di* $\mathbb{R}$*. Se* $h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ *allora* $h = 0$ *oppure* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$*.*

Proposizione *Se* $\boldsymbol{v}$ *è un vettore di uno spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{R}$ *allora vale l'uguaglianza* $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$*.*

CAPITOLO 14

Sottospazi vettoriali

In questo capitolo studieremo i sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V, vale a dire quei sottoinsiemi di uno spazio vettoriale che sono essi stessi spazi vettoriali.

14.1 Sottospazi vettoriali

Supponiamo di avere un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V. Ci chiediamo se E sia esso stesso uno spazio vettoriale. Affinché questa domanda abbia senso, dobbiamo innanzitutto precisare quali sono le operazioni da utilizzare in E. Verrebbe spontaneo rispondere che possiamo utilizzare le stesse operazioni di V. Questa risposta nasconde però un'insidia. Consideriamo infatti il seguente:

Esempio 14.1 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ formato dalle matrici che hanno almeno un elemento nullo. Dunque, ad esempio, le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono matrici di E, mentre la matrice

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

non è una matrice di E. Potremmo allora cercare di stabilire se E sia uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni che possiamo indurre dalle operazioni dello spazio vettoriale $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Prima di verificare se le operazioni soddisfano le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale, è però opportuno fare un passo indietro e chiedersi: è vero che possiamo definire delle operazioni in E a partire dalle corrispondenti operazioni di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$? Potremmo essere tentati di rispondere di sì, perché se sappiamo sommare due matrici qualunque di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$, in particolare sappiamo sommare due matrici di E. Ciò è vero, ma se prendiamo, ad esempio, le due matrici A e B di E date in precedenza, vediamo che:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $A+B$ non è una matrice di E: non possiamo cioè utilizzare l'operazione di addizione di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ per definire un'operazione di addizione in E. △

L'esempio precedente ci mostra che, dato un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V, non è detto che l'operazione di addizione di V induca un'operazione di addizione in E. Consideriamo ora il seguente:

Esempio 14.2 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ formato dalle matrici che hanno tutti gli elementi interi. Dunque, ad esempio, le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

sono matrici di E, mentre la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

non è una matrice di E. Si vede facilmente che la somma di due matrici di E è ancora una matrice di E, e, dunque, in E risulta definita un'operazione di addizione, ma se moltiplichiamo una matrice di E per uno scalare non è detto che otteniamo sempre una matrice di E, come si può vedere moltiplicando la matrice A per $\frac{1}{2}$. Dunque in E non possiamo definire un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore. △

Gli esempi precedenti ci mostrano che, dato un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V, per stabilire se E sia esso stesso uno spazio vettoriale, dobbiamo innanzitutto stabilire se abbiamo delle operazioni in E, e poi verificare se queste operazioni soddisfano le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale. Diamo allora la:

Definizione 14.3 Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio vettoriale** di V (o, più brevemente, sottospazio) se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E & \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in E \\ k\boldsymbol{u} \in E & \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in E. \end{aligned}$$

△

Se E è un sottospazio vettoriale di V, allora le operazioni di V inducono in E un'operazione di addizione di vettori e un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore. Adesso sì che ha senso chiedersi se E, rispetto a queste operazioni, sia uno spazio vettoriale. Si tratta dunque di verificare tutte le proprietà. Vorremmo però evitare di doverlo fare per ogni singolo esempio che affrontiamo: ci chiediamo se alcune proprietà (o magari tutte) siano automaticamente soddisfatte. Ad esempio, se abbiamo tre vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ di E è chiaro che si ha $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ perché ciò è vero in tutto V. Lo stesso ragionamento può applicarsi ad altre delle proprietà che definiscono il concetto di spazio vettoriale. Ci sono però due proprietà che richiedono un po' di attenzione: l'esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione e l'esistenza dell'opposto. Sappiamo infatti che in V esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$: a maggior ragione si avrà $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in E$. Non sappiamo però a priori se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene esso stesso ad E. Allo stesso modo, dato un vettore $\boldsymbol{u} \in E$, dal momento che questo vettore è un vettore di V, esiste in V il vettore opposto di $\boldsymbol{u}$, ma non sappiamo a priori se $-\boldsymbol{u}$ appartiene ad E. In realtà queste due proprietà (esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto) sono automaticamente soddisfatte in un sottospazio vettoriale, come risulta dal:

Teorema 14.4 *Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora $\mathbf{0} \in E$ e, per ogni vettore $\boldsymbol{u}$ di E, il vettore $-\boldsymbol{u}$ appartiene ad E. Dunque E è esso stesso uno spazio vettoriale (e ciò giustifica il nome di sottospazio).*

DIMOSTRAZIONE Vogliamo mostrare che $\mathbf{0} \in E$. Sappiamo che se k è un numero reale e se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di E si ha che $k\boldsymbol{v}$ appartiene ad E. In particolare ciò è vero se prendiamo come scalare k il numero 0 e come vettore $\boldsymbol{v}$ un qualsiasi vettore di E (che è non vuoto, per definizione di sottospazio vettoriale). Dunque $0\boldsymbol{v} \in E$, ma $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{0} \in E$.

Vogliamo ora mostrare che se $\boldsymbol{u}$ è un vettore di E allora $-\boldsymbol{u}$ appartiene anch'esso ad E. Come prima, sappiamo che $k\boldsymbol{u}$ appartiene ad E qualunque sia k: in particolare $(-1)\boldsymbol{u}$ appartiene ad E. Poiché $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ abbiamo il nostro risultato. ■

Nella dimostrazione di questo teorema abbiamo mostrato che l'elemento neutro della addizione di E è necessariamente lo stesso elemento neutro della addizione di V. Abbiamo dunque la seguente osservazione, banale, ma molto utile:

Osservazione 14.5 Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore $\mathbf{0}$ allora E non è un sottospazio vettoriale di V. △

Notiamo che in generale, dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V per mostrare che E è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto mostrare che E non è vuoto: invece di far ciò possiamo semplicemente verificare se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene ad E. Se infatti $\mathbf{0}$ appartiene ad E, allora E è sicuramente non vuoto, e possiamo quindi passare a verificare le altre proprietà. Se, invece, $\mathbf{0}$ non appartiene ad E, non è detto che E sia vuoto (E potrebbe contenere dei vettori diversi dal vettore nullo): sicuramente, però possiamo affermare che E non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio di base 14.6 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. △

Esercizio di base 14.7 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. △

Esempio 14.8 Dato un qualsiasi spazio vettoriale V il sottoinsieme $\{\mathbf{0}\}$ di V formato dal solo vettore nullo è ovviamente un sottospazio vettoriale di V. Lo spazio vettoriale V è inoltre un sottospazio vettoriale di se stesso. Questi due sottospazi vettoriali di V sono detti **sottospazi banali**. △

Esempio 14.9 Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n. Vediamo alcuni esempi di suoi sottospazi vettoriali (i primi 3 li abbiamo già incontrati nel capitolo 2):

- il sottoinsieme $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ delle matrici triangolari superiori;
- il sottoinsieme $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ delle matrici triangolari inferiori;
- il sottoinsieme $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ delle matrici simmetriche;
- il sottoinsieme $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche, vale a dire delle matrici A tali che ${}^tA = -A$.

La dimostrazione del fatto che questi siano sottospazi vettoriali non è difficile. Innanzitutto sono tutti non vuoti perché la matrice nulla appartiene a ciascuno di essi.

Per quanto riguarda $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$, è facile vedere che la somma di due matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore, e che, moltiplicando una matrice triangolare superiore per uno scalare, si ottiene una matrice triangolare superiore. Dunque $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$. Per il sottoinsieme $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ si procede in maniera analoga.

Consideriamo ora $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$: dobbiamo mostrare che, se A e B sono due matrici di $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ allora $A + B$ appartiene a $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$: sappiamo cioè che ${}^tA = A$ e ${}^tB = B$ e dobbiamo mostrare che ${}^t(A + B) = A + B$. Si ha

$$ {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B. $$

Dobbiamo ora mostrare che se A appartiene a $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ e k è uno scalare allora kA appartiene a $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$: sappiamo cioè che ${}^tA = A$ e dobbiamo mostrare che ${}^t(kA) = kA$. Si ha

$$ {}^t(kA) = k\,{}^tA = kA. $$

Abbiamo mostrato che $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale.

Consideriamo infine $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$. Dobbiamo mostrare che, se A e B sono due matrici di $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$ allora $A+B$ appartiene a $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$: sappiamo cioè che ${}^tA = -A$ e ${}^tB = -B$ e dobbiamo mostrare che ${}^t(A + B) = -(A + B)$. Si ha

$$ {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = -A - B = -(A + B). $$

Infine dobbiamo mostrare che se A appartiene a $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$ e k è uno scalare allora kA appartiene a $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$: sappiamo cioè che ${}^tA = -A$ e dobbiamo mostrare che ${}^t(kA) = -kA$. Si ha

$$ {}^t(kA) = k\,{}^tA = k(-A) = -kA. $$ △

Esempio 14.10 Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^{\geq 0}$ di $\mathbb{R}$ formato dai numeri maggiori o uguali a 0. Questo è un sottoinsieme non vuoto. La somma di due numeri di $\mathbb{R}^{\geq 0}$ appartiene chiaramente a $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Il prodotto di uno scalare (cioè un elemento di $\mathbb{R}$) per un vettore (cioè un elemento di $\mathbb{R}^{\geq 0}$) non appartiene necessariamente a $\mathbb{R}^{\geq 0}$ (ad esempio $-1 \cdot 1 \notin \mathbb{R}^{\geq 0}$). Dunque $\mathbb{R}^{\geq 0}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$. $\triangle$

Esempio 14.11 Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Sia n un numero naturale: consideriamo il sottoinsieme $\mathbb{R}^n[x]$ dei polinomi di $\mathbb{R}[x]$ di grado minore di n (si ricorda che un polinomio ha grado d se può essere scritto nella forma

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dove a_d, a_{d-1}, ..., a_1, a_0 sono numeri reali e $a_d \neq 0$. Per completezza diciamo che il polinomio nullo ha grado -1). I polinomi di grado minore di n sono allora quelli che si possono scrivere nella forma:

$$a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 numeri reali. Notiamo in particolare che $\mathbb{R}^1[x]$ è semplicemente $\mathbb{R}$, mentre $\mathbb{R}^0[x]$ è il sottoinsieme formato dal solo numero 0. Si vede facilmente che $\mathbb{R}^n[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. $\triangle$

Consideriamo ora un sistema S di p equazioni lineari in q incognite. Sappiamo che S può essere scritto nella forma matriciale $AX = B$, dove $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ è la matrice dei coefficienti, $B \in \mathrm{M}(p, 1, \mathbb{R})$ è la matrice colonna dei termini noti e X è la matrice colonna delle incognite. Le soluzioni di S formano un sottoinsieme $\mathrm{Sol}(S)$ di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$. Ci chiediamo se $\mathrm{Sol}(S)$ sia un sottospazio di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$. Come prima cosa verifichiamo se la matrice nulla appartiene a $\mathrm{Sol}(S)$. Ciò avviene se e solo se $A0 = B$, cioè se e solo se $B = 0$, vale a dire se i termini noti di tutte le equazioni sono nulli. Ciò ci suggerisce la:

Definizione 14.12 Un sistema S di equazioni lineari si dice **omogeneo** se i termini noti di tutte le equazioni che compongono il sistema S sono nulli. $\triangle$

Abbiamo l'immediata:

Osservazione 14.13 Un sistema lineare omogeneo $S \colon AX = 0$ è sempre risolubile perché ammette (almeno) la soluzione $X = 0$, detta **soluzione banale** o **soluzione nulla**. Ovviamente un sistema omogeneo può avere altre soluzioni oltre a quella banale. $\triangle$

Esercizio di base 14.14 Dimostrare che un sistema omogeneo $S \colon AX = 0$ ammette soluzioni non banali se e solo se il rango di A è minore del numero delle incognite.

Dalle argomentazioni viste sopra, sappiamo che se S è un sistema non omogeneo allora $\mathrm{Sol}(S)$ non contiene la matrice nulla e quindi abbiamo la:

Osservazione 14.15 L'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo S di p equazioni in q incognite non è un sotto spazio vettoriale di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$. $\triangle$

Dobbiamo allora vedere cosa succede se consideriamo l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Abbiamo il:

Teorema 14.16 *Dato un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite $S\colon AX = 0$ l'insieme* $\mathrm{Sol}(S)$ *delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di* $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$.

Dimostrazione Abbiamo già osservato che $\mathrm{Sol}(S) \neq \varnothing$ perché contiene la matrice nulla. Siano ora X_1 e X_2 due elementi di $\mathrm{Sol}(S)$. Dobbiamo dimostrare che $X_1 + X_2 \in \mathrm{Sol}(S)$. Notiamo che poiché X_1 e X_2 sono due soluzioni di S abbiamo che $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Per provare che $X_1 + X_2 \in \mathrm{Sol}(S)$ dobbiamo allora mostrare che $X_1 + X_2$ è una soluzione di S, vale a dire che $A(X_1 + X_2) = 0$. Ma

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0.$$

Mostriamo ora che il prodotto di uno scalare k per un elemento X_1 di $\mathrm{Sol}(S)$ sta ancora in $\mathrm{Sol}(S)$. Sappiamo allora che $AX_1 = 0$ e, dobbiamo provare che $A(kX_1) = 0$. Ma

$$A(kX_1) = k(AX_1) = k0 = 0.$$

■

Esercizio di base 14.17 Dimostrare che il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)$ la cui ultima componente è nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Possiamo dire lo stesso per il sottoinsieme F formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1)$ la cui ultima componente è uguale a 1?

14.2 Sottospazi di $V^2(O)$ e di $V^3(O)$

Se r è una retta del piano o dello spazio passante per l'origine abbiamo visto che:

1. sommando vettori il cui termine giace su r si ottiene un vettore il cui termine giace su r (osservazione 11.16);

2. moltiplicando un vettore il cui termine giace su r per uno scalare si ottiene un vettore il cui termine giace su r (osservazione 11.17).

In altri termini

Proposizione 14.18 *Data una retta r del piano o dello spazio passante per O, il sottoinsieme E di $V^2(O)$ (o $V^3(O)$) formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$ è un sottospazio vettoriale.*

In maniera analoga, utilizzando le osservazioni 11.18 e 11.19 si ha la:

Proposizione 14.19 *Dato un piano π dello spazio passante per O, il sottoinsieme E di $V^3(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \pi$ è un sottospazio vettoriale.*

Dunque a rette e piani passanti per l'origine corrispondono sottospazi vettoriali di $V^2(O)$ e di $V^3(O)$. Più avanti vedremo (esempio 17.33) che, a parte i sottospazi banali, tutti i sottospazi vettoriali di $V^2(O)$ e di $V^3(O)$ sono di questo tipo.

14.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.14.6 Chiaramente il sottoinsieme E è non vuoto, perché contiene, ad esempio, la matrice nulla. Consideriamo ora due matrici generiche:

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

di E. La loro somma

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

appartiene ad E se e solo se esistono due numeri reali a_3 e b_3 tali che

$$M + N = \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Si vede allora che basta porre $a_3 := a_1 + a_2$ e $b_3 := b_1 + b_2$. Analogamente se consideriamo il prodotto di uno scalare k per la matrice M troviamo:

$$kM = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice appartiene ad E se e solo se esistono due numeri reali a_4 e b_4 tali che

$$kM = \begin{pmatrix} a_4 & a_4 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Si vede allora che basta porre $a_4 := ka_1$ e $b_4 := kb_1$. Dunque E è un sottospazio vettoriale.

EB.14.7 Notiamo che il sottoinsieme E non contiene la matrice nulla. Dunque E non è un sottospazio vettoriale.

EB.14.14 Dire che il sistema S ammette soluzioni non banali è equivalente ad affermare che ha più di una soluzione. Sappiamo che le soluzioni di un sistema risolubile di matrice A dipendono da $q - \operatorname{rk} A$ parametri, dove q è il numero delle incognite. Dunque il sistema S ha più di una soluzione se e solo se $q - \operatorname{rk} A > 0$.

EB.14.17 Il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)$ la cui ultima componente è nulla può essere visto come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, …, x_n formato dall'unica equazione $x_n = 0$. Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allo stesso modo F può essere visto come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare non omogeneo nelle incognite x_1, x_2, …, x_n formato dall'unica equazione $x_n = 1$, e, dunque, F non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

14.4 Sunto

Sottospazi vettoriali

Definizione Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio vettoriale** di V (o, più brevemente, sottospazio) se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E &\text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in E, \\ k\boldsymbol{u} \in E &\text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in E. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Se E è un sottospazio vettoriale di V, allora le operazioni di V inducono in E un'operazione di addizione di vettori e un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore. Abbiamo il:

Teorema *Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora E è esso stesso uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni indotte dalle operazioni di V.*

Osservazione Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore $\mathbf{0}$ allora E non è un sottospazio vettoriale di V. △

Definizione Un sistema S di equazioni lineari si dice **omogeneo** se i termini noti di tutte le equazioni che compongono il sistema S sono nulli. △

Osservazione Un sistema lineare omogeneo $S\colon AX = 0$ è sempre risolubile perché ammette (almeno) la soluzione $X = 0$, detta **soluzione banale** o **soluzione nulla**. Ovviamente un sistema omogeneo può avere altre soluzioni oltre a quella banale: ciò avviene se e solo se il rango di A è minore del numero delle incognite. △

Osservazione L'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo S di p equazioni in q incognite non è un sotto spazio vettoriale di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$. △

Teorema *Considerato un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite $S\colon AX = 0$, l'insieme $\mathrm{Sol}(S)$ delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$.*

Sottospazi di $V^2(O)$ e di $V^3(O)$

Proposizione *Data una retta r del piano o dello spazio passante per O, il sottoinsieme E di $V^2(O)$ (o $V^3(O)$) formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$ è un sottospazio vettoriale.*

Proposizione *Dato un piano π dello spazio passante per O, il sottoinsieme E di $V^3(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \pi$ è un sottospazio vettoriale.*

14.5 Esercizi

E.14.1 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 3, \mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & 2a & 0 \\ b-a & 0 & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 3, \mathbb{R})$.

E.14.2 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di a in $\mathbb{R}$. Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

E.14.3 Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b-1 \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

E.14.4 Stabilire se il sottoinsieme E dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.5 Stabilire se il sottoinsieme E dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.6 Stabilire se il sottoinsieme E dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tali che $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.7 Stabilire se l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$.

E.14.8 Sia n un numero intero positivo o nullo. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$ sono sottospazi vettoriali:

a. il sottoinsieme E formato dai polinomi di grado almeno n;

b. il sottoinsieme F formato dai polinomi di grado almeno n e dallo 0;

c. il sottoinsieme G formato dai polinomi di grado n;

d. il sottoinsieme H formato dai polinomi di grado n e dallo 0;

e. il sottoinsieme J formato dai polinomi omogenei di grado n e dallo 0.

E.14.9

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$.

a. Il sottoinsieme E formato dai polinomi del tipo $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i cui coefficienti soddisfano la relazione $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$.

b. Il sottoinsieme F formato dai polinomi del tipo $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con i coefficienti di potenze pari sono nulli (i.e. $a_i = 0$ se i è pari).

c. Il sottoinsieme G formato dai polinomi $f(x)$ tali che $f(0) \geq 0$.

d. Il sottoinsieme H formato dai polinomi $f(x)$ tali che $f(0) = f'(0) = 0$.

E.14.10 Tra i seguenti sottoinsiemi dire quali sono sottospazi vettoriali.

a. Il sottoinsieme $E := \{(x, y, z) \mid x + y = y + z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$;

b. il sottoinsieme $E := \{(x, y, z) \mid x + y = yz = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$;

c. il sottoinsieme $E := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$ di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$;

d. il sottoinsieme $E := \{(x,y) \mid y = 3x\}$ di $\mathbb{R}^2$;

e. il sottoinsieme $E := \{(x,y) \mid y = 3x+1\}$ di $\mathbb{R}^2$;

f. il sottoinsieme $E := \{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{ij} \in \mathbb{Q}\}$ di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$.

14.6 Soluzioni degli esercizi

E.14.1 Chiaramente E è non vuoto. Consideriamo due matrici

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & 2a_1 & 0 \\ b_1 - a_1 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & 2a_2 & 0 \\ b_2 - a_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

di E. Vediamo che si ha

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 2a_1 + 2a_2 & 0 \\ b_1 - a_1 + b_2 - a_2 & 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M + N$ appartiene a E se e solo se esistono numeri reali a_3 e b_3 tali che:

$$M + N = \begin{pmatrix} a_3 & 2a_3 & 0 \\ b_3 - a_3 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Basta allora porre $a_3 := a_1 + a_2$ e $b_3 := b_1 + b_2$. Analogamente se consideriamo il prodotto di uno scalare k per la matrice M troviamo:

$$kM = \begin{pmatrix} ka_1 & 2ka_1 & 0 \\ kb_1 - ka_1 & 0 & kb_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice kM appartiene a E se e solo se esistono numeri reali a_4 e b_4 tali che:

$$kM = \begin{pmatrix} a_4 & 2a_4 & 0 \\ b_4 - a_4 & 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Basta porre $a_4 := ka_1$ e $b_4 := kb_1$. Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$.

E.14.2 Chiaramente E è non vuoto. Consideriamo due matrici

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

di E. Vediamo che si ha

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1^2 + a_2^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M + N$ appartiene a E se e solo se esiste a_3 in $\mathbb{R}$ tale che:

$$M + N = \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dovremmo allora avere $a_3 = a_1 + a_2$ e $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$. In generale questo non è possibile: basta infatti scegliere $a_1 = a_2 = 1$. In tal caso avremmo $a_1 + a_2 = 2$ e $a_1^2 + a_2^2 = 2$. Le condizioni $a_3 = 2$ e $a_3^2 = 2$ sono ovviamente in contraddizione. Dunque E non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$.

E.14.3 Chiaramente E è non vuoto. Consideriamo due matrici

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 - 1 \end{pmatrix}$$

di E. Vediamo che si ha

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Per stabilire se $M + N$ appartiene ad E dobbiamo stabilire se esistono dei numeri reali a_3 e b_3 tali che:

$$M + N = \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3 & b_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo allora che ciò si ottiene ponendo $a_3 := a_1 + a_2$ e $b_3 := b_1 + b_2 - 1$.

Analogamente se consideriamo il prodotto di uno scalare k per la matrice M troviamo:

$$kM = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_1 \\ ka_1 & kb_1 - k \end{pmatrix}.$$

Per vedere se kM appartiene in E dobbiamo stabilire se esistono dei numeri reali a_4 e b_4 tali che:

$$kM = \begin{pmatrix} a_4 & a_4 \\ a_4 & b_4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo allora che ciò si ottiene ponendo $a_4 := ka_1$ e $b_4 := kb_1 - k + 1$.

Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

E.14.4 Il sottoinsieme E può essere visto come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formato dall'unica equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.5 Il sottoinsieme E può essere visto come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare non omogeneo nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formato dall'unica equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Pertanto E non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.6 Il sottoinsieme E può essere visto come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

E.14.7 Ovviamente $\mathbb{Q}$ è non vuoto. La somma di due vettori di $\mathbb{Q}$ (ovvero di due numeri razionali) è un numero razionale, cioè un vettore di $\mathbb{Q}$. Se moltiplichiamo uno scalare k (cioè un numero reale) per un vettore $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{Q}$ (cioè un numero razionale) non è detto che il risultato sia un elemento di $\mathbb{Q}$ (basta considerare l'esempio $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

E.14.8 I sottoinsiemi E e G non sono sottospazi vettoriali perché non contengono il polinomio nullo (ricordiamo che il grado di 0 è -1).

Il sottoinsieme F è un sottospazio vettoriale se $n = 0$ (in tal caso infatti $F = \mathbb{R}[x]$), mentre se $n > 0$ non è un sottospazio vettoriale: infatti consideriamo ad esempio i due polinomi $x^n + 1$ e $-x^n$: essi appartengono a F ma la loro somma $x^n + 1 + (-x^n) = 1$ non appartiene a F perché 1 ha grado 0.

Lo stesso esempio utilizzato per F ci mostra che H non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ se $n > 0$, mentre H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ se $n = 0$ (in tal caso infatti $H = \mathbb{R}$).

Il sottoinsieme J è invece uno sottospazio vettoriale: esso è infatti formato da tutti e soli i polinomi del tipo ax^n con $a \in \mathbb{R}$ (per $a = 0$ otteniamo il polinomio nullo, per $a \neq 0$ otteniamo i polinomi omogenei di grado n). La somma di due polinomi ax^n e bx^n di J è uguale a $(a+b)x^n$ che appartiene ancora a J, e il prodotto di uno scalare k per un polinomio ax^n di J è uguale a $(ka)x^n$ che appartiene ancora a J.

E.14.9

a. Ovviamente l'insieme E è non vuoto perché contiene, ad esempio, il polinomio nullo. Siano $f(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) := b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ due polinomi di E, cioè tali che $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$ e $b_0 + b_1 + \cdots + b_m = 0$. Supponiamo che sia ad esempio $n \leq m$. Possiamo riscrivere il polinomio $f(x)$ così:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m$$

con $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$. Se invece $n \geq m$ riscriviamo in maniera analoga $g(x)$. In tal modo possiamo supporre che $m = n$ (ovviamente se fosse già $m = n$, non dovremmo riscrivere nulla). Allora:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m.$$

Sommando i coefficienti delle incognite del polinomio così ottenuto troviamo

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = 0.$$

Dunque $f(x) + g(x)$ appartiene a E.

Sia ora λ un elemento di $\mathbb{R}$. Si ha

$$\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n.$$

Sommando i coefficienti delle incognite del polinomio così ottenuto troviamo

$$\lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = 0.$$

Dunque $\lambda f(x)$ appartiene a E. Pertanto E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

b. Ovviamente F è non vuoto perché contiene, ad esempio, il polinomio nullo. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi di F consideriamo il polinomio $h(x) := f(x) + g(x)$. Dobbiamo verificare se ogni potenza pari x^{2i} di x ha coefficiente nullo in $h(x)$. Il coefficiente di x^{2i} in $h(x)$ è uguale alla somma del coefficiente di x^{2i} in $f(x)$ e del coefficiente di x^{2i} in $g(x)$. Per ipotesi il coefficiente di x^{2i} in $f(x)$ è nullo, così come il coefficiente di x^{2i} in $g(x)$. Dunque il coefficiente di x^{2i} in $h(x)$ è nullo. Pertanto $h(x)$ appartiene a F.

Sia ora λ un elemento di $\mathbb{R}$ e consideriamo il polinomio $\lambda f(x)$. Dobbiamo verificare se ogni potenza pari x^{2i} di x ha coefficiente nullo in $\lambda f(x)$. Il coefficiente di x^{2i} in $\lambda f(x)$ è uguale a λa_{2i}, dove a_{2i} è il coefficiente di x^{2i} in $f(x)$. Per ipotesi sappiamo che $a_{2i} = 0$ e, dunque, $\lambda a_{2i} = 0$, cioè i coefficienti di potenze paridi x nel polinomio $\lambda f(x)$ sono tutti nulli. Dunque $\lambda f(x)$ appartiene a F.

Pertanto F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

c. Ovviamente G è non vuoto perché contiene, ad esempio, il polinomio nullo. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi di G, consideriamo il polinomio $h(x) := f(x) + g(x)$. Dobbiamo verificare se $h(0) \geq 0$. Ora $h(0) = f(0) + g(0)$: poiché $f(0) \geq 0$ e $g(0) \geq 0$ si ha che $h(0) \geq 0$, cioè che $h(x)$ appartiene a G. Sia ora λ un elemento di $\mathbb{R}$, e sia $k(x) := \lambda f(x)$. Dobbiamo verificare se $k(0) \geq 0$. Ora $k(0) = \lambda f(0)$. Se scegliamo $\lambda < 0$ (ad esempio $\lambda = -1$) e $f(x)$ tale che $f(0) > 0$ (ad esempio $f(x) = 1$) sia ha che $k(0) < 0$, cioè che $k(x)$ non appartiene a G. Dunque G non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

d. Ovviamente H è non vuoto perché contiene, ad esempio, il polinomio nullo. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi di H consideriamo il polinomio $h(x) \coloneqq f(x) + g(x)$. Sappiamo che per ipotesi si ha

$$f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0.$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) + g(0) = 0, \\ h'(0) &= f'(0) + g'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dunque $h(x)$ appartiene a H.

Sia ora λ un numero reale: consideriamo il polinomio $k(x) \coloneqq \lambda f(x)$. Si ha:

$$\begin{aligned} k(0) &= \lambda f(0) = 0, \\ k'(0) &= \lambda f'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dunque $k(x)$ appartiene a H.

In conclusione H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

E.14.10

a. E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

b. E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^3$ perché $(0, 0, 0)$ appartiene a E. Siano ora (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due vettori di E. Questo significa che

$$x_1 + y_1 = y_1 z_1 = x_2 + y_2 = y_2 z_2 = 0.$$

Verifichiamo se $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ appartiene a E. Si ha

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Ill vettore $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartiene a E se e solo se

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) &= 0 \\ (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) &= 0. \end{aligned}$$

Verifichiamo se queste relazioni sono soddisfatte. Si ha:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0 \\ (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) &= y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + y_2 z_2 = y_1 z_2 + y_2 z_1. \end{aligned}$$

Si noti che nei calcoli abbiamo sfruttato le relazioni

$$x_1 + y_1 = y_1 z_1 = x_2 + y_2 = y_2 z_2 = 0.$$

Vediamo allora che $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ appartiene a E se e solo se

$$y_1 z_2 + y_2 z_1 = 0.$$

Questa uguaglianza non è sempre verificata: se ad esempio (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sono rispettivamente i vettori $(-1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ (che, si noti, sono vettori di E) otteniamo $y_1 z_2 + y_2 z_1 = 1$. Pertanto, E non è un sottospazio vettoriale.

c. E non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ perché la matrice nulla non appartiene a E.

d. E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

e. E non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo.

f. E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$ perché la matrice nulla appartiene a E.

Siano ora $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ due matrici generiche di E. Questo significa che a_{ij} e b_{ij} sono numeri razionali per ogni i e j. Allora la matrice somma $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$ appartiene a E perché $a_{ij}+b_{ij}$ è un numero razionale per ogni i e j.

Se, infine $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ è una matrice di E (e quindi a_{ij} è un numero razionale per ogni i e j) e λ è un numero reale non è detto che $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}$ appartenga a E perché non è detto che tutti i λa_{ij} siano numeri razionali (ad esempio se $a_{11} = 1$ e $\lambda = \sqrt{2}$).

CAPITOLO 15

Generatori

Introduciamo in uno spazio vettoriale qualsiasi un concetto già visto nel caso dei vettori geometrici: la combinazione lineare di vettori. Introduciamo poi il concetto di vettori generatori di uno spazio vettoriale.

15.1 Combinazioni lineari e generatori

Consideriamo le tre matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. Notiamo che queste tre matrici appartengono al sottospazio vettoriale $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici simmetriche. D'altra parte A_1, A_2 e A_3 appartengono anche al sottospazio vettoriale E di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici che hanno l'elemento di posto $(2, 2)$ nullo, vale a dire dalle matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci sono poi anche altri sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ che contengono le matrici A_1, A_2 e A_3: non possiamo certo elencarli tutti. Possiamo però chiederci se, tra tutti i sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ che contengono le matrici A_1, A_2 e A_3 ce ne sia uno più "piccolo" di tutti gli altri. Sicuramente un sottospazio vettoriale F di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ che contiene le matrici A_1, A_2 e A_3 deve contenere tutti i loro multipli, vale a dire le matrici del tipo k_1A_1, k_2A_2, k_3A_3 con k_1, k_2 e k_3 numeri reali. Questo sottospazio F deve poi contenere le somme di questi multipli, vale a dire le matrici che si possono scrivere nella forma:

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3.$$

Si potrebbe proseguire e dire che poi il sottospazio F deve contenere i multipli delle matrici che abbiamo così ottenuto, poi le loro somme e così via. Notiamo però che se consideriamo una matrice A che si può scrivere nella forma

$$A := k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3,$$

e ne facciamo il prodotto per uno scalare k, otteniamo la matrice

$$kA = k(k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3) = (kk_1)A_1 + (kk_2)A_2 + (kk_3)A_3.$$

D'altra parte sommando la matrice A alla matrice

$$B := h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3,$$

otteniamo come risultato:

$$\begin{aligned} A + B &= k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 \\ &= (k_1 + h_1)A_1 + (k_2 + h_2)A_2 + (k_3 + h_3)A_3. \end{aligned}$$

Ma allora l'insieme delle matrici del tipo:

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3.$$

è un sottospazio vettoriale F di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ che contiene A_1, A_2 e A_3 (ad esempio A_1 si ottiene per $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$). Chiaramente un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ che contiene A_1, A_2 e A_3 deve contenere l'intero F. In questo senso, dunque, F è il più "piccolo" sottospazio vettoriale contenente A_1, A_2 e A_3. Vediamo come questo discorso può estendersi al caso di un numero qualunque di vettori. Diamo la:

Definizione 15.1 Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ dei vettori di uno spazio vettoriale V e siano k_1, k_2, ..., k_r degli scalari. Chiamiamo **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ a coefficienti k_1, k_2, ..., k_r il vettore

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r. \qquad \triangle$$

Osserviamo che avevamo già dato questa definizione nel caso particolare dei vettori geometrici dello spazio $V^2(O)$ o $V^3(O)$.

Osservazione 15.2 Nel caso in cui si abbia un singolo vettore $\boldsymbol{v}$, una sua combinazione lineare è semplicemente un suo multiplo, vale a dire un vettore del tipo $k\boldsymbol{v}$, per qualche $k \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Esercizio di base 15.3 Scrivere le combinazioni lineari delle matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Possiamo ora dare il:

Teorema 15.4 *L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, al variare dei coefficienti k_1, k_2, ..., k_r è un sottospazio vettoriale di V che chiamiamo sottospazio vettoriale* ***generato*** *dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ e indichiamo con il simbolo $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. Dunque*

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle := \{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r \mid k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}.$$

Il sottospazio vettoriale $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ contiene i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ ed è contenuto in tutti i sottospazi vettoriali di V contenenti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$.

Dimostrazione La dimostrazione non è dissimile da quella utilizzata nell'esempio con cui abbiamo iniziato questo capitolo. Si noti che in tale dimostrazione non abbiamo utilizzato la forma esplicita delle matrici A_1, A_2 e A_3. Lasciamo per esercizio la dimostrazione del teorema nel caso generale. ■

Esercizio di base 15.5 Dimostrare il teorema precedente.

Segnaliamo che alcuni autori utilizzano, per indicare il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, il simbolo $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r)$ (dove la lettera L sta per lineare).

Definizione 15.6 Se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ diremo che V è **generato** dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ oppure che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ **generano** V o anche che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono **generatori** di V. In altre parole, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono generatori di V se e solo se ogni vettore di V è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$. △

Esempio 15.7 Nel teorema 12.9 abbiamo mostrato che dato un vettore non nullo $\overrightarrow{OA}$ in $V^2(O)$ o in $V^3(O)$, l'insieme dei multipli di $\boldsymbol{v}$ è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ con P appartenente alla retta passante per i punti distinti O e A. Dunque, utilizzando la nomenclatura appena introdotta, possiamo dire che, data una retta r passante per l'origine del piano o dello spazio, e dato un punto A di r distinto dall'origine, l'insieme dei vettori $\overrightarrow{OP}$ con $P \in r$ è un sottospazio vettoriale generato dal vettore $\overrightarrow{OA}$. △

Esempio 15.8 Utilizzando la nomenclatura appena introdotta possiamo reinterpretare i teoremi 12.11 e 12.12.

- Teorema 12.11: dati in $V^2(O)$ due vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ con O, P_1 e P_2 non allineati, i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ generano $V^2(O)$;

- Teorema 12.12: dati in $V^3(O)$ due vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ con O, P_1 e P_2 non allineati, i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ generano il sottospazio vettoriale di $V^3(O)$, formato dai vettori $\overrightarrow{OP}$ con P appartenente al piano passante per O, P_1 e P_2.

△

Esempio 15.9 Analogamente ai due esempi precedenti possiamo dire, grazie al teorema 12.17, che $V^3(O)$ è generato dai vettori $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ e $\overrightarrow{OP_3}$ con O, P_1, P_2 e P_3 non complanari. △

Esempio 15.10 Consideriamo le tre matrici A_1, A_2 e A_3 date all'inizio del capitolo. Il sottospazio vettoriale che esse generano è quello formato dalle matrici del tipo $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$ e cioè:

$$\begin{pmatrix} k_1 + 3k_2 & 2k_1 + k_2 + 2k_3 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

Esempio 15.11 Se consideriamo i tre polinomi 1, x, x^2, vediamo che le loro combinazioni lineari sono i polinomi del tipo:

$$k_1 + k_2 x + k_3 x^2$$

vale a dire tutti i polinomi di grado minore di 3. Dunque 1, x, x^2 generano $\mathbb{R}^3[x]$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ formato dai polinomi di grado minore di 3. In maniera analoga si potrebbe verificare che 1, x, x^2, ..., x^n generano $\mathbb{R}^{n+1}[x]$. △

Esempio 15.12 In alcuni casi è possibile stabilire se un vettore appartiene a un sottospazio vettoriale risolvendo un opportuno sistema lineare. Sia, ad esempio, E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (3, 2, 2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (0, 1, 1, 2)$. Ci chiediamo se il vettore $\boldsymbol{v} := (0, 1, 0, 2)$ appartiene a E. Dobbiamo cioè stabilire se $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$, vale a dire se esistono tre scalari k_1, k_2 e k_3 tali che:

$$(0, 1, 0, 2) = k_1(3, 2, 2, 1) + k_2(1, 0, 1, -1) + k_3(0, 1, 1, 2),$$

il che equivale a:

$$(0, 1, 0, 2) = (3k_1 + k_2, 2k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + k_3, k_1 - k_2 + 2k_3).$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 2 \end{cases}$$

Si vede che questo sistema è risolubile e che ha come unica soluzione $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -1$, $k_3 = \frac{1}{3}$. Dunque abbiamo che $\boldsymbol{v}$ appartiene a E e

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3.$$

Notiamo che per stabilire che $\boldsymbol{v}$ appartiene a E non sarebbe stato necessario determinare esplicitamente le soluzioni del sistema ma solo che il sistema è risolubile. Potevamo limitarci a controllare la condizione data dal teorema di Rouché-Capelli. In questo caso la matrice del sistema è

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, e la matrice completa del sistema è

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha pure rango 3. Dunque il sistema è risolubile. △

Esercizio di base 15.13 Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

appartengono a E.

Osservazione 15.14 Non c'è in generale alcun motivo perché dato un qualsiasi spazio vettoriale V esistano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ che generano V.

Si consideri, per esempio, lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$. Comunque consideriamo un numero finito di polinomi $f_1[x]$, ..., $f_n[x]$, mostriamo che essi non possono essere generatori di $\mathbb{R}[x]$. Sia infatti g il massimo dei gradi di $f_1[x]$, ..., $f_n[x]$. Tutte le combinazioni lineari di $f_1[x]$, ..., $f_n[x]$ sono polinomi di grado minore o uguale a g. Ma allora il polinomio x^{g+1}, appartenente a $R[x]$ non è ottenibile come combinazione lineare di $f_1[x]$, ..., $f_n[x]$. Questi ultimi non sono quindi generatori di $R[x]$. $\triangle$

L'osservazione precedente suggerisce la:

Definizione 15.15 Diciamo che uno spazio vettoriale V è **finitamente generato** se esistono $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ tali che $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. $\triangle$

Possiamo dunque dire che $V^2(O)$ e $V^3(O)$ sono finitamente generati mentre $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Esercizio di base 15.16 Dati $r+1$ vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ di uno spazio vettoriale V mostrare che

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle. \qquad \triangle$$

Suggerimento: mostrare che ogni combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ può essere espressa come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$.

15.2 Soluzioni degli esercizi di base

EB.15.3 Le combinazioni lineari di A_1, A_2, A_3 e A_4 sono tutte e sole le matrici del tipo:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vale a dire le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} k_1 - k_2 + 3k_3 - k_4 & -k_1 + k_4 & 2k_4 \\ k_1 & 2k_1 + k_2 & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \end{pmatrix}$$

al variare di k_1, k_2, k_3 e k_4 in $\mathbb{R}$.

EB.15.5 Iniziamo a notare che $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ contiene tutti i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$: infatti

$$\boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_r$$

e similmente per gli altri vettori.

Sia E un sottospazio di V contenente $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$: dobbiamo mostrare che E contiene $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$, vale a dire che tutte le combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ appartengono a E. Dal momento che E è un sottospazio vettoriale, abbiamo che E deve contenere tutti i multipli di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ (cioè i vettori del tipo $k_1\boldsymbol{v}_1$, $k_2\boldsymbol{v}_2$, ..., $k_r\boldsymbol{v}_r$). Il sottospazio E deve poi contenere la somma di questi multipli (cioè le combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$).

Per completare la dimostrazione rimane da mostrare che l'insieme $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V. Sappiamo che $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ è non vuoto (abbiamo già mostrato che contiene i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$). Dobbiamo mostrare che dati due vettori di $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$:

$$\boldsymbol{u} \coloneqq k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

e

$$\boldsymbol{v} \coloneqq h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r$$

la loro somma appartiene a $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. Con semplici passaggi si vede che:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (k_1 + h_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 + h_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (k_r + h_r)\boldsymbol{v}_r,$$

e, dunque, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ appartiene a $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. Dobbiamo ora mostrare che dato uno scalare k e un vettore

$$\boldsymbol{u} \coloneqq k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

di $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$, il prodotto $k\boldsymbol{u}$ appartiene a $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. Si vede immediatamente che:

$$k\boldsymbol{u} = (kk_1)\boldsymbol{v}_1 + (kk_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (kk_r)\boldsymbol{v}_r,$$

e, dunque, $k\boldsymbol{u}$ è un elemento di $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$.

EB.15.13 Consideriamo una generica combinazione lineare delle matrici A_1, A_2, A_3 e A_4:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -k_2 + k_4 & 0 & k_1 + k_4 \\ k_2 - k_4 & k_1 + k_3 + 3k_4 & k_3 + 2k_4 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice A appartiene a E se e solo se il sistema nelle incognite k_1, k_2, k_3 e k_4:

$$\begin{cases} - k_2 + k_4 = 1 \\ 0 = 0 \\ k_1 + k_4 = 0 \\ k_2 - k_4 = 1 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = 0 \\ k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

è risolubile. Si vede facilmente che questo sistema non è risolubile (ad esempio osservando che la prima e la quarta equazione sono incompatibili o calcolando il rango della matrice del sistema e della matrice completa del sistema), e, dunque, A non appartiene a E. Per vedere se B appartiene ad E bisogna considerare un analogo sistema lineare (in cui cambiano solo i termini noti):

$$\begin{cases} -k_2 + k_4 = -2 \\ 0 = 0 \\ k_1 + k_4 = 0 \\ k_2 - k_4 = 2 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = -3 \\ k_3 + 2k_4 = -3 \end{cases}$$

Dal momento che questo sistema è risolubile abbiamo che la matrice B appartiene a E.

EB.15.16 Dobbiamo mostrare che ogni elemento del sottospazio $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ appartiene a $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle$, vale a dire che ogni combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ è anche combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$. Infatti se $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, esistono numeri reali k_1, k_2, ..., k_r tali che:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r.$$

Ma allora

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r + 0\boldsymbol{v}_{r+1},$$

cioè $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$.

15.3 Sunto

Generatori

Definizione Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ dei vettori di uno spazio vettoriale V e siano k_1, k_2, ..., k_r degli scalari. Chiamiamo **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ a coefficienti k_1, k_2, ..., k_r il vettore

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r. \qquad \triangle$$

Osservazione Nel caso in cui si abbia un singolo vettore $\boldsymbol{v}$, una sua combinazione lineare è semplicemente un suo multiplo, vale a dire un vettore del tipo $k\boldsymbol{v}$, per qualche $k \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Teorema *L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, al variare dei coefficienti k_1, k_2, ..., k_r è un sottospazio vettoriale di V che chiamiamo sottospazio vettoriale* ***generato*** *dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ e indichiamo con il simbolo $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. Dunque*

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle := \{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r \mid k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}.$$

Il sottospazio vettoriale $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ contiene i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ ed è contenuto in tutti i sottospazi vettoriali di V contenenti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$.

Segnaliamo che alcuni autori utilizzano, per indicare il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, il simbolo $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r)$ (dove la lettera L sta per lineare).

Definizione Se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ diremo che V è **generato** dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ oppure che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ **generano** V o anche che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono **generatori** di V. △

Definizione Diciamo che uno spazio vettoriale V è **finitamente generato** se esistono $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ tali che $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. △

Gli spazi vettoriali $V^2(O)$ e $V^3(O)$ sono finitamente generati mentre $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

15.4 Esercizi

E.15.1 Siano date le matrici simmetriche

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se le matrici S_1 e S_2 generano $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$).

E.15.2 Siano date le matrici simmetriche

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se le matrici S_1, S_2 e S_3 generano $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$.

E.15.3 Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ generato dai polinomi $p_1(x) := 3 + 2x$, $p_2(x) := x + x^3$, $p_3(x) := 1 + x + x^2 - x^3$. Stabilire se i polinomi $p(x) := 1 + 2x + x^3$ e $q(x) := -7 + 2x^2 + 2x^3$ appartengono a E.

15.5 Soluzioni degli esercizi

E.15.1 Dobbiamo verificare se una qualsiasi matrice simmetrica S può essere espressa come combinazione lineare di S_1 e S_2. Una generica matrice simmetrica S può scriversi come:

$$S := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo stabilire se esistono k_1 e k_2 tali che $S = k_1 S_1 + k_2 S_2$, cioè:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che riusciamo a determinare k_1 e k_2 se e solo se $a = c$. Dunque non tutte le matrici simmetriche sono combinazioni lineari di S_1 e S_2, e perciò S_1 e S_2 non generano $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$.

E.15.2 Dobbiamo verificare se una qualsiasi matrice simmetrica S può essere espressa come combinazione lineare di S_1, S_2 e S_3. Una generica matrice simmetrica S può scriversi come:

$$S := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo stabilire se esistono k_1, k_2 e k_3 tali che $S = k_1S_1 + k_2S_2 + k_3S_3$, cioè:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_1 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che basta porre $k_1 = b$, $k_2 = a$ e $k_3 = c$. Dunque tutte le matrici simmetriche sono combinazioni lineari di S_1, S_2 e S_3, e perciò S_1, S_2 e S_3 generano $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$.

E.15.3 Dobbiamo stabilire se $p(x)$ è combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, vale a dire se esistono tre scalari k_1, k_2 e k_3 tali che

$$p(x) = k_1p_1(x) + k_2p_2(x) + k_3p_3(x).$$

Più esplicitamente:

$$1 + 2x + x^3 = k_1(3 + 2x) + k_2(x + x^3) + k_3(1 + x + x^2 - x^3)$$

ovvero

$$1 + 2x + x^3 = 3k_1 + k_3 + (2k_1 + k_2 + k_3)x + k_3x^2 + (k_2 - k_3)x^3.$$

Ciò si verifica se e solo se il sistema

$$\begin{cases} 3k_1 \qquad + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 2 \\ k_3 = 0 \\ k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

è risolubile. Svolgendo i calcoli si vede che questo sistema non è risolubile e, perciò, $p(x)$ non appartiene a E. Analogamente per stabilire se $q(x)$ non appartiene a E bisogna stabilire se il sistema

$$\begin{cases} 3k_1 \qquad + k_3 = -7 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 2 \\ k_2 - k_3 = 2 \end{cases}$$

è risolubile. Svolgendo i calcoli si vede che questo sistema è risolubile e, perciò, $q(x)$ appartiene a E.

CAPITOLO 16

Dipendenza e indipendenza lineare

Introduciamo per spazi vettoriali qualsiasi il concetto di vettori linearmente dipendenti già visto nel caso dei vettori geometrici.

16.1 Dipendenza e indipendenza lineare

Riprendiamo l'esempio che abbiamo dato all'inizio del capitolo 15. Abbiamo dunque le matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $A_2 = 3A_1 - \frac{5}{2}A_3$, cioè A_2 è combinazione lineare di A_1 e A_3. Allora se prendiamo una combinazione lineare di A_1, A_2 e A_3:

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$$

questa può essere riscritta come:

$$k_1A_1 + k_2\left(3A_1 - \frac{5}{2}A_3\right) + k_3A_3 = (k_1 + 3k_2)A_1 + \left(k_3 - \frac{5}{2}k_2\right)A_3.$$

Dunque ogni combinazione lineare delle matrici A_1, A_2 e A_3 può essere espressa come combinazione lineare delle sole matrici A_1 e A_3; ciò significa che si ha $\langle A_1, A_2, A_3\rangle \subseteq \langle A_1, A_3\rangle$. D'altra parte sappiamo che $\langle A_1, A_3\rangle \subseteq \langle A_1, A_2, A_3\rangle$ e, pertanto, abbiamo che $\langle A_1, A_3\rangle = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$. Questa situazione può essere generalizzata dalla prossima:

Osservazione 16.1 In qualunque spazio vettoriale V, se un vettore $\boldsymbol{v}_{r+1}$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ allora

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}\rangle. \qquad \triangle$$

Lasciamo la dimostrazione, che ricalca quella dell'esempio, per esercizio.

L'osservazione appena data può essere interpretata nel modo seguente: se uno spazio vettoriale V è generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}$ e uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti, possiamo, per così dire, scartare questo vettore e ottenere r vettori che generano V. Potremmo poi ripetere lo stesso ragionamento con i nuovi generatori così ottenuti e proseguire fino a ottenere dei generatori di V da cui non possiamo scartare nessun vettore. Vediamo di formalizzare meglio tutto ciò. Riprendiamo il nostro esempio e notiamo che la relazione $A_2 = 3A_1 - \frac{5}{2}A_3$ può anche essere riscritta come: $3A_1 - A_2 - \frac{5}{2}A_3 = 0$. Questa espressione ricorda la definizione di dipendenza lineare data nel capitolo 12 per vettori di $V^2(O)$ e $V^3(O)$. Possiamo dare la stessa definizione nel caso di uno spazio vettoriale qualsiasi:

Definizione 16.2 Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, k_2, \dots, k_r$ non tutti nulli tali che:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}.$$

Detto in altri termini, i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti se il vettore nullo può essere espresso come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ oltre che nel modo banale (cioè quello in cui tutti i coefficienti sono nulli) anche in qualche altro modo. △

Esempio 16.3 In base alle osservazioni precedenti le matrici A_1, A_2 e A_3 date all'inizio del capitolo sono linearmente dipendenti. △

Esempio 16.4 I vettori $\boldsymbol{v}_1 := (2, 4, 4, 2)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1, 2, 2, 1)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (1, 2, 3, 3)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti. Infatti si ha:

$$1\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Osserviamo che il terzo coefficiente è nullo. Si noti che nella definizione di vettori linearmente dipendenti non si richiede che **tutti** i coefficienti siano diversi da 0, ma solo che **qualcuno** di essi (almeno uno) sia diverso da 0. △

Come possiamo esprimere il fatto che dei vettori non siano linearmente dipendenti? Diamo la:

Definizione 16.5 Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono **linearmente indipendenti** se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come loro combinazione lineare è quello banale, cioè se l'uguaglianza

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0},$$

è verificata solo quando $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$. △

Esempio 16.6 Vogliamo stabilire se i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 2, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (2, 3, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 := \left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti o meno. Scriviamo allora una loro combinazione lineare generica e poniamola uguale a 0:

$$k_1(1, 2, 1, 0) + k_2(2, 3, 0, 1) + k_3\left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) = (0, 0, 0, 0).$$

Chiaramente questa relazione è soddisfatta se $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Ci chiediamo però se sia possibile soddisfarla anche per altri valori degli scalari k_1, k_2 e k_3. Abbiamo allora:

$$\left(k_1 + 2k_2 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3, k_1 + 2k_3, k_2 - \frac{1}{2}k_3\right) = (0, 0, 0, 0).$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + \phantom{\frac{5}{2}}k_3 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_2 - \frac{1}{2}k_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trovano le soluzioni:

$$\begin{cases} k_1 = -2t \\ k_2 = \frac{1}{2}t \\ k_3 = t \end{cases}$$

Dunque abbiamo combinazioni lineari non banali di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ che danno come risultato il vettore nullo, ad esempio,

$$-2\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Pertanto $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Avremmo potuto stabilire questo fatto anche senza determinare esplicitamente le soluzioni del sistema. Infatti la matrice del sistema omogeneo che abbiamo ottenuto è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

il cui rango è 2. Poiché il rango è minore del numero delle incognite, abbiamo che il sistema ha soluzioni non banali. $\triangle$

Esempio 16.7 Consideriamo i polinomi $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ di $\mathbb{R}[x]$. Verifichiamo se sono linearmente dipendenti o meno. Scriviamo allora una loro combinazione lineare generica e poniamola uguale a 0:

$$k_1 1 + k_2(1 + x) + k_3(1 + x + x^2) + k_4(1 + x + x^2 + x^3) = 0.$$

Si ha

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_2 + k_3 + k_4)x + (k_3 + k_4)x^2 + k_4 x^3 = 0.$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ \quad\;\; k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ \qquad\quad\; k_3 + k_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad k_4 = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che questo sistema lineare ammette solo la soluzione banale $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Dunque l'unico modo per ottenere il polinomio nullo come combinazione lineare dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ è il modo banale. Pertanto $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ sono linearmente indipendenti. $\triangle$

Esercizio di base 16.8 Stabilire se le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\triangle$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Nel teorema 12.6 abbiamo mostrato che nel caso di un singolo vettore $\boldsymbol{v}$ di $V^2(O)$ o $V^3(O)$ dire che $\boldsymbol{v}$ è linearmente indipendente è equivalente a dire che $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. La dimostrazione può essere ripetuta in modo praticamente identico in uno spazio vettoriale qualsiasi.

Teorema 16.9 *Un vettore $\boldsymbol{v}$ di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente se e solo se $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.*

Abbiamo allora visto il significato di dipendenza e indipendenza lineare nel caso di un solo vettore. Ma cosa succede se abbiamo più vettori? All'inizio del capitolo abbiamo osservato come il fatto che la matrice A_2 fosse combinazione lineare delle matrici A_1 e A_3 implicasse che A_1, A_2 e A_3 fossero linearmente dipendenti. Generalizzando questa situazione abbiamo la:

Proposizione 16.10 *Siano dati i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ (con $r > 1$). Se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti, allora i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti.*

Esercizio di base 16.11 Dimostrare quest'ultima proposizione.

Abbiamo allora visto che se un vettore $\boldsymbol{v}_i$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_r$ allora si può esprimere il vettore nullo come una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ in cui il coefficiente di $\boldsymbol{v}_i$ è diverso da 0. Di questa proposizione vale anche il viceversa:

Proposizione 16.12 *Se i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ (con $r > 1$) sono linearmente dipendenti allora tra di essi ce ne è (almeno) uno che è combinazione lineare dei rimanenti. Più precisamente se abbiamo:*

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

con $k_i \neq 0$ allora $\boldsymbol{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione Sappiamo che

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0},$$

con $k_i \neq 0$. Abbiamo allora:

$$k_i\boldsymbol{v}_i = -k_1\boldsymbol{v}_1 - k_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - k_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} - k_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - k_r\boldsymbol{v}_r$$

Moltiplicando entrambi i membri per k_i^{-1} otteniamo:

$$\boldsymbol{v}_i = -k_i^{-1}k_1\boldsymbol{v}_1 - k_i^{-1}k_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - k_i^{-1}k_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} - k_i^{-1}k_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - k_i^{-1}k_r\boldsymbol{v}_r$$

e, dunque, $\boldsymbol{v}_i$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{i-1}$, $\boldsymbol{v}_{i+1}$, ..., $\boldsymbol{v}_r$. ■

L'osservazione precedente ci dice che se i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti allora ne esiste tra essi **almeno** uno che è combinazione lineare dei rimanenti, ma non ci dice che **ciascun** vettore è combinazione lineare dei rimanenti. Ciò è chiarito meglio dal seguente:

Esempio 16.13 Consideriamo i polinomi $f_1(x) := 1 + x$, $f_2(x) := x^2$, $f_3(x) := 2 + 2x - x^2$ e $f_4(x) := 2x - x^3$. Notiamo che

$$2f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) + 0f_4(x) = 0$$

e, dunque, i polinomi sono linearmente dipendenti. Ora $f_3(x)$ è combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_4(x)$:

$$f_3(x) = 2f_1(x) - f_2(x) - 0f_4(x),$$

ma $f_4(x)$ non è combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ (infatti le combinazioni lineari di questi 3 vettori possono avere grado al massimo 2). △

Vale la pena osservare come due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è multiplo dell'altro.

Esercizio di base 16.14 I vettori $(2, 1, 3)$ e $(1, 1, 2)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti? I vettori $(4, 2, 6)$ e $(6, 3, 9)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti? I vettori $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 2)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti?

Ci sono altre osservazioni che possiamo fare:

Proposizione 16.15 *Se i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti allora $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ sono linearmente dipendenti qualunque sia $\boldsymbol{v}_{r+1}$.*

Esercizio di base 16.16 Dimostrare quest'ultima affermazione.

Osservazione 16.17 Possiamo dunque dire che aggiungendo a vettori linearmente dipendenti un nuovo vettore otteniamo ancora vettori linearmente dipendenti. In particolare notiamo allora che se tra i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ è presente il vettore nullo, questi sono sicuramente linearmente dipendenti. Equivalentemente, se da vettori linearmente indipendenti ne togliamo uno (o più) otteniamo ancora vettori linearmente indipendenti. △

Abbiamo visto che aggiungendo un vettore a vettori linearmente dipendenti si ottengono ancora vettori linearmente dipendenti.

Ci chiediamo ora cosa succede aggiungendo un vettore a vettori linearmente indipendenti. Se il vettore che aggiungiamo è una loro combinazione lineare si ottengono, per la proposizione 16.10, vettori linearmente dipendenti. Il prossimo risultato mostra che, se si aggiunge un vettore che non è loro combinazione lineare, si ottengono vettori linearmente indipendenti.

Proposizione 16.18 *Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono vettori linearmente indipendenti e $\boldsymbol{v}_{r+1}$ è un vettore che non è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ allora i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che se abbiamo una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ uguale al vettore nullo:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} = \mathbf{0},$$

allora tutti i coefficienti k_i sono nulli. Se fosse $k_{r+1} \neq 0$, grazie alla proposizione 16.12 potremmo esprimere $\boldsymbol{v}_{r+1}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$. Poiché così non è, deve essere $k_{r+1} = 0$. Ma allora:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_{r+1} = \mathbf{0}.$$

Poiché $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono, per ipotesi, linearmente indipendenti, abbiamo che $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$, come volevamo. ■

16.2 Soluzioni degli esercizi di base

EB.16.8 Scriviamo una combinazione lineare generica delle matrici A_1, A_2, A_3 e poniamola uguale a 0:

$$k_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Otteniamo allora:

$$\begin{pmatrix}k_1 & k_1 + k_2 + 2k_3\\ 2k_1 + 2k_2 & k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Questo fornisce il sistema:

$$\begin{cases} k_1 = 0\\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0\\ 2k_1 + 2k_2 = 0\\ k_3 = 0\end{cases}$$

Questo sistema ha solo la soluzione banale $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, e, dunque, le matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

EB.16.11 Sappiamo che uno dei vettori, ad esempio $\boldsymbol{v}_i$, è combinazione lineare dei rimanenti. Dunque esistono scalari h_1, h_2, ..., h_{i-1}, h_{i+1}, ..., h_r tali che:

$$\boldsymbol{v}_i = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + h_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r.$$

Allora possiamo scrivere:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i + h_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \dots + h_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}.$$

Notiamo che in questa relazione almeno uno dei coefficienti è diverso da 0: infatti il coefficiente di $\boldsymbol{v}_i$ è -1. Pertanto possiamo affermare che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti.

EB.16.14 I vettori $(2,1,3)$ e $(1,1,2)$ sono linearmente indipendenti perché nessuno dei due è multiplo dell'altro. I vettori $(4,2,6)$ e $(6,3,9)$ sono linearmente dipendenti perché $(4,2,6)$ è multiplo di $(6,3,9)$. I vettori $(0,0,0)$ e $(1,1,2)$ sono linearmente dipendenti perché $(0,0,0)$ è multiplo di $(1,1,2)$.

EB.16.16 Dobbiamo trovare una combinazione lineare non banale di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ che dia come risultato il vettore nullo. Sappiamo che esiste una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0},$$

con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo. Allora:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + k_r\boldsymbol{v}_r + 0\boldsymbol{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_{r+1}$ con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo.

16.3 Sunto

Dipendenza e indipendenza lineare

Osservazione In qualunque spazio vettoriale V, se un vettore $\boldsymbol{v}_{r+1}$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ allora

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle. \qquad \triangle$$

Definizione Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono k_1, k_2, ..., k_r non tutti nulli tali che:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}.$$

Detto in altri termini, i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti se il vettore nullo può essere espresso come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ oltre che nel modo banale (cioè quello in cui tutti i coefficienti sono nulli) anche in qualche altro modo. $\triangle$

Nella definizione di vettori linearmente dipendenti chiedendo che i coefficienti k_1, k_2, ..., k_r siano non tutti nulli, non stiamo chiedendo che siano **tutti** diversi da 0, ma solo che **qualcuno** di essi (almeno 1) sia diverso da 0.

Definizione Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono **linearmente indipendenti** se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come loro combinazione lineare è quello banale, cioè se l'uguaglianza

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0},$$

è verificata solo quando $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$. $\triangle$

Teorema *Un vettore* $\boldsymbol{v}$ *di uno spazio vettoriale* V *è linearmente indipendente se e solo se* $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Proposizione *Siano dati i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *(con* $r > 1$*). Se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti, allora i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *sono linearmente dipendenti.*

Abbiamo allora visto che se un vettore $\boldsymbol{v}_i$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_r$ allora si può esprimere il vettore nullo come una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ in cui il coefficiente di $\boldsymbol{v}_i$ è diverso da 0. Di questa proposizione vale anche il viceversa:

Proposizione *Siano dati i vettori linearmente dipendenti* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *(con* $r > 1$*). Allora tra di essi ce ne è (almeno) uno che è combinazione lineare dei rimanenti. Più precisamente se abbiamo:*

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

con $k_i \neq 0$ *allora* $\boldsymbol{v}_i$ *è combinazione lineare dei rimanenti.*

L'osservazione precedente ci dice che se i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti allora ne esiste tra essi **almeno** uno che è combinazione lineare dei rimanenti, ma non ci dice che **ciascun** vettore è combinazione lineare dei rimanenti.

Vale la pena osservare come due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è multiplo dell'altro.

Proposizione *Se i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *sono linearmente dipendenti allora* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}$ *sono linearmente dipendenti qualunque sia* $\boldsymbol{v}_{r+1}$.

Possiamo dunque dire che aggiungendo a vettori linearmente dipendenti un nuovo vettore otteniamo ancora vettori linearmente dipendenti. In particolare notiamo allora che se tra i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ è presente il vettore nullo, questi sono sicuramente linearmente dipendenti. Equivalentemente, se da vettori linearmente indipendenti ne togliamo uno (o più) otteniamo ancora vettori linearmente indipendenti.

Proposizione *Se* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *sono vettori linearmente indipendenti e* $\boldsymbol{v}_{r+1}$ *è un vettore che non è combinazione lineare di* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ *allora i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}$ *sono linearmente indipendenti.*

16.4 Esercizi

E.16.1 Stabilire se i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := (1, 3, 2, 1), \quad \boldsymbol{v}_2 := (1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_3 := (1, 0, 2, 0)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

E.16.2 Stabilire se i polinomi:

$$p_1(x) := 1 + x^2, \quad p_2(x) := 2 + 2x^2, \quad p_3(x) := 1 + 2x^2 + x^3$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

E.16.3 Stabilire quali tra i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq (0,1,1,0), \boldsymbol{v}_2 \coloneqq (1,0,0,1), \boldsymbol{v}_3 \coloneqq (1,1,1,1), \boldsymbol{v}_4 \coloneqq (1,0,1,0)$$

possono essere espressi come combinazione lineare dei rimanenti.

E.16.4 Stabilire se le matrici

$$A_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

16.5 Soluzioni degli esercizi

E.16.1 Consideriamo una combinazione lineare generica dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$:

$$k_1(1,3,2,1) + k_2(1,0,1,0) + k_3(1,0,2,0).$$

Imponendo che questa combinazione lineare sia uguale al vettore nullo, otteniamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_1 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo il rango di A troviamo $\operatorname{rk} A = 3$. Dunque il sistema ha solo la soluzione banale, vale a dire che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

E.16.2 Se notiamo che $p_2(x) = 2p_1(x)$, abbiamo che uno dei polinomi è combinazione lineare dei rimanenti (più esplicitamente se si vuole: $p_2(x) = 2p_1(x) + 0p_3(x)$). Dunque i polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ sono linearmente dipendenti.

Se non avessimo notato la relazione tra i polinomi avremmo potuto considerare una combinazione lineare generica di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$:

$$k_1(1+x^2) + k_2(2+2x^2) + k_3(1+2x^2+x^3),$$

che sviluppando i calcoli diviene:

$$(k_1 + 2k_2 + k_3) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3)x^2 + k_3x^3.$$

Ponendo questa combinazione lineare uguale al polinomio nullo otteniamo il sistema nelle incognite k_1, k_2 e k_3:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2. Pertanto il sistema ha soluzioni non banali e i polinomi assegnati sono linearmente dipendenti.

E.16.3 Scriviamo le combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ uguali al vettore nullo:

$$k_1(0,1,1,0) + k_2(1,0,0,1) + k_3(1,1,1,1) + k_4(1,0,1,0) = (0,0,0,0).$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \quad k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 \quad\quad + k_3 \quad\quad = 0 \\ k_1 \quad\quad + k_3 + k_4 = 0 \\ \quad k_2 + k_3 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} k_1 = -t \\ k_2 = -t \\ k_3 = t \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

Dunque le combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ uguali al vettore nullo sono tutte e sole quelle del tipo

$$-t\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2 + t\boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Notiamo che il coefficiente di $\boldsymbol{v}_4$ è sempre 0, dunque non è possibile ottenere questo vettore come combinazione lineare dei rimanenti. Possiamo invece ottenere combinazioni lineari nulle in cui il coefficiente di $\boldsymbol{v}_1$ è diverso da 0 e quindi possiamo esprimere $\boldsymbol{v}_1$ come combinazione lineare dei vettori rimanenti. Lo stesso vale per $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$.

E.16.4 Consideriamo una combinazione lineare generica delle matrici A_1, A_2 e A_3:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 + 3k_2 + 2k_3 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice si annulla se e solo se:

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo il rango di A troviamo $\operatorname{rk} A = 3$. Dunque il sistema ha solo la soluzione banale e le matrici A_1, A_2 e A_3 sono linearmente indipendenti.

CAPITOLO 17

Basi di spazi vettoriali

Studiamo il concetto di base di uno spazio vettoriale. Diamo la definizione di base e di dimensione di uno spazio vettoriale. Forniamo alcuni esempi di basi di spazi vettoriali. Diamo poi alcuni metodi per il calcolo delle dimensioni dei sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale.

17.1 Basi

Nel capitolo 16 abbiamo notato che se $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ generano uno spazio vettoriale V, e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente dipendenti, allora possiamo scartare un vettore scelto in maniera opportuna tra $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ e ottenere $r-1$ vettori che generano V. Questo procedimento può essere nuovamente applicato ai nuovi generatori. Dopo un numero finito di eliminazioni arriveremo ad avere dei generatori di V da cui non possiamo eliminare nessun vettore, e che quindi sono vettori linearmente indipendenti. Questo suggerisce la:

Definizione 17.1 Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ di uno spazio V costituiscono una **base** di V se sono verificate entrambe le proprietà

- $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$;
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente indipendenti. △

In base alle osservazioni fatte in precedenza, osserviamo che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ generano V, possiamo ottenere una base di V scartando opportunamente vettori da $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$.

Esercizio di base 17.2 Verificare che i vettori $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4[x]$, lo spazio vettoriale formato dai polinomi di grado minore di 4.

Se uno spazio vettoriale V è generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r.$$

Nel caso in cui $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ siano una base possiamo dire qualcosa di più:

Teorema 17.3 *Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ costituiscono una base di uno spazio vettoriale V allora ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V può essere espresso come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$:*

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

in un unico modo. La r-upla $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ viene detta r-upla delle ***componenti*** *o* ***coordinate*** *di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$.*

Dimostrazione Ogni vettore $\boldsymbol{v}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ dal momento che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ generano V. Supponiamo ora di esprimere $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ in due modi:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r,$$
$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r.$$

Dobbiamo dimostrare che $h_i = k_i$ per ogni i. Sottraendo membro a membro le precedenti uguaglianze otteniamo:

$$\mathbf{0} = (k_1 - h_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 - h_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (k_r - h_r)\boldsymbol{v}_r.$$

Dal momento che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente indipendenti, tutti i coefficienti in questa combinazione lineare devono essere nulli. Abbiamo quindi:

$$k_1 = h_1, \quad k_2 = h_2 \quad \dots \quad k_r = h_r.$$ ■

Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ costituiscono una base di V osserviamo che il vettore $\mathbf{0}$ ha componenti $(0, 0, \dots, 0)$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, mentre le componenti dell'i-esimo vettore $\boldsymbol{v}_i$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (dove l'unico 1 compare al posto i-esimo).

Nota 17.4 Quando parliamo di componenti di un vettore dobbiamo sempre specificare rispetto a quale base ci riferiamo, perché le componenti dello stesso vettore rispetto a basi diverse sono (in generale) diverse. Negli esempi 17.5 e 17.13 vedremo esplicitamente come lo stesso vettore si decompone rispetto a basi differenti. △

Esempio 17.5 Sappiamo dalla soluzione dell'esercizio di base 17.2 che i polinomi $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4[x]$. Determiniamo le componenti del polinomio $f(x) = 2x - 3x^2$ rispetto alla base assegnata. Dobbiamo determinare k_1, k_2, k_3 e k_4 tali che:

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x),$$

cioè

$$2x - 3x^2 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_2 + k_3 + k_4)x + (k_3 + k_4)x^2 + k_4 x^3$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ \phantom{k_1 + {}} k_2 + k_3 + k_4 = 2 \\ \phantom{k_1 + k_2 + {}} k_3 + k_4 = -3 \\ \phantom{k_1 + k_2 + k_3 + {}} k_4 = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione

$$\begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 5 \\ k_3 = -3 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

Dunque le componenti di $f(x)$ rispetto alla base assegnata sono $(-2, 5, -3, 0)$.△

Esempio 17.6 Nel capitolo 12 abbiamo dimostrato che dati due punti A e B del piano tali che O, A e B non siano allineati allora i vettori $\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{v}_2 \coloneqq \overrightarrow{OB}$ di $V^2(O)$ sono linearmente indipendenti e ogni vettore di $V^2(O)$ può essere espresso come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. Pertanto $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ costituiscono una base per $V^2(O)$. △

Esempio 17.7 Nel capitolo 12 abbiamo dimostrato che dati tre punti A, B e C dello spazio tali che O, A, B e C non siano complanari allora i vettori $\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v}_2 \coloneqq \overrightarrow{OB}$ e $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq \overrightarrow{OC}$ di $V^3(O)$ sono linearmente indipendenti e ogni vettore di $V^3(O)$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$. Pertanto $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ costituiscono una base per $V^3(O)$. △

Esempio 17.8 Consideriamo i vettori $\boldsymbol{e}_1 \coloneqq (1, 0)$ e $\boldsymbol{e}_2 \coloneqq (0, 1)$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che si ha:

$$(a_1, a_2) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2.$$

Pertanto ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. In altre parole i vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ generano $\mathbb{R}^2$. D'altronde i vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono anche linearmente indipendenti. Se infatti a_1 e a_2 sono numeri reali tali che

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{0},$$

allora si ha

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = (a_1, b_1) = (0, 0)$$

da cui segue $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che i vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$. △

Esempio 17.9 In modo analogo si dimostra che i vettori

$$\boldsymbol{e}_1 \coloneqq (1, 0, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 \coloneqq (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n \coloneqq (0, 0, \dots, 0, 1).$$

costituiscono una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Questa base si dice **base canonica** di $\mathbb{R}^n$. Ha la particolarità che le componenti del vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ relative ad essa sono esattamente x_1, x_2, …, x_n. Osserviamo in particolare che se poniamo $n = 1$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^1$ può essere facilmente identificato con $\mathbb{R}$ e che la sua base canonica è data dal vettore $\boldsymbol{e}_1 \coloneqq 1$. △

Esempio 17.10 Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathrm{M}(3,2,\mathbb{R})$ e consideriamo le matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia ora data una generica matrice di $\mathrm{M}(3,2,\mathbb{R})$

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che si ha

$$A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} + eE_{31} + fE_{32}$$

e quindi le sei matrici di cui sopra sono generatori di $\mathrm{M}(3,2,\mathbb{R})$. Si dimostra poi anche (esercizio) che queste sei matrici sono linearmente indipendenti. Pertanto esse formano una base di $\mathrm{M}(3,2,\mathbb{R})$. Questa base è detta **base canonica**. $\triangle$

Esempio 17.11 In modo analogo si dimostra che una base per $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ è formata dalle pq matrici E_{ij} con $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, dove E_{ij} è la matrice i cui elementi sono tutti 0 tranne quello di posto (i,j) che è uguale a 1. Questa base è detta **base canonica**. Ha la particolarità che le componenti di un vettore (cioè una matrice) relative ad essa sono esattamente gli elementi della matrice stessa. $\triangle$

Esempio 17.12 Si dimostra (esercizio) che gli n polinomi 1, x, x^2, $\dots$, x^{n-1} formano una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n[x]$ Questa base è detta **base canonica**. Ha la particolarità che il vettore $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ ha come componenti relative ad essa esattamente i suoi coefficienti $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. $\triangle$

Esempio 17.13 Consideriamo il vettore $f(x) = 2x - 3x^2$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4[x]$. Le sue componenti relative alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$ sono $(0, 2, -3, 0)$.

In 17.5 abbiamo visto che le componenti $f(x)$ relative alla base $f_1(x) \coloneqq 1$, $f_2(x) \coloneqq 1 + x$, $f_3(x) \coloneqq 1 + x + x^2$, $f_4(x) \coloneqq 1 + x + x^2 + x^3$ sono $(-2, 5, -3, 0)$. $\triangle$

Nota 17.14 Per gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^n[x]$ abbiamo dato il nome di base canonica a delle particolari basi. Abbiamo fatto ciò solo per evitare in seguito di riscrivere ogni volta i vettori di queste basi. Ci basterà dire, per esempio, "consideriamo i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$".

Si noti però che non ha senso parlare di base canonica per un qualsiasi spazio vettoriale. Per esempio nello spazio vettoriale $V^2(O)$ non vi è alcuna base canonica. $\triangle$

17.2 Dimensione

Spesso si sente dire che lo spazio ha dimensione 3. Ciò deriva dalla struttura di spazio vettoriale di $V^3(O)$.

Abbiamo visto infatti che, se abbiamo tre punti U_1, U_2 e U_3 non complanari con il punto O, allora i vettori $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}$, e $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OU_3}$ formano una base di $V^3(O)$.

Inoltre qualsiasi base di $V^3(O)$ è formata da tre vettori.

Bene, si dice che la dimensione di $V^3(O)$ è uguale a 3 proprio perché ogni sua base è formata da 3 vettori.

Vogliamo ora estendere questo concetto ad uno spazio vettoriale qualsiasi. Vogliamo in altre parole chiamare dimensione di uno spazio vettoriale il numero di vettori che compongono una sua base. Ma per far ciò dobbiamo innanzitutto dimostrare che, se uno spazio vettoriale ha una base formata da n vettori, allora ogni sua altra sua base è formata da n vettori. Solo dopo aver dimostrato ciò possiamo dire che lo spazio vettoriale ha dimensione uguale a n.

Abbiamo bisogno del:

Lemma 17.15 (del completamento) *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Siano poi assegnati r vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ di V, con $r \leq n$. È allora possibile scegliere opportunamente r vettori tra quelli della base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ e sostituirli con i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ in modo tale da ottenere una base di V.*

La dimostrazione di questo lemma è un po' tecnica: per tale motivo la riportiamo a parte, nel paragrafo A.17.

Se abbiamo esattamente n vettori linearmente indipendenti come caso particolare otteniamo immediatamente la:

Proposizione 17.16 *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata da n vettori. Allora assegnati comunque n vettori di V linearmente indipendenti, questi formano una base di V.*

Proposizione 17.17 *In uno spazio vettoriale V avente una base formata da n vettori non vi possono essere più di n vettori linearmente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo di avere $r > n$ vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}, \ldots \boldsymbol{v}_r$ linearmente indipendenti. Pertanto anche i primi n vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sono linearmente indipendenti, ma allora, per la proposizione precedente, essi formano una base di V. Pertanto i vettori $\boldsymbol{v}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ sono tutti combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Ciò non è possibile dal momento che in tal caso gli r vettori sarebbero linearmente dipendenti. ■

Teorema 17.18 *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata da n vettori. Allora ogni altra base di V è formata da n vettori.*

DIMOSTRAZIONE Sia $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ una base di V. Sia poi $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ un'altra base di V. I vettori di quest'ultima base sono quindi linearmente indipendenti. Per il teorema precedente si ha quindi $r \leq n$. D'altronde, sempre per il teorema precedente, r non può essere minore di n perché altrimenti V avrebbe una base formata da r vettori e in V esisterebbero $n > r$ vettori linearmente indipendenti. ■

Il fatto che in uno spazio vettoriale non possano esistere basi formate da un numero differente di vettori ci permette finalmente di parlare di dare la definizione di base di uno spazio vettoriale.

Definizione 17.19 Se uno spazio vettoriale V ha una base formata da n vettori, si dice che V ha **dimensione** uguale a n. Indichiamo ciò con il simbolo $\dim V = n$. △

Osservazione 17.20 Lo spazio vettoriale $\{\mathbf{0}\}$ formato dal solo vetture nullo non ha vettori linearmente indipendenti e quindi non ha alcuna base. Per completezza diciamo che lo spazio vettoriale $\{\mathbf{0}\}$ ha dimensione uguale a 0. △

Definizione 17.21 Se uno spazio vettoriale V è formato dal solo vettore nullo (cioè $\dim V = 0$) oppure ha una base formata da n vettori (cioè $\dim V = n$) diciamo che V ha **dimensione finita**. △

Osservazione 17.22 Sappiamo che i vettori di una base sono generatori e che da un numero finito di generatori è sempre possibile estrarre un numero finito di vettori linearmente indipendenti. Pertanto, se uno spazio vettoriale è finitamente generato, è di dimensione finita e viceversa. Dunque, se non è possibile trovare in uno spazio vettoriale un numero finito di generatori, allora lo spazio vettoriale non ha dimensione finita.

Se uno spazio vettoriale non è dotato di una base formata da un numero finito di vettori si dice che lo spazio ha **dimensione infinita**. In particolare nell'esempio 15.14 abbiamo visto che $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato, e, pertanto, $\mathbb{R}[x]$ ha dimensione infinita. △

Teorema 17.23 *Si ha:*

1. $\dim V^2(0) = 2$;

2. $\dim V^3(0) = 3$;

3. $\dim \mathbb{R}^n = n$;

4. $\dim \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R}) = p \cdot q$;

5. $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$.

Dimostrazione Per ognuno degli spazi vettoriali indicati abbiamo trovato in precedenza una base formata da un numero finito di vettori. In particolare:

1. nell'esempio 17.6 abbiamo trovato una base di $V^2(O)$ formata da 2 vettori;

2. nell'esempio 17.7 abbiamo trovato una base di $V^3(O)$ formata da 3 vettori;

3. nell'esempio 17.9 abbiamo trovato una base di $\mathbb{R}^n$ formata da n vettori;

4. nell'esempio 17.11 abbiamo trovato una base di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ formata da $p \cdot q$ vettori;

5. nell'esempio 17.12 abbiamo trovato una base di $\mathbb{R}^n[x]$ formata da n vettori.

■

Ora che abbiamo dato la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale possiamo rileggere alcuni teoremi visti in precedenza

Teorema 17.24 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora:*

1. non esistono più di n vettori linearmente indipendenti;

2. dati comunque r vettori con $r < n$(anche se linearmente indipendenti), essi non possono essere generatori (e quindi tantomeno una base) di V;

3. dati comunque n vettori linearmente indipendenti, essi formano una base di V;

4. dati comunque n generatori, essi formano una base di V.

DIMOSTRAZIONE

1. Si tratta della proposizione 17.17.

2. Se gli r vettori fossero generatori, da essi potremmo estrarre una base di V. Ma, per il teorema 17.18 non può esistere una base con meno di n vettori.

3. Si tratta della proposizione 17.16.

4. Se gli n generatori non fossero una base, e quindi non fossero linearmente indipendenti, da essi potremmo estrarre una base. Ma, per il teorema 17.18 non può esistere una base con meno di n vettori. ■

Osservazione 17.25 Dalle parti 3) e 4) del teorema precedente segue che, dati n vettori di uno spazio vettoriale di dimensione n, per controllare se essi formano una base, possiamo controllare indifferentemente, o che siano generatori, o che siano linearmente indipendenti. △

Esercizio di base 17.26 Stabilire se i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,2,1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (0,1,2)$, $\boldsymbol{v}_4 := (1,1,3)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio di base 17.27 Stabilire se le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

generano $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$.

17.3 Una base per Sol(SO)

Abbiamo visto (teorema 14.16) che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite $SO\colon AX = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(q,1,\mathbb{R})$. Vogliamo dare un procedimento per determinare una base di Sol(SO). Cominciamo con un:

Esempio 17.28 Sia dato il sistema lineare omogeneo SO:

$$\begin{cases} 2x - 4y + \ z - w - 2t = 0 \\ x - 2y - 2z + w \qquad = 0 \\ 3x - 6y - \ z \qquad - 2t = 0 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema. Sommiamo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-\frac{1}{2}$ e sommiamo alla terza equazione la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} 2x - 4y + \ z - \ w - 2t = 0 \\ \qquad -\dfrac{5}{2}z + \dfrac{3}{2}w + \ t = 0 \\ \qquad -\dfrac{5}{2}z + \dfrac{3}{2}w + \ t = 0 \end{cases}$$

Ora possiamo sommare alla terza equazione la seconda e ottenere:

$$\begin{cases} 2x - 4y + \ z - \ w - 2t = 0 \\ \qquad -\dfrac{5}{2}z + \dfrac{3}{2}w + \ t = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Assegniamo ora a y, w e t dei valori parametrici e otteniamo così le soluzioni di SO:

$$\begin{cases} x = 2h_1 + \dfrac{1}{5}h_2 + \dfrac{4}{5}h_3 \\ y = \ h_1 \\ z = \qquad \dfrac{3}{5}h_2 + \dfrac{2}{5}h_3 \\ w = \qquad h_2 \\ t = \qquad\qquad h_3 \end{cases}$$

Scriviamo ora le soluzioni come matrici di $\mathrm{M}(5,1,\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sol}(SO) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h_1 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{4}{5}h_3 \\ h_1 \\ \frac{3}{5}h_2 + \frac{2}{5}h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con semplici calcoli possiamo riscrivere queste soluzioni in questa forma:

$$\mathrm{Sol}(SO) = \left\{ h_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dunque vediamo che $\mathrm{Sol}(SO)$ è l'insieme delle combinazioni lineari delle matrici:

$$S_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e, dunque, Sol(SO) è generato da S_1, S_2 e S_3.

Per stabilire se questi generatori formano una base per Sol(SO), verifichiamo se sono linearmente indipendenti. Scriviamo allora una loro combinazione lineare generica e la poniamo uguale alla matrice nulla:

$$h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_3 = 0.$$

Con semplici calcoli (che in realtà sono gli stessi utilizzati, in ordine inverso, per passare dalla forma generica delle soluzioni di S ai generatori di Sol(SO)) ciò si riscrive così:

$$\begin{pmatrix} 2h_1 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{4}{5}h_3 \\ h_1 \\ \frac{3}{5}h_2 + \frac{2}{5}h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente questa uguaglianza si verifica solo quando h_1, h_2 e h_3 sono tutti uguali a 0. Pertanto S_1, S_2 e S_3 sono una base di Sol(SO) che ha così dimensione 3.

Notiamo infine che S_1 si può ottenere ponendo nelle soluzioni $h_1 := 1$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 0$. Analogamente S_2 si può ottenere ponendo nelle soluzioni $h_1 := 0$, $h_2 := 1$ e $h_3 := 0$ e S_3 si può ottenere ponendo nelle soluzioni $h_1 := 0$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 1$.

Se preferiamo pensare le soluzioni di SO come elementi di $\mathbb{R}^5$ possiamo dire che una base per Sol(SO) è formata da:

$$(2, 1, 0, 0, 0), \quad \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, 1, 0\right), \quad \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, 1\right). \qquad \triangle$$

Chiaramente il procedimento così delineato si può adattare a un qualsiasi sistema lineare omogeneo.

Teorema 17.29 *Sia dato un sistema lineare omogeneo* $SO\colon AX = 0$ *di* p *equazioni in* q *incognite* x_1, x_2, …, x_q. *Se il rango della matrice* A *è* r, *allora lo spazio delle soluzioni* Sol(SO) *ha dimensione* $q - r$ *e una sua base può essere determinata nel modo seguente:*

- *Si determinano le soluzioni del sistema con il metodo che si preferisce: sappiamo che* $q - r$ *incognite scelte opportunamente fungeranno da parametri* h_1, h_2, …, h_{q-r};
- *il primo vettore della base si ottiene assegnando ad* h_1 *il valore* 1 *e agli altri parametri il valore* 0;
- *il secondo vettore della base si ottiene assegnando ad* h_2 *il valore* 1 *e agli altri parametri il valore* 0;
- *così via;*
- *l'ultimo vettore della base si ottiene assegnando ad* h_{q-r} *il valore* 1 *e agli altri parametri il valore* 0.

Esercizio di base 17.30 Determinare una base per il sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0\}. \qquad \triangle$$

17.4 Dimensioni di sottospazi vettoriali

Se V uno spazio vettoriale di dimensione n ed E è un suo sottospazio vettoriale, ci chiediamo cosa si può dire sulla sua dimensione. Per poter parlare di dimensione dobbiamo però essere sicuri che E sia dotato di una base. Ma siamo sicuri che E sia dotato di una base? Ovviamente se E è formato dal solo vettore nullo, allora $\dim E = 0$. Se E non è formato dal solo vettore nullo cerchiamo di costruirne una base.

• Scegliamo anzitutto un vettore non nullo $\boldsymbol{v}_1$ di E;

• se $\boldsymbol{v}_1$ genera tutto E, cioè se ogni vettore di E è multiplo di $\boldsymbol{v}_1$ allora $\boldsymbol{v}_1$ forma una base per E e il procedimento ha termine;

• se invece $\boldsymbol{v}_1$ non genera tutto E allora esiste un vettore $\boldsymbol{v}_2$ di E che non è multiplo di $\boldsymbol{v}_1$: per la proposizione 16.18, i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono vettori linearmente indipendenti di E;

• se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ generano tutto E allora formano una base per E e il procedimento ha termine;

• se invece $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ non generano tutto E allora esiste un vettore $\boldsymbol{v}_3$ di E che non è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$: per la proposizione 16.18, i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono vettori linearmente indipendenti di E.

• iterando il procedimento arriviamo ad avere r vettori linearmente indipendenti di E: se generano tutto E formano una base di E e il procedimento ha termine, altrimenti possiamo trovare in E un vettore che non è loro combinazione lineare e ottenere così $r + 1$ vettori linearmente indipendenti di E (usando ancora la proposizione 16.18).

• se il procedimento non avesse termine troveremmo un numero sempre crescente di vettori di E linearmente indipendenti: ma questi sono anche vettori di V. Per la parte 1) del teorema 17.24 il numero di questi vettori linearmente indipendenti è al massimo n. Dunque il procedimento ha sicuramente termine e E ha una base formata da al massimo n vettori.

Abbiamo quindi dimostrato la:

Proposizione 17.31 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia E un sottospazio vettoriale di V. Allora E ha dimensione finita e* $\dim E \leq \dim V$.

Abbiamo poi la seguente proposizione riguardanti i sottospazi banali di uno spazio vettoriale.

Proposizione 17.32 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n. Allora:*

• *Esiste un solo sottospazio di dimensione uguale a 0. Si tratta del sottospazio formato dal solo vettore nullo.*

• *Esiste un solo sottospazio di dimensione uguale a n. Si tratta del sottospazio V stesso.*

Dimostrazione Sia E un sottospazio vettoriale di V:

- se $\dim E = 0$, allora per definizione E è formato dal solo vettore nullo;

- se $\dim E = n$, allora qualsiasi sua base, per il teorema 17.24 è base anche di V. Quindi $E = V$. ■

Esempio 17.33 Abbiamo visto che $V^2(O)$ ha dimensione uguale a 2. Pertanto i suoi sottospazi possono avere dimensione uguale a 0, 1 o 2. È facile descrivere i sottospazi vettoriali di $V^2(O)$:

- l'unico sottospazio di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo;

- i sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$ dove r è una retta passante per l'origine;

- l'unico sottospazio di dimensione 2 è $V^2(O)$ stesso. △

Esempio 17.34 Abbiamo visto che $V^3(O)$ ha dimensione uguale a 3. Pertanto i suoi sottospazi possono avere dimensione uguale a 0, 1, 2 o 3. È facile descrivere i sottospazi vettoriali di $V^3(O)$:

- l'unico sottospazio di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo;

- i sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$ dove r è una retta passante per l'origine;

- i sottospazi di dimensione 2 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in \pi\}$ dove π è un piano passante per l'origine;

- l'unico sottospazio di dimensione 3 è $V^3(O)$ stesso. △

Esempio 17.35 Sia $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ formato dalle matrici simmetriche. Vogliamo determinarne una base.

Ovviamente $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ non è formato dalla sola matrice nulla. Infatti, per esempio, la matrice $S_1 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ è una matrice simmetrica. Consideriamo allora il sottospazio V_1 avente come base A_1.

Abbiamo che $V_1 \neq \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Infatti la matrice $S_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, pur essendo simmetrica, non appartiene a V_1.

Consideriamo allora il sottospazio V_2 avente base formata da S_1 e S_2. Poiché

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

abbiamo che $V_2 \neq \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Infatti la matrice $S_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pur essendo simmetrica, non appartiene a V_2.

Consideriamo allora il sottospazio V_3 avente base formata da S_1, S_2 e S_3. Ci chiediamo se V_3 coincida con $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Osserviamo che, se così non fosse, allora $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ dovrebbe avere dimensione maggiore di 3. Ciò non è possibile perché altrimenti $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$, essendo sottospazio di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ (che ha dimensione 4) dovrebbe coincidere con $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$.

Osserviamo che, utilizzando le proprietà dei sottospazi di spazi vettoriali di dimensione finita, abbiamo potuto dimostrare che le matrici S_1, S_2 e S_3 sono generatori di $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$, senza addentrarci in calcoli come fatto nell'esercizio E.15.2. △

17.5 Calcolo di dimensioni e basi

Può capitare di dover stabilire se dei vettori di uno spazio vettoriale siano linearmente indipendenti o di dover determinare la dimensione dello spazio che essi generano. I calcoli in genere sono abbastanza laboriosi.

Nel caso però in cui si abbia a che fare con uno spazio vettoriale di dimensione finita il seguente teorema, di cui non diamo la dimostrazione, ci permette di ridurre i calcoli.

Teorema 17.36 *Sia V una spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ una sua base. Siano ora dati dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_s$ e sia U il sottospazio vettoriale di V che essi generano. Decomponendo i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_s$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ otteniamo:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{u}_2 &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\ &\vdots \\ \boldsymbol{u}_s &= a_{1s}\boldsymbol{v}_1 + a_{2s}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{ns}\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

Indichiamo con $A := \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}(n, s, \mathbb{R})$ la matrice avente come colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_s$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

$$\operatorname{rk} A = \dim U.$$

Inoltre il calcolo del rango di A ci dice anche come possiamo estrarre una base di U da $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_s$. Detto r il rango di A:

- *Se abbiamo calcolato* $\operatorname{rk} A$ *usando i determinanti dei minori, sia M un minore di A di ordine r avente determinante non nullo. Gli r vettori corrispondenti alle colonne di M formano una base di U.*

- *Se abbiamo calcolato* $\operatorname{rk} A$ *riducendo la matrice a scalini, sia B la matrice con r scalini ottenuta dalla matrice A. Allora una base di U si ottiene prendendo i vettori tra $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_s$ le cui posizioni corrispondono agli scalini di B.*

Diamo qualche esempio.

Esempio 17.37 Sia E il sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ generato da $f_1(x) := 1 + x - 2x^2$, $f_2(x) := x + 3x^4$, $f_3(x) := 1 - 2x^2 - 3x^4$. Vogliamo calcolare la dimensione e una base di E. Osserviamo che i tre polinomi appartengono tutti a $\mathbb{R}^5[x]$, la cui base canonica è formata dai polinomi 1, x, x^2, x^3, x^4. Scriviamo allora la matrice le cui colonne corrispondono alle componenti dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è uguale a 2 e un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, quello evidenziato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim E = 2$ e una base di E è formata da $f_1(x)$ e $f_3(x)$. △

Esempio 17.38 Nell'esempio 16.6 abbiamo visto che i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (2,3,0,1)$ e $\boldsymbol{v}_3 := \left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti: per far ciò abbiamo determinato esplicitamente una loro combinazione lineare non banale che dava come risultato il vettore nullo. Affrontiamo nuovamente lo stesso problema. Consideriamo la matrice le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Applichiamo il metodo di Gauss per il calcolo del rango di A. Dopo avere svolto i passaggi necessari troviamo la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha allora rango 2: dunque il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ ha dimensione 2 e i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente dipendenti. Gli scalini sono in prima e seconda posizione. Dunque una base per $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ è formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. △

Esempio 17.39 Consideriamo i vettori $\boldsymbol{v}_1 := x + x^3$ e $\boldsymbol{v}_2 := 3 + 2x + x^3$. Per vedere se i due vettori sono linearmente indipendenti consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$ data da $\boldsymbol{e}_0 := 1$, $\boldsymbol{e}_1 := x$, $\boldsymbol{e}_2 := x^2$, $\boldsymbol{e}_3 := x^3$ e consideriamo la matrice B avente come colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1 := x + x^3$ e $\boldsymbol{v}_2 := 3 + 2x + x^3$ relativamente alla base canonica.

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B ha ovviamente rango uguale a 2. Pertanto i due vettori sono linearmente indipendenti. △

Abbiamo visto che il lemma del completamento 17.15 ci dice che, dati r vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n, possiamo scegliere altri $n - r$ vettori in modo tale da ottenere una base di V.

Il teorema 17.36 ci permette di vedere il lemma del completamento da un altro punto di vista e dà un veloce metodo per determinare gli $n - r$ vettori da aggiungere. Vediamo tutto ciò con un esempio.

Esempio 17.40 Nell'esempio 17.39 abbiamo visto che i vettori $\boldsymbol{v}_1 := x + x^3$ e $\boldsymbol{v}_2 := 3 + 2x + x^3$ sono linearmente indipendenti. Il lemma del completamento 17.15 ci dice che aggiungendo ad essi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$ scelti in modo opportuno possiamo determinare una base di $\mathbb{R}^4[x]$. Vediamo come scegliere questi due vettori.

Consideriamo i sei vettori $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ e consideriamo la matrice A avente come colonne le componenti di questi sei vettori relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che ovviamente il minore di A formato dalle prime 4 colonne è la matrice identica di ordine 4 e che le ultime due colonne formano la matrice B vista nell'esempio 17.39. La matrice A ha rango uguale a 4. Un suo minore di ordine 4 è, per esempio, il minore formato dalle prime quattro colonne. Ricordiamo però che esiste un minore C invertibile di ordine 2 formato da elementi delle ultime due colonne. Per esempio, possiamo scegliere il minore formato dalle prime due righe e dalle ultime due colonne. Il teorema dell'orlare ci assicura che esiste un minore invertibile di ordine 4 ottenuto orlando due volte il minore C. Uno di essi è il minore formato da tutte e quattro le righe e dalla seconda, terza e quinta e sesta colonna. Ma allora i vettori $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^4[x]$. △

Il teorema 17.36 fornisce inoltre un'altra importante interpretazione del rango di una matrice. Consideriamo infatti una generica matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}.$$

a n righe e s colonne. Le sue s colonne sono vettori di $\mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$: esse generano quindi un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$ (se vogliamo possiamo identificare in maniera ovvia queste colonne anche con elementi di $\mathbb{R}^n$). Come possiamo calcolarne la dimensione? Dobbiamo scegliere una base di $\mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$: scegliamo la base canonica. Decomponiamo poi ciascuna colonna rispetto alla base canonica e consideriamo la matrice le cui colonne sono queste componenti. Ci si rende immediatamente conto che otteniamo la matrice A stessa. Dunque il rango della matrice A ci fornisce la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne. Poiché la trasposta di A ha il medesimo rango di A si vede poi immediatamente che anche lo spazio generato dalle righe ha dimensione uguale al rango di A. Abbiamo dunque il:

Teorema 17.41 *Sia A una matrice a n righe e s colonne. Lo spazio generato dalle colonne di A ha dimensione uguale a* $\operatorname{rk} A$. *Lo spazio generato dalle righe di A ha dimensione uguale a* $\operatorname{rk} A$.

Osservazione 17.42 Il teorema precedente ci dice che lo spazio generato dalle colonne e lo spazio generato dalle righe di una matrice A hanno la stessa dimensione. Non ci dice però che essi coincidano come sottospazi. Infatti se A ha n righe e s colonne le sue righe generano un sottospazio di $\mathrm{M}(1, s, \mathbb{R})$, mentre le sue colonne generano un sottospazio di $\mathrm{M}(n, 1, \mathbb{R})$.

Anche nel caso in cui la matrice sia quadrata di ordine n e che possiamo, quindi, identificare sia lo spazio generato dalle righe che lo spazio generato dalle colonne con sottospazi di $\mathbb{R}^n$, non è in generale detto che questi due sottospazi coincidano. $\triangle$

17.6 Soluzioni degli esercizi di base

EB.17.2 Dobbiamo mostrare che ogni polinomio di grado minore di 4 si può esprimere come combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ e che questi polinomi sono linearmente indipendenti. Consideriamo allora un generico polinomio di grado minore di 4:

$$f(x) := a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Cerchiamo di esprimere $f(x)$ come combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$:

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x).$$

Si ha:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_2 + k_3 + k_4)x + (k_3 + k_4)x^2 + k_4 x^3.$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema nelle incognite k_1, k_2, k_3 e k_4:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = a \\ k_2 + k_3 + k_4 = b \\ k_3 + k_4 = c \\ k_4 = d \end{cases}$$

Possiamo anche non risolvere esplicitamente questo sistema. Notiamo infatti che il sistema è Crameriano e, quindi, ammette un'unica soluzione. Dunque ogni polinomio $f(x)$ di $\mathbb{R}^4[x]$ è combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Dimostriamo ora che $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ sono linearmente indipendenti: per far ciò ci basta mostrare che il polinomio nullo si può esprimere come combinazione lineare dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ solo nel modo banale. Ma questo equivale a risolvere il sistema appena dato nel caso in cui $a = b = c = d = 0$. Sappiamo già che tale sistema ha, comunque scelti a, b, c e d, un'unica soluzione, che, nel caso $a = b = c = d = 0$ deve essere quindi quella banale $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

EB.17.26 Sappiamo che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Quindi 4 vettori di $\mathbb{R}^3$ comunque scelti sono linearmente dipendenti. In particolare $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente dipendenti.

EB.17.27 Sappiamo che $\dim \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) = 4$. Pertanto per generare $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ sono necessari almeno 4 vettori. Dunque A_1, A_2, A_3 non generano $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

EB.17.30 Il sistema che definisce E è costituito da un'unica equazione, quindi è immediato determinarne le soluzioni. Ricaviamo:

$$x_1 = \frac{3}{2}x_3 - x_4.$$

Assegniamo quindi dei valori parametrici alle incognite x_2, x_3 e x_4 e ricaviamo così le soluzioni dell'equazione, che ci danno, dunque, esplicitamente gli elementi di E:

$$E = \left\{ \left(\frac{3}{2}h_2 - h_3, h_1, h_2, h_3 \right) \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notiamo che il fatto che l'equazione che definisce E non coinvolge esplicitamente x_2 non ci autorizza a trascurare tale incognita né, tantomeno, a darle sempre il valore 0.

Per ottenere ora dei generatori di E poniamo prima $h_1 := 1$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 0$ ottenendo così il vettore $(0, 1, 0, 0)$. Ponendo poi $h_1 := 0$, $h_2 := 1$ e $h_3 := 0$ otteniamo il vettore $\left(\frac{3}{2}, 0, 1, 0\right)$. Infine poniamo $h_1 := 0$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 1$ e otteniamo il vettore $(-1, 0, 0, 1)$. Il sottospazio E è, dunque, generato dai vettori:

$$(0, 1, 0, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), \quad (-1, 0, 0, 1).$$

17.7 Sunto

Basi e dimensioni

Definizione Diciamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_r$ di uno spazio V costituiscono una **base** di V se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_r$ sono linearmente indipendenti. △

Teorema *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata da n vettori. Allora ogni altra base di V è formata da n vettori.*

Definizione Se uno spazio vettoriale V ha una base formata da n vettori, si dice che V ha **dimensione** uguale a n. In simboli $\dim V = n$. △

Osservazione Lo spazio vettoriale $\{\mathbf{0}\}$ formato dal solo vetture nullo non ha vettori linearmente indipendenti e quindi non ha alcuna base. Per completezza diciamo che lo spazio vettoriale $\{\mathbf{0}\}$ ha dimensione uguale a 0. △

Definizione Se uno spazio vettoriale V è formato dal solo vettore nullo (cioè $\dim V = 0$) oppure ha una base formata da n vettori (cioè $\dim V = n$) diciamo che V ha **dimensione finita**. △

Osservazione Se uno spazio vettoriale è finitamente generato, allora è di dimensione finita e viceversa. Pertanto, se non è possibile trovare in uno spazio vettoriale un numero finito di generatori, allora lo spazio vettoriale non ha dimensione finita.

Se uno spazio vettoriale non è dotato di una base formata da un numero finito di vettori si dice che lo spazio ha **dimensione infinita**. △

Teorema *Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ costituiscono una base di uno spazio vettoriale V allora ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$:*

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

*in un unico modo. La r-upla $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ viene detta r-upla delle **componenti** o **coordinate** di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$.*

Nota Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ costituiscono una base di V osserviamo che il vettore $\mathbf{0}$ ha componenti $(0, 0, \dots, 0)$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, mentre le componenti dell'i-esimo vettore $\boldsymbol{v}_i$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sono $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (dove l'unico 1 compare al posto i-esimo). △

Nota Quando parliamo di componenti di un vettore dobbiamo sempre specificare rispetto a quale base ci riferiamo, perché le componenti dello stesso vettore rispetto a basi diverse sono (in generale) diverse. △

Esempio Dati due punti A e B del piano tali che O, A e B non siano allineati, si ha che i vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OB}$ di $V^2(O)$ costituiscono una base di $V^2(O)$. Pertanto $\dim V^2(O) = 2$. △

Esempio Dati tre punti A, B e C dello spazio tali che O, A, B e C non siano complanari allora i vettori $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OB}$ e $\boldsymbol{v}_3 := \overrightarrow{OC}$ costituiscono una base per $V^3(O)$. Pertanto $\dim V^3(O) = 3$. △

Esempio I vettori

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1)$$

formano una base di $\mathbb{R}^n$, detta **base canonica**. Pertanto $\dim \mathbb{R}^n(O) = n$. △

Esempio Le $p \cdot q$ matrici E_{ij} con $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, dove E_{ij} è la matrice i cui elementi sono tutti 0 tranne quello di posto (i, j) che è uguale a 1, formano una base di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, detta **base canonica**. Pertanto $\dim \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R}) = p \cdot q$.△

Esempio I polinomi 1, x, x^2, ..., x^{n-1} formano una base di $\mathbb{R}^n[x]$, detta **base canonica**. Pertanto $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$. △

Teorema *Sia SO un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite. Se la matrice dei coefficienti del sistema ha rango r allora lo spazio delle soluzioni di SO ha dimensione $q - r$.*

Lemma (del completamento) *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata dai vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Siano poi assegnati r vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ di V, con $r \leq n$. È allora possibile scegliere opportunamente r vettori tra quelli della base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e sostituirli con i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ in modo tale da ottenere una base di V.*

Teorema *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora:*

1. non esistono più di n vettori linearmente indipendenti;

2. dati comunque r vettori con $r < n$(anche se linearmente indipendenti), essi non possono essere generatori (e quindi tantomeno una base) di V;

3. dati comunque n vettori linearmente indipendenti, essi formano una base di V;

4. dati comunque n generatori, essi formano una base di V.

Teorema *Sia dato un sistema lineare omogeneo $SO\colon AX = 0$ di p equazioni in q incognite $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Se il rango della matrice A è r, allora lo spazio delle soluzioni $\mathrm{Sol}(SO)$ ha dimensione $q - r$ e una sua base può essere determinata nel modo seguente:*

- *Si determinano le soluzioni del sistema con il metodo che si preferisce: sappiamo che $q - r$ incognite scelte opportunamente fungeranno da parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-r}$;*
- *il primo vettore della base si ottiene assegnando ad h_1 il valore 1 e agli altri parametri il valore 0;*
- *il secondo vettore della base si ottiene assegnando ad h_2 il valore 1 e agli altri parametri il valore 0;*
- *così via;*
- *l'ultimo vettore della base si ottiene assegnando ad h_{q-r} il valore 1 e agli altri parametri il valore 0.*

Dimensioni di sottospazi vettoriali

Proposizione *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n, e sia E un sottospazio vettoriale di V. Allora E ha dimensione finita e $\dim E \leq \dim V$.*

Proposizione *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n. Allora:*

- *Esiste un solo sottospazio di dimensione uguale a 0. Si tratta del sottospazio formato dal solo vettore nullo.*
- *Esiste un solo sottospazio di dimensione uguale a n. Si tratta del sottospazio V stesso.*

Esempio I sottospazi vettoriali di $V^2(O)$ sono:

- l'unico sottospazio di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo;

- i sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$ dove r è una retta passante per l'origine;

- l'unico sottospazio di dimensione 2 è $V^2(O)$ stesso. △

Esempio I sottospazi vettoriali di $V^3(O)$ sono:

- l'unico sottospazio di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo;

- i sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$ dove r è una retta passante per l'origine;

- i sottospazi di dimensione 2 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in \pi\}$ dove π è un piano passante per l'origine;

- l'unico sottospazio di dimensione 3 è $V^3(O)$ stesso. △

Calcolo di dimensioni e basi

Teorema *Sia V una spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ una sua base. Siano ora dati dei vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_s$ e sia U il sottospazio vettoriale di V che essi generano. Decomponendo i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_s$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ otteniamo:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\
\boldsymbol{u}_2 &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_s &= a_{1s}\boldsymbol{v}_1 + a_{2s}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{ns}\boldsymbol{v}_n
\end{aligned}$$

Indichiamo con $A := (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, s, \mathbb{R})$ la matrice avente come colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_s$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

$$\operatorname{rk} A = \dim U.$$

Inoltre il calcolo del rango di A ci dice anche come possiamo estrarre una base di U da $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_s$. Detto r il rango di A:

- *Se abbiamo calcolato* $\operatorname{rk} A$ *usando i determinanti dei minori, sia M un minore di A di ordine r avente determinante non nullo. Gli r vettori corrispondenti alle colonne di M formano una base di U.*

- *Se abbiamo calcolato* $\operatorname{rk} A$ *riducendo la matrice a scalini, sia B la matrice con r scalini ottenuta dalla matrice A. Allora una base di U si ottiene prendendo i vettori tra $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_s$ le cui posizioni corrispondono agli scalini di B.*

Teorema *Sia A una matrice a n righe e s colonne. Lo spazio generato dalle colonne di A ha dimensione uguale a $\operatorname{rk} A$. Lo spazio generato dalle righe di A ha dimensione uguale a $\operatorname{rk} A$.*

Proposizione *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.*

Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ una base di E e $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_q$ una base di F.

Allora $\dim(E + F) = \operatorname{rk} A$ dove A è la matrice avente come colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_q$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

17.8 Esercizi

E.17.1 Stabilire se i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := (1,3,2,1), \quad \boldsymbol{v}_2 := (1,0,1,0), \quad \boldsymbol{v}_3 := (1,0,2,0)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti. Calcolare una base e la dimensione per lo spazio $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

E.17.2 Stabilire se i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := (1,0,1,0), \quad \boldsymbol{v}_2 := (2,0,2,0), \quad \boldsymbol{v}_3 := (1,0,2,1)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti. Calcolare una base e la dimensione per lo spazio $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

E.17.3 Stabilire se le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

E.17.4 In ciascuno dei seguenti casi stabilire se i vettori dati sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti:

a. $\boldsymbol{v}_1 := (1,2,1,3)$, $\boldsymbol{v}_2 := (0,0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (1,0,1,1)$;

b. $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

c. $\boldsymbol{v}_1 := (2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (0,1,-2)$;

d. $f_1(x) := 1 + x - 2x^2$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x^2$;

e. $\boldsymbol{v}_1 := (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (1,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_4 := (1,1,1,1)$.

E.17.5 Nei casi dell'esercizio E.17.4 in cui i vettori dati sono linearmente dipendenti si esprima uno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti.

E.17.6 Determinare una base di $\mathbb{R}^4[x]$ che contenga i due polinomi indipendenti $f_1(x) := 1 + x + x^2$ e $f_2(x) := x - x^3$.

E.17.7 Stabilire se i vettori $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$.

E.17.8 Stabilire se i vettori $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$.

E.17.9 Stabilire se le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base per $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$.

E.17.10 Stabilire se i polinomi $f_1(x) := 1 + x$, $f_2(x) := 1 - x$, $f_3(x) := 1 + x^2$, $f_4(x) := 1 - x^2$ formano una base per $\mathbb{R}^3[x]$.

E.17.11 Stabilire se i vettori

$$\boldsymbol{v}_1 := (1, 3, 0, 2), \boldsymbol{v}_2 := \left(1, 1, \frac{1}{2}, 1\right), \boldsymbol{v}_3 := (1, 1, 1, 0), \boldsymbol{v}_4 := (2, 0, 1, 2)$$

formano una base per $\mathbb{R}^4$.

E.17.12 Dati i vettori $f_1(x) := 1 + 2x + x^2$, $f_2(x) := -1 + x^2$, $f_3(x) := x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x^2$, dimostrare che $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ generano $\mathbb{R}^3[x]$, ed estrarre da essi una base di $\mathbb{R}^3[x]$.

E.17.13 Determinare le componenti del vettore $\boldsymbol{v} := (1, 2, 1)$ rispetto:

a. alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

b. alla base costituita dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (0, 1, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 := (3, 2, 1)$.

E.17.14 Determinare le componenti del polinomio $1 - 3x + 2x^2$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata dai polinomi 1, $1 + x$, $1 + x + x^2$.

E.17.15 Determinare una base per lo spazio vettoriale E generato dai vettori

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_1 := (1, 3, 1, 1), \qquad &&\boldsymbol{v}_2 := (1, 0, 2, 1), \qquad &&\boldsymbol{v}_3 := (2, 3, 3, 2), \\ &\boldsymbol{v}_4 := (1, 2, 0, 1), &&\boldsymbol{v}_5 := \left(1, \frac{5}{3}, 1, 1\right). \end{aligned}$$

E.17.16 Dati i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (-1, 0, 1)$ determinare un vettore $\boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ formino una base per $\mathbb{R}^3$.

E.17.17 Calcolare la dimensione del sottospazio E di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

E.17.18 Si verifichi che i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 2, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (0, 1, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (2, 4, 2, 0)$ sono linearmente dipendenti: per ciascun vettore stabilire se può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti.

E.17.19 Dimostrare che se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ formano una base per uno spazio vettoriale E allora anche i vettori $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ formano una base per E.

E.17.20 Si verifichi che i vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (-1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (1, 3, 1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$: determinare le componenti dei vettori $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ rispetto a questa base.

E.17.21 Determinare una base per lo spazio vettoriale E generato dalle matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.17.22 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

determinare una base per il sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ generato dalle matrici A, ${}^tA$, $A + {}^tA$.

E.17.23 Sia V uno spazio vettoriale e siano $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ vettori di V che ne costituiscono una base. Determinare una base per il sottospazio E di V generato dai vettori:

$$\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4.$$

Determinare una base per il sottospazio F di V generato dai vettori:

$$\boldsymbol{e}_4, -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4.$$

17.9 Soluzioni degli esercizi

E.17.1 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo il rango di A troviamo $\operatorname{rk} A = 3$. Dunque $\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 3$ e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ costituiscono una base per $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

Notiamo che se avessimo posto $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$, il sistema lineare nelle incognite k_1, k_2, k_3 che avremmo ottenuto avrebbe avuto come sua matrice dei coefficienti proprio la matrice A.

E.17.2 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle = \operatorname{rk} A = 2$. Poiché gli scalini sono nella prima e terza posizione abbiamo che una base per $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ è formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_3$. Se avessimo preliminarmente osservato che $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$, avremmo potuto affermare che $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\rangle$: poiché $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente indipendenti (nessuno dei due è multiplo dell'altro), avremmo trovato che $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_3$ costituiscono una base di $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

E.17.3 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti delle matrici A_1, A_2 e A_3 rispetto alla base canonica

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo il rango di A troviamo $\operatorname{rk} A = 3$. Dunque le matrici A_1, A_2 e A_3 sono linearmente indipendenti.

E.17.4

a. Possiamo considerare la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché il rango di questa matrice è 3, i 3 vettori sono linearmente indipendenti.

b. Osserviamo che A_1 e A_3 sono uguali: dunque le matrici A_1, A_2, A_3 e A_4 sono linearmente dipendenti.

Se non avessimo notato l'uguaglianza tra A_1 e A_3 avremmo potuto considerare la matrice le cui colonne danno le componenti delle matrici A_1, A_2, A_3 e A_4 rispetto alla base canonica di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante nullo e, dunque, le 4 matrici sono linearmente dipendenti.

c. Possiamo considerare la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica di$\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante nullo e, dunque, i 3 vettori sono linearmente dipendenti.

d. Possiamo considerare la matrice le cui colonne danno le componenti dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante non nullo e, dunque, i 3 vettori sono linearmente indipendenti.

e. Possiamo considerare la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante non nullo e, dunque, i 4 vettori sono linearmente indipendenti.

E.17.5

b. Abbiamo già notato che $A_1 = A_3$. Possiamo cioè scrivere:

$$A_1 = 0A_2 + A_3 + 0A_4.$$

c. Si vede facilmente che $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Dunque $\boldsymbol{v}_3$ può essere espresso come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ (se così non fosse $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sarebbero linearmente indipendenti). Scriviamo ora

$$(0, 1, -2) = h(2, 1, 0) + k(1, 0, 1).$$

Risolvendo questa equazione vettoriale troviamo:

$$(0, 1, -2) = (2, 1, 0) - 2(1, 0, 1).$$

E.17.6 Dobbiamo trovare innanzitutto un polinomio che non sia combinazione lineare di $f_1(x)$ e $f_2(x)$: ad esempio $f_3(x) := 1$. Cerchiamo poi un polinomio che non sia combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$, ad esempio $f_4(x) := x$. Una base per $\mathbb{R}^4[x]$ è allora formata dai vettori: $1 + x + x^2$, $x - x^3$, 1, x.

E.17.7 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori dati rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è -4, dunque $\operatorname{rk} A = 3$. La dimensione dello spazio vettoriale generato dai 3 vettori assegnati è esattamente 3. Poiché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il sottospazio vettoriale generato dai 3 vettori deve essere tutto $\mathbb{R}^3$ (se fosse un sottospazio propriamente contenuto in $\mathbb{R}^3$ dovrebbe avere dimensione minore di 3). Abbiamo allora 3 vettori che generano uno spazio di dimensione 3: questi vettori sono necessariamente una base di $\mathbb{R}^3$.

E.17.8 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori dati rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è 0, dunque $\operatorname{rk} A < 3$. La dimensione dello spazio vettoriale generato dai 3 vettori assegnati è minore di 3. Pertanto i 3 vettori non generano tutto $\mathbb{R}^3$, e, dunque, non costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$.

E.17.9 Le matrici assegnate non formano una base per $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ perché tutte le basi di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ sono formate da 4 vettori.

E.17.10 I polinomi assegnati non possono certo formare una base per $\mathbb{R}^3[x]$, perché tutte le basi di $\mathbb{R}^3[x]$ sono formate da 3 vettori.

E.17.11 No, il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

è nullo.

E.17.12 Consideriamo la matrice le cui colonne danno le componenti dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ rispetto alla base canonica $\mathbb{R}^3[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando la riduzione a scalini troviamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque abbiamo tre scalini in prima, seconda e quarta colonna: la matrice A ha allora rango 3. Pertanto $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ generano $\mathbb{R}^3[x]$ e $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_4(x)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^3[x]$.

E.17.13 Rispetto alla base canonica la terna delle componenti di $(1, 2, 1)$ è ovviamente $(1, 2, 1)$. Per determinare la terna (k_1, k_2, k_3) delle componenti di $(1, 2, 1)$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ dobbiamo risolvere l'equazione:

$$k_1(1, 2, 0) + k_2(0, 1, 3) + k_3(3, 2, 1) = (1, 2, 1).$$

Questo dà il sistema:

$$\begin{cases} k_1 \phantom{{}+ k_2} + 3k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 = 2 \\ \phantom{2k_1 +{}} 3k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$$

che risolto dà $\left\{k_1 = \frac{10}{13}, k_2 = \frac{4}{13}, k_3 = \frac{1}{13}\right\}$.

E.17.14 Esprimendo il polinomio $1 - 3x + 2x^2$ come combinazione lineare generica dei vettori della base assegnata abbiamo:

$$1 - 3x + 2x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x + x^2).$$

Espandendo il secondo membro abbiamo:

$$1 - 3x + 2x^2 = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2.$$

Eguagliando i coefficienti otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \qquad \beta + \gamma = -3 \\ \qquad\qquad \gamma = 2 \end{cases},$$

la cui soluzione è $\alpha = 4$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$. Si ha pertanto

$$1 - 3x + 2x^2 = 4 \cdot 1 - 5(1 + x) + 2(1 + x + x^2).$$

E.17.15 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{v}_5$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & \frac{5}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché gli scalini sono nella prima, seconda e quarta posizione abbiamo che una base per E è formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. e $\boldsymbol{v}_4$.

E.17.16 Se $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq (x, y, z)$ abbiamo che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ formano una base per $\mathbb{R}^3$ se e solo se la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0. Poiché

$$\det A = x - y + z$$

possiamo, ad esempio, scegliere $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq (1, 0, 0)$.

E.17.17 Osserviamo innanzitutto che $A_2 = 2A_1$: quindi lo spazio generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 e A_4 è uguale allo spazio generato dalle matrici A_1, A_3 e A_4. Consideriamo la matrice le cui colonne danno le componenti delle matrici A_1, A_3 e A_4 rispetto alla base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che il rango di questa matrice è 2, e, dunque, la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 e A_4 è 2.

E.17.18 Vediamo subito che $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1$: dunque $\boldsymbol{v}_1$ può essere espresso combinazione lineare dei vettori rimanenti ($\boldsymbol{v}_1 = 0\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3$) e $\boldsymbol{v}_3$ può essere espresso combinazione lineare dei vettori rimanenti ($\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2$). Se $\boldsymbol{v}_2$ fosse combinazione lineare dei vettori rimanenti avremmo

$$\boldsymbol{v}_2 = h\boldsymbol{v}_1 + k\boldsymbol{v}_3 = h\boldsymbol{v}_1 + 2k\boldsymbol{v}_1 = (h+2k)\boldsymbol{v}_1$$

cioè avremmo che $\boldsymbol{v}_2$ sarebbe multiplo di $\boldsymbol{v}_1$: poiché questo non si verifica, abbiamo che $\boldsymbol{v}_2$ non è combinazione lineare dei vettori rimanenti.

E.17.19 Scriviamo la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante 1: dunque i vettori $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ formano una base per E.

E.17.20 Scriviamo la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante non nullo: dunque i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ formano una base per $\mathbb{R}^3$. Per determinare le componenti di $(1,0,0)$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ dobbiamo risolvere l'equazione vettoriale:

$$x(1,1,-1) + y(-1,0,1) + z(1,3,1) = (1,0,0)$$

vale a dire il sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x \phantom{{}-y} + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = -\frac{3}{2}$, $y = -2$, $z = \frac{1}{2}$. In maniera analoga si trova che le componenti di $(1,1,1)$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono date da $x = -2$, $y = -2$, $z = 1$.

E.17.21 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti delle matrici A_1, A_2 e A_3 rispetto alla base canonica

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque il rango di A è 3, e, pertanto, le 3 matrici sono linearmente indipendenti. Una base di E è allora formata dalle 3 matrici A_1, A_2, A_3.

E.17.22 Osserviamo innanzitutto che $A + {}^tA$ è, chiaramente, combinazione lineare di A e ${}^tA$ (non c'è bisogno di calcolare esplicitamente $A + {}^tA$ per dire ciò). Dunque $\langle A, {}^tA, A + {}^tA \rangle = \langle A, {}^tA \rangle$. Osserviamo ora che nessuna fra A e ${}^tA$ è multipla dell'altra e quindi A e ${}^tA$ sono linearmente indipendenti. Dunque A e ${}^tA$ formano una base di $\langle A, {}^tA, A + {}^tA \rangle$.

E.17.23 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei generatori di E rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice troviamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché gli scalini sono in prima e seconda posizione abbiamo che una base per E è formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_4$ e $\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Analogamente consideriamo la matrice B le cui colonne corrispondono alle componenti dei generatori di F rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini la matrice troviamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque il rango di A è 3, e, pertanto, una base di F è formata dai vettori: $\boldsymbol{e}_4$, $-\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4$.

CAPITOLO 18

Intersezione e somma di sottospazi

Dati due sottospazi vettoriali E e F di uno spazio vettoriale V viene spontaneo chiedersi se la loro intersezione e la loro unione siano essi stessi sottospazi vettoriali di V. Vedremo che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale mentre l'unione di due sottospazi vettoriali non è sempre un sottospazio vettoriale. Introduciamo allora un nuovo insieme, la somma di sottospazi vettoriali, che è, in un certo senso, il più piccolo sottospazio vettoriale contenente ambedue i sottospazi vettoriali. Vedremo poi come la cosiddetta formula di Grassmann sia utile nel calcolo della dimensione della intersezione o della somma di due spazi vettoriali. Introduciamo infine un caso particolare di somma di due sottospazi vettoriali: la somma diretta.

18.1 Intersezione di sottospazi vettoriali

Supponiamo di avere due sottospazi E e F dello stesso spazio vettoriale V. Ci chiediamo se l'intersezione e l'unione di E e F siano anch'essi sottospazi di V. Possiamo iniziare dando il:

Teorema 18.1 *L'intersezione $E \cap F$ di due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.*

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo innanzitutto mostrare che $E \cap F$ è non vuoto. In generale non è detto che l'intersezione di due insiemi non vuoti sia non vuota, però in questo caso possiamo trovare un vettore di V che sta tanto in E quanto in F: il vettore nullo.

Vogliamo ora mostrare che se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due vettori di $E \cap F$ allora la somma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ appartiene a $E \cap F$. I vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono, in particolare, vettori del sottospazio E, dunque la loro somma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ appartiene ad E; allo stesso modo, poiché i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono vettori del sottospazio F, la loro somma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ appartiene ad F. Dunque, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ appartiene tanto ad E quanto ad F, cioè appartiene a $E \cap F$.

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che se k è un numero reale e $\boldsymbol{u}$ è un vettore di $E \cap F$ allora $k\boldsymbol{u}$ appartiene a $E \cap F$: poiché il vettore $\boldsymbol{u}$ è, in particolare, un vettore del sottospazio E abbiamo che $k\boldsymbol{u}$ appartiene ad E. In maniera analoga si dimostra che $k\boldsymbol{u}$ appartiene a F e, dunque, $k\boldsymbol{u}$ appartiene a $E \cap F$. ■

Osservazione 18.2 L'intersezione $E \cap F$ di due sottospazi vettoriali E e F è un sottospazio vettoriale sia di E che di F. △

Osservazione 18.3 Se E e F sono due sottospazi vettoriali di dimensione finita[1] di uno spazio vettoriale allora, grazie alla proposizione 17.31, anche $E \cap F$ ha dimensione finita e si ha $\dim(E \cap F) \leq \dim E$ e $\dim(E \cap F) \leq \dim F$. △

Esempio 18.4 Nella proposizione 14.18 abbiamo visto che, data una retta r passante per l'origine, il sottoinsieme E di $V^2(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$ è un sottospazio di $V^2(O)$. In maniera del tutto analoga si può vedere che, dato un piano π passante per l'origine, il sottoinsieme E di $V^3(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \pi$ è un sottospazio di $V^3(O)$. Consideriamo ora un altro piano σ passante per l'origine e sia F il sottospazio di $V^3(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \sigma$. Se π e σ sono distinti, si intersecano in una retta r passante per l'origine. In tal caso l'intersezione dei sottospazi E ed F è uguale all'insieme dei vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$. △

Esercizio di base 18.5 Si considerino i sottospazi E e F di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ così definiti:

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}, \\ F &:= \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \quad \triangle$$

Determinare l'intersezione $E \cap F$.

Esercizio di base 18.6 Determinare l'intersezione di $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$ e $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$.

Esempio 18.7 Consideriamo in $\mathbb{R}^5$ il sottospazio vettoriale E, generato dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1,4,0,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (1,0,0,1,1)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (1,1,0,-1,2)$ e il sottospazio vettoriale F generato dai vettori $\boldsymbol{f}_1 := (2,1,1,4,0)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (-1,1,-1,0,-2)$.

Vogliamo determinare l'intersezione di E con F. Un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a E se e solo se è combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$; un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a F se e solo se è combinazione lineare di $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= h_1(1,4,0,0,0) + h_2(1,0,0,1,1) + h_3(1,1,0,-1,2), \\ \boldsymbol{v} &= k_1(2,1,1,4,0) + k_2(-1,1,-1,0,-2), \end{aligned}$$

[1] In realtà sarebbe sufficiente ipotizzare che almeno uno dei due sottospazi E e F sia di dimensione finita

ovvero

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (h_1 + h_2 + h_3, 4h_1 + h_3, 0, h_2 - h_3, h_2 + 2h_3),\\
\boldsymbol{v} &= (2k_1 - k_2, k_1 + k_2, k_1 - k_2, 4k_1, -2k_2).
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$(h_1{+}h_2{+}h_3, 4h_1{+}h_3, 0, h_2{-}h_3, h_2{+}2h_3) = (2k_1{-}k_2, k_1{+}k_2, k_1{-}k_2, 4k_1, -2k_2)$$

il che ci dà il sistema:

$$\begin{cases}
h_1 + h_2 + h_3 = 2k_1 - k_2\\
4h_1 + h_3 = k_1 + k_2\\
0 = k_1 - k_2\\
h_2 - h_3 = 4k_1\\
h_2 + 2h_3 = -2k_2
\end{cases}$$

Risolvendo questo sistema nelle incognite h_1, h_2, h_3, k_1 e k_2 troviamo le soluzioni in dipendenza da un parametro:

$$\begin{cases}
h_1 = l\\
h_2 = 2l\\
h_3 = -2l\\
k_1 = l\\
k_2 = l
\end{cases}$$

Possiamo ora sostituire tali valori nell'espressione di $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ o come combinazione lineare di $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$, ottenendo ovviamente sempre lo stesso risultato:

$$\boldsymbol{v} := (l, 2l, 0, 4l, -2l).$$

Pertanto $E \cap F$ è l'insieme dei multipli del vettore $(1, 2, 0, 4, -2)$. In particolare $\dim(E \cap F) = 1$. $\triangle$

18.2 Somma di sottospazi vettoriali

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che l'intersezione di due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V. Verrebbe allora naturale dire che anche l'unione $E \cup F$ di due sottospazi è un sottospazio vettoriale di V. Proviamo a scrivere una dimostrazione di questo fatto analoga a quella utilizzata nel caso dell'intersezione. Innanzitutto $E \cup F$ è non vuoto perché contiene, ad esempio, il vettore nullo. Cerchiamo ora di mostrare che la somma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $E \cup F$ appartiene a $E \cup F$. Cosa significa che $\boldsymbol{u}$ appartiene ad $E \cup F$? Significa che $\boldsymbol{u}$ appartiene ad almeno uno dei sottospazi E o F. Lo stesso si può dire per il vettore $\boldsymbol{v}$. Dunque se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ appartengono entrambi ad E allora la loro somma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ appartiene ad E e quindi anche a $E \cup F$. Analogamente se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ appartengono entrambi ad F. Ma cosa succede se, ad esempio, $\boldsymbol{u}$ appartiene ad E e $\boldsymbol{v}$ appartiene ad F? Non c'è un motivo evidente perché la loro somma stia in E oppure stia in F. Dunque la dimostrazione che stiamo cercando di dare non funziona. Non abbiamo però dimostrato che $E \cup F$ non è un sottospazio: semplicemente non siamo riusciti a dimostrare che è un sottospazio. Per chiarirci le idee vale la pena di vedere cosa succede in qualche caso particolare.

Esempio 18.8 Consideriamo i sottospazi $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2)$ e $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$ di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ formati rispettivamente dalle matrici triangolari superiori e dalle matrici triangolari inferiori di ordine 2. La loro unione è dunque l'insieme $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2) \cup \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$ delle matrici triangolari di ordine 2. È vero che sommando due matrici triangolari otteniamo una matrice triangolare? Chiaramente se le matrici sono entrambe triangolari superiori o entrambe triangolari inferiori la risposta è sì, ma nell'esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo due matrici triangolari (una superiore e una inferiore) la cui somma non è triangolare. △

Dunque, in generale, non è detto che l'unione di due sottospazi sia un sottospazio.

Cerchiamo allora un sottospazio vettoriale di V che contenga sia E sia F e che sia, in un certo senso, il più piccolo possibile. Abbiamo visto che $E \cup F$ non è in generale un sottospazio perché sommando un vettore di E a un vettore di F potremmo ottenere come risultato un vettore che non sta né in E né in F. Il sottospazio che stiamo cercando deve allora contenere oltre a E e a F tutte le somme del tipo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$. Diamo un nome all'insieme di queste somme:

Definizione 18.9 Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V la **somma** di E e di F è il sottoinsieme di V formato da tutte le somme del tipo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$. Indichiamo con il simbolo $E + F$ tale insieme. Abbiamo dunque:

$$E + F := \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in F\}. \qquad \triangle$$

In base alla discussione fatta in precedenza un sottospazio vettoriale di V che contenga tanto E quanto F deve necessariamente contenere la loro somma $E + F$. Notiamo che ogni vettore $\boldsymbol{u}$ di E è anche un vettore di $E + F$: infatti $\boldsymbol{u}$ può essere espresso come somma del vettore $\boldsymbol{u}$ (che appartiene ad E) e di $\mathbf{0}$ (che appartiene a F). Allo stesso modo si può vedere che ogni vettore di F è anche vettore di $E + F$. Abbiamo così provato la:

Osservazione 18.10 La somma di due sottospazi $E + F$ contiene sia E sia F. △

Esercizio di base 18.11 Dato un sottospazio E di uno spazio vettoriale V determinare $E + E$.

Potremmo allora chiederci se $E + F$ sia un sottospazio vettoriale di V o se ad esso sia necessario aggiungere altri vettori per ottenere un sottospazio vettoriale di V. Abbiamo il:

Teorema 18.12 *La somma $E + F$ di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V. Se U è un sottospazio vettoriale di V contenente sia E sia F allora U contiene $E + F$.*

Dimostrazione Abbiamo già osservato che un sottospazio vettoriale U che contenga tutti i vettori di E e tutti i vettori di F deve contenere anche tutte le possibili somme di tali vettori, vale a dire $U \supseteq E + F$. L'unica cosa che dobbiamo allora mostrare è che $E + F$ è un sottospazio vettoriale di V. Come prima cosa osserviamo che $E + F$ è non vuoto: dal momento che tanto E che F sono non vuoti possiamo scegliere un vettore $\boldsymbol{u}$ in E e un vettore $\boldsymbol{v}$ in F ; la somma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ è allora un vettore di $E + F$.

Dobbiamo ora mostrare che la somma di due vettori $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ di $E + F$ è ancora un vettore di $E + F$. Sappiamo che esistono $\boldsymbol{u}_1$ in E e $\boldsymbol{v}_1$ in F tali che $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1$. Analogamente esistono $\boldsymbol{u}_2$ in E e $\boldsymbol{v}_2$ in F tali che $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2$. Vogliamo mostrare che $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ è uguale alla somma di un vettore di E e di un vettore di F. Ora

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2).$$

Poiché $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ è un vettore di E e $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ è un vettore di F abbiamo che $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ è un vettore di $E + F$.

Per concludere la dimostrazione dobbiamo solo provare che moltiplicando un vettore $\boldsymbol{w}$ di $E+F$ per uno scalare k otteniamo un vettore di $E+F$. Sappiamo che esistono $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$ tali che $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Abbiamo dunque:

$$k\boldsymbol{w} = k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}.$$

Poiché $k\boldsymbol{u} \in E$ e $k\boldsymbol{v} \in F$ abbiamo che $k\boldsymbol{w} \in E + F$. ■

Esercizio di base 18.13 Si considerino i sottospazi E e F di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ così definiti:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartiene a $E + F$? E la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

△

Esempio 18.14 Nella proposizione 14.18 abbiamo visto che, data una retta r del piano passante per O, il sottoinsieme di $V^2(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$, è un sottospazio E di $V^2(O)$. Consideriamo ora un'altra retta s del piano passante per O e distinta da r. Sia F il sottospazio di $V^2(O)$ formato dai vettori del tipo $\overrightarrow{OA}$ con $A \in s$. Si può verificare facilmente che $E + F = V^2(O)$. △

Esercizio di base 18.15 Dimostrare l'asserzione dell'ultimo esempio. Può essere utile utilizzare i risultati del capitolo 12.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se E e F sono sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V allora $E \cap F$ ha dimensione finita. Cosa possiamo dire di $E + F$? Iniziamo con un esempio.

Esempio 18.16 Siano E e F sottospazi vettoriali di uno spazio V. Supponiamo che i vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ formino una base di E e che i vettori $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ formino una base di F. Quindi $\dim E = 3$ e $\dim F = 2$.

Consideriamo ora $E + F$. Osserviamo che un vettore $\boldsymbol{w}$ di V appartiene a $E + F$ se si può esprimere come somma di un vettore $\boldsymbol{u}$ di E e di un vettore $\boldsymbol{v}$ di F. Ora $\boldsymbol{u}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ mentre $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$. Possiamo allora scrivere:

$$\boldsymbol{u} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\boldsymbol{e}_3$$

per opportuni h_1, h_2 e h_3 in $\mathbb{R}$ e similmente:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{f}_1 + k_2\boldsymbol{f}_2$$

per opportuni k_1 e k_2 in $\mathbb{R}$. Ma allora:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\boldsymbol{e}_3 + k_1\boldsymbol{f}_1 + k_2\boldsymbol{f}_2.$$

Dunque $\boldsymbol{w}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$. Questo vale per ogni vettore di $E + F$: dunque i vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ (che, si badi bene, sono vettori di $E + F$) generano $E + F$.

Possiamo allora affermare che $\dim(E + F) \leq 5$. $\triangle$

Chiaramente questo tipo di considerazioni si può fare ogni qual volta abbiamo a che fare con sottospazi vettoriali di dimensione finita. Si ha cioè la:

Proposizione 18.17 *Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V (quest'ultimo non necessariamente di dimensione finita). Allora $E + F$ ha dimensione finita.*

In particolare, se $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p$ formano una base di E e $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_q$ formano una base di F, allora i vettori $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_q$ generano $E + F$ (ma non formano necessariamente una base di $E + F$).

In particolare, utilizzando il teorema 17.36, abbiamo la:

Proposizione 18.18 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita avente una base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$.*

Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p$ una base di E e $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_q$ una base di F.

Allora $\dim(E + F) = \operatorname{rk} A$ dove A è la matrice avente come colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_q$ rispetto alla base $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$.

Esempio 18.19 Riprendiamo in $\mathbb{R}^5$ il sottospazio vettoriale E, generato dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1, 4, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (1, 0, 0, 1, 1)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (1, 1, 0, -1, 2)$ e il sottospazio vettoriale F generato dai vettori $\boldsymbol{f}_1 := (2, 1, 1, 4, 0)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (-1, 1, -1, 0, -2)$, già utilizzati nell'esempio 18.7.

La somma $E + F$ è generata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$. Utilizzando le tecniche introdotte nel capitolo 17, possiamo allora considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ rispetto alla base canonica. Facendo i calcoli si trova che questa matrice ha rango 4 e pertanto $\dim(E + F) = 4$. △

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato la dimensione della somma in maniera indipendente dalla dimensione dell'intersezione. Tuttavia queste dimensioni sono collegate:

Teorema 18.20 (Formula di Grassmann) *Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V (quest'ultimo non necessariamente di dimensione finita). Vale allora la formula:*

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata nel paragrafo A.18.

Esempio 18.21 Negli esempi 18.7 e 18.19 abbiamo calcolato indipendentemente la dimensione dell'intersezione e della somma di due sottospazi vettoriali E e F. Osservando che $\dim E = 3$ e $\dim F = 2$ è possibile calcolare direttamente solo una fra $\dim(E \cap F)$ e $\dim(E + F)$ e ricavare poi l'altra delle due dimensioni utilizzando la formula di Grassmann. △

Esempio 18.22 Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{e}_4$. Siano poi dati i vettori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &:= 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_2 &:= 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_3 &:= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_4 &:= 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4. \end{aligned}$$

I vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti (infatti non sono uno multiplo dell'altro). Sia E il sottospazio avente come base $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. Analogamente i vettori $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Sia F il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$.

Vogliamo determinare una base per $E + F$ e una base per $E \cap F$.

La proposizione 18.17 ci dice che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ sono generatori di $E + F$. Per estrarre da essi una base consideriamo la matrice A avente come colonne le componenti dei quattro vettori relativamente alla base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{e}_4$. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli si nota che il determinante della matrice A è nullo e che il minore di A formato dalle prime tre righe e tre colonne ha determinante non nullo. Pertanto lo spazio vettoriale $E+F$ ha base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, e $\boldsymbol{v}_3$.

Vogliamo ora determinare una base di $E \cap F$. Osserviamo innanzitutto che la formula di Grassmann ci dice che:

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E+F) = 2+2-3 = 1.$$

Cerchiamo i vettori di $E \cap F$. Un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a E se e solo se si può scrivere come $h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2$ per qualche h_1 e h_2 in $\mathbb{R}$. D'altra parte $\boldsymbol{v}$ appartiene a F se e solo se si può scrivere come $k_1\boldsymbol{v}_3 + k_2\boldsymbol{v}_4$ per qualche k_1 e k_2 in $\mathbb{R}$.

Pertanto, affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a $E \cap F$ deve essere:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 = k_1\boldsymbol{v}_3 + k_2\boldsymbol{v}_4$$

e quindi

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 - k_1\boldsymbol{v}_3 - k_2\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Ponendo $h_3 = -k_1$ e $h_4 = -k_2$, abbiamo:

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_3\boldsymbol{v}_3 + h_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Sostituendo $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, e $\boldsymbol{v}_4$ abbiamo:

$$(h_3+3h_4)\boldsymbol{e}_1+(2h_1+3h_2+2h_3+h_4)\boldsymbol{e}_2+(h_2+h_4)\boldsymbol{e}_3+(h_1+2h_2+h_3+h_4)e_4 = \mathbf{0}.$$

La combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, e $\boldsymbol{e}_4$ (che sono linearmente indipendenti) è nulla se e solo se i coefficienti sono tutti nulli. Abbiamo quindi il seguente sistema nelle incognite h_1, h_2, h_3 e h_4:

$$\begin{cases} h_3 + 3h_4 = 0 \\ 2h_1 + 3h_2 + 2h_3 + h_4 = 0 \\ h_2 + h_4 = 0 \\ h_1 + 2h_2 + h_3 + h_4 = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che la matrice dei coefficienti del sistema è la matrice A trovata sopra. Dal momento che $\operatorname{rk} A = 3$ le soluzioni del sistema dipendono da un parametro. Svolgendo i calcoli si ottengono le soluzioni

$$(h_1, h_2, h_3, h_4) = (4t, -t, -3t, t)$$

al variare del parametro t. I vettori dell'intersezione sono quindi i vettori del tipo

$$\boldsymbol{v} = 4t\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2 = 4t(2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4) - t(3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4)$$

e quindi

$$\boldsymbol{v} = 5t\boldsymbol{e}_2 - t\boldsymbol{e}_3 + 2t\boldsymbol{e}_4$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

Pertanto una base di $E \cap F$ è data dal vettore $5\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4$. $\triangle$

18.3 Somma diretta di sottospazi

Nel paragrafo precedente abbiamo visto qualche esempio di somma di sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V. In qualche caso un vettore di $E + F$ si può scrivere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in modi diversi (ad esempio la matrice B dell'esercizio di base 18.13: si consiglia di risolvere l'esercizio e di controllarne la soluzione se non lo si è ancor fatto). Se consideriamo invece l'esempio 18.14 è facile vedere che ogni vettore di $V^2(O)$ si può esprimere in un unico modo come somma di un vettore di E e di un vettore di F.

Esempio 18.23 Siano dati due piani distinti passanti per l'origine π e σ dello spazio. Consideriamo il sottospazio E di $V^3(O)$ formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ con il punto A appartenente al piano π e consideriamo il sottospazio F di $V^3(O)$ formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ con A il punto A appartenente al piano σ. Consideriamo ora un vettore non nullo $\overrightarrow{OA}$ che appartenga all'intersezione di E ed F: ciò significa che A appartiene sia a π che a σ, vale a dire che A giace sulla retta r intersezione di π e σ. In particolare notiamo che $\overrightarrow{OA}$ appartiene a $E + F$. Mostriamo ora che $\overrightarrow{OA}$ si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in due modi diversi. Infatti

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \mathbf{0},$$

con il primo addendo appartenente ad E e il secondo addendo appartenente a F. Possiamo però anche scrivere:

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA}$$

con il primo addendo appartenente a E e il secondo addendo appartenente a F. Poiché $\overrightarrow{OA}$ è diverso dal vettore nullo queste due espressioni sono diverse. $\triangle$

Dati due sottospazi vettoriali E ed F di uno spazio vettoriale V, è allora interessante cercare di capire quando ci troviamo nel caso in cui un vettore di $E + F$ può essere espresso come somma di un vettore di E e di un vettore di F in un unico modo oppure no. Se analizziamo bene l'esempio 18.23 vediamo che può essere adattato a dei sottospazi vettoriali generici E e F con intersezione non nulla. Dunque, se l'intersezione $E \cap F$ contiene un vettore diverso da $\mathbf{0}$, allora esistono vettori di $E + F$ che si possono scrivere come somme di un vettore di E e di un vettore di F in modi diversi.

Esercizio di base 18.24 Provare questa affermazione. Siano cioè E ed F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V e sia $E \cap F \neq \{\mathbf{0}\}$ (vale a dire che in $E \cap F$ c'è qualche vettore non nullo). Mostrare che esiste un vettore di $E + F$ che si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in più di un modo.

Chi volesse cimentarsi in un esercizio un po' più difficile può provare a dimostrare che **ogni** vettore di $E + F$ si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in più di un modo.

Se allora vogliamo che ogni vettore di $E + F$ si possa esprimere in un sol modo come somma di un vettore di E e di un vettore di F dobbiamo necessariamente richiedere che l'intersezione di E e F contenga il solo vettore nullo. Questa condizione è anche sufficiente. Abbiamo infatti il:

Teorema 18.25 *Siano E ed F due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ allora ogni vettore di $E + F$ si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in un unico modo. In altri termini, se $\boldsymbol{w}$ è un vettore di $E + F$ e si ha*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

con $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$ e

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1$$

con $\boldsymbol{u}_1 \in E$ e $\boldsymbol{v}_1 \in F$, allora deve necessariamente essere $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$.

Dimostrazione Supponiamo che

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1$$

con $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}_1$ in E e $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_1$ in F. Dalla relazione precedente otteniamo facilmente che:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}.$$

Indichiamo con $\boldsymbol{z}$ il vettore $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1$. Dunque $\boldsymbol{z} \in E$ perché è differenza di due vettori di E. D'altra parte $\boldsymbol{z} \in F$ perché è uguale a $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$, cioè è differenza di due vettori di F. Pertanto $\boldsymbol{z} \in E \cap F$. Per ipotesi sappiamo che l'intersezione di E e F contiene solo il vettore nullo. Dunque $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$. Ma allora $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$, cioè $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, cioè $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$. ■

Il risultato precedente suggerisce la:

Definizione 18.26 Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V diciamo che la somma $E + F$ è **diretta** se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$. In tal caso utilizziamo il simbolo $E \oplus F$ per indicare la somma $E + F$. △

Osserviamo che le somme date nell'esercizio di base 18.13 e nell'esempio 18.23 non sono dirette mentre la somma data nell'esempio 18.14 è diretta.

Come caso particolare della formula di Grassmann abbiamo la:

Proposizione 18.27 *Se E e F sono due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V tali che la somma $E + F$ sia diretta, allora:*

$$\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F.$$

Esercizio di base 18.28 Sia π un piano dello spazio passante per l'origine e sia r una retta dello spazio passante per l'origine. Sia E il sottospazio di $V^3(O)$ formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ con $A \in \pi$ e sia F il sottospazio di $V^3(O)$ formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$. A seconda della posizione reciproca di π e r determinare $E + F$, e stabilire quando la somma $E + F$ è diretta.

Esercizio di base 18.29 Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensioni rispettive 2 e 3 di uno spazio vettoriali V di dimensione 4. Stabilire se la somma di E e F può essere diretta. Determinare poi che valori può assumere la dimensione dell'intersezione $E \cap F$: in corrispondenza di ciascuno di tali valori determinare la dimensione della somma $E + F$.

Diamo ora la:

Definizione 18.30 Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Diciamo che E e F sono **supplementari** in V se $V = E \oplus F$. Devono cioè essere soddisfatte le due condizioni:

- $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$;
- $E + F = V$. $\triangle$

Osservazione 18.31 Se E ed F sono sottospazi supplementari in uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora, per la formula di Grassmann, si ha $\dim E + \dim F = \dim V$. $\triangle$

Come semplice conseguenza abbiamo la:

Proposizione 18.32 *Siano E ed F sottospazi supplementari in uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Se $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r$ formano una base per E e $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ formano una base per F, allora $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ formano una base per V.*

DIMOSTRAZIONE Grazie alla proposizione 18.17 sappiamo che $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ generano $E + F$, cioè V. D'altra parte, dall'osservazione 18.31 sappiamo che V ha dimensione uguale a $\dim E + \dim F$, cioè a $r + s$. Per il teorema 17.24, gli $r + s$ generatori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ formano una base per V. ■

Osservazione 18.33 Supponiamo di voler stabilire se due sottospazi vettoriali E e F sono supplementari in un sottospazio vettoriale V di dimensione finita. Potremmo ovviamente controllare se entrambe le condizioni che definiscono il concetto di sottospazi supplementari sono verificate.

Possiamo però anche operare in altro modo. Calcoliamo innanzitutto la dimensione di E e di F: se risulta $\dim E + \dim F \neq \dim V$, grazie all'osservazione precedente, possiamo senz'altro dire che E e F non sono supplementari in V. Se, invece, $\dim E + \dim F = \dim V$, dalla formula di Grassmann otteniamo che $\dim V = \dim(E + F) + \dim(E \cap F)$. In tal caso abbiamo allora che $\dim(E + F) = \dim V$ se e solo se $\dim(E \cap F) = 0$, cioè $E + F = V$ se e solo se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$. È dunque sufficiente verificare una sola delle due condizioni che definiscono il concetto di sottospazi supplementari: se questo è vero anche l'altra condizione sarà automaticamente soddisfatta. $\triangle$

Possiamo anche invertire la proposizione 18.32:

Teorema 18.34 *Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Sia $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r$ una base per E e sia $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ una base per F. Se $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ formano una base per V, allora E e F sono supplementari in V.*

DIMOSTRAZIONE Poiché il sottospazio E ha una base formata da r vettori, sappiamo che E ha dimensione r. Analogamente F ha dimensione s e V ha dimensione $r+s$. Dunque $\dim V = \dim E + \dim F$. Grazie all'osservazione 18.33 è ora sufficiente dimostrare che $V = E + F$. Dalla proposizione 18.17 sappiamo che i vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ generano $E + F$: ma, per ipotesi, tali vettori formano una base di V (in particolare generano V) e, pertanto, $V = E + F$. ■

Corollario 18.35 *Sia E un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Esiste allora un sottospazio F supplementare di E in V.*

Dimostrazione Se $E = \{\mathbf{0}\}$ allora prendiamo $F := V$. Se $E = V$ prendiamo invece $F := \{\mathbf{0}\}$.

Consideriamo infine il caso in cui $E \neq \{\mathbf{0}\}$ e $E \neq V$. Scelta una base per E formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_r$, usando il lemma 17.15, completiamo tale base a una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_{r+1}$, $\boldsymbol{e}_{r+2}$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ (con $n = \dim V$. Per il teorema 18.34, il sottospazio F generato da $\boldsymbol{e}_{r+1}$, $\boldsymbol{e}_{r+2}$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ è allora un supplemento di E in V. ■

Consideriamo alcuni esempi riprendendo quelli già considerati nel corso di questo capitolo:

Esempio 18.36 Nell'esempio 18.14 abbiamo visto che date due rette distinte del piano r e s passanti per O, si ha che $E+F = V^2(O)$ dove $E = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in r\}$ e $F = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in s\}$. Si vede inoltre facilmente che $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$. Dunque $V^2(O) = E \oplus F$, cioè E ed F sono supplementari in $V^2(O)$. △

Esempio 18.37 Consideriamo due rette distinte dello spazio r e s passanti per O, e siano $E = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in r\}$ e $F = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in s\}$. Poiché E e F hanno entrambe dimensione 1, si ha $\dim E + \dim F \neq \dim V^3(O)$. Dunque E ed F non sono supplementari in $V^3(O)$. △

Esempio 18.38 Utilizzando la stessa notazione dell'esercizio di base 18.28 abbiamo visto che se r non giace su π allora $V^3(O) = E \oplus F$. Dunque E e F sono supplementari in $V^3(O)$. △

Notiamo che se nell'esempio precedente prendiamo al posto della retta r un'altra retta s che non giace sul piano troviamo un altro sottospazio F' supplementare di E. Dunque, in generale, un sottospazio E di uno spazio vettoriale V può essere supplementare in V di sottospazi vettoriali F diversi.

Esempio 18.39 Consideriamo $E := \{(x, y, z, w) \mid 2x - y + z + 3w = 0\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Vogliamo determinare un sottospazio F supplementare di E in $\mathbb{R}^4$. Poiché E è definito come l'insieme delle soluzioni di una singola equazione omogenea non banale in 4 incognite, la sua dimensione è $4 - 1 = 3$. Pertanto, un sottospazio supplementare di E in $\mathbb{R}^4$ deve avere dimensione $4 - 3 = 1$. Consideriamo allora un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1. Grazie all'osservazione 18.33, è sufficiente trovare un sottospazio F di dimensione 1 e tale che $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$: in tal caso la condizione $E + F = \mathbb{R}^4$ sarà automaticamente soddisfatta.

Sia allora $\boldsymbol{v}$ un vettore non nullo e sia F il sottospazio vettoriale generato da $\boldsymbol{v}$. Se $\boldsymbol{v} \in E$ allora $F \leq E$ e, quindi, $E \cap F = F \neq \{\mathbf{0}\}$. Se, invece, $\boldsymbol{v} \notin E$ allora $E \cap F$ non contiene $\boldsymbol{v}$ ed è, dunque, contenuto strettamente in F: in tal caso $\dim(E \cap F) < \dim F = 1$, cioè $\dim(E \cap F) = 0$. È dunque sufficiente scegliere un vettore $\boldsymbol{v}$ che non sta in E (cioè tale che le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce E) e prendere il sottospazio vettoriale F generato da esso: possiamo, ad esempio, scegliere $\boldsymbol{v} := (1, 0, 0, 0)$. Ovviamente questa non è l'unica scelta possibile. △

Esempio 18.40 Consideriamo il sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $\boldsymbol{u} := (1, 2, 0)$. Vogliamo determinare un sottospazio F supplementare di E in $\mathbb{R}^3$. Poiché E ha, chiaramente, dimensione 1, il sottospazio F che stiamo cercando dovrà avere dimensione $3 - 1 = 2$. Per l'osservazione 18.33 è sufficiente trovare un sottospazio F di dimensione 2 tale che $E + F = \mathbb{R}^3$: in tal caso la condizione $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ sarà automaticamente soddisfatta. Supponiamo allora che $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ formino una base per F. Per la proposizione 18.17, la somma $E + F$ sarà generata da $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Affinché tale somma coincida con $\mathbb{R}^3$ è quindi necessario e sufficiente che tali vettori formino una base per $\mathbb{R}^3$. Iniziamo allora a scegliere un vettore $\boldsymbol{v}$ tali che $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ siano linearmente indipendenti: poiché $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ è sufficiente scegliere $\boldsymbol{v}$ che non sia multiplo di $\boldsymbol{u}$; possiamo ad esempio prendere $\boldsymbol{v} := (1, 0, 0)$. Scegliamo ora $\boldsymbol{w}$ in modo tale che $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ siano linearmente indipendenti. Se $\boldsymbol{w} := (x, y, z)$, ciò è equivalente a richiedere che la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ rispetto alla base canonica, abbia determinante diverso da 0. Poiché $\det A = -2z$, possiamo, ad esempio, prendere come vettore $\boldsymbol{w}$ il vettore $(0, 0, 1)$. Dunque il sottospazio vettoriale F generato da $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ è supplementare di E. Ovviamente questa non è l'unica scelta possibile. △

Nota 18.41 Se nell'esempio 18.40 ci fossimo limitati a scegliere 2 vettori linearmente indipendenti che non appartengono a E, questi avrebbero generato un sottospazio vettoriale di dimensione 2 che non era necessariamente supplementare di E. Prendiamo, ad esempio, il sottospazio F generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Questi sono linearmente indipendenti e non appartengono a E (infatti non sono multipli di $(1, 2, 0)$. Tuttavia il sottospazio E e il sottospazio F non sono supplementari; infatti $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sono linearmente dipendenti e, quindi, non generano tutto $\mathbb{R}^3$. △

18.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.18.5 Consideriamo una generica matrice A dello spazio vettoriale $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora A appartiene a E se e solo se $a_{22} = 0$ e $a_{12} = a_{21}$. La matrice A appartiene a F se e solo se $a_{22} = 0$ e $a_{11} = a_{21}$. In conclusione A appartiene sia a E sia a F se e solo se $a_{22} = 0$ e $a_{12} = a_{21} = a_{11}$, cioè:

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

EB.18.6 Per determinare $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ dobbiamo determinare le matrici di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ che sono contemporaneamente triangolari superiori e inferiori. Sappiamo che una matrice $A = \big(a_{ij}\big)$ è triangolare superiore se e solo se tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli, vale a dire se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni coppia (i, j) tale che $i > j$. Analogamente $A = \big((a_{ij}\big)$ è triangolare inferiore se e solo se tutti i suoi elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli, vale a dire se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni coppia (i, j) tale che $i < j$. Ma allora A è contemporaneamente triangolare inferiore e superiore se e solo se tutti i suoi elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli, vale a dire se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni coppia (i, j) tale che $i \neq j$. Pertanto A è contemporaneamente triangolare inferiore e superiore se e solo se è una matrice diagonale, vale a dire $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) = \mathrm{D}(n, \mathbb{R})$.

EB.18.11 Sia $\boldsymbol{w}$ un vettore di $E + E$: allora esistono $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in E tali che $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Dunque $\boldsymbol{w}$ è somma di due vettori di E: poiché E è un sottospazio vettoriale di V ciò significa che $\boldsymbol{w}$ è un vettore di E. Dunque ogni vettore di $E + E$ è un vettore di E, vale a dire $E + E \subseteq E$. D'altra parte sappiamo già che $E + E$ contiene E (si veda l'osservazione 18.10). Pertanto $E + E = E$.

EB.18.13 La matrice A appartiene ad $E + F$ se e solo se esiste una matrice M in E e una matrice N in F tali che $A = M + N$. Consideriamo una generica matrice di M di E:
$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$
e una generica matrice N di F:
$$N := \begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix}.$$
Calcoliamo la somma $M + N$:
$$M + N = \begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix}.$$
Imponiamo che la somma $M + N$ sia uguale ad A:
$$\begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vediamo allora che A appartiene ad $E + F$ se e solo se esistono numeri reali a, b, a' e b' tali che $a + a' = 1$, $b + a' = 1$, $b + a' = 0$ e $b' = 0$. Si vede facilmente che ciò non è possibile (le condizioni $b + a' = 1$ e $b + a' = 0$ sono in contraddizione) e, pertanto la matrice A non appartiene a $E + F$.

Con analogo ragionamento vediamo che la matrice B appartiene a $E + F$ se e solo se esistono numeri reali a, b, a' e b' tali che $a + a' = 3$, $b + a' = 2$, $b + a' = 2$ e $b' = 1$. Si può facilmente verificare che queste condizioni sono compatibili (anche senza determinare esplicitamente i numeri reali a, b, a' e b': basta imporre la condizione di Rouché-Capelli al sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, a' e b'): dunque la matrice B appartiene a $E + F$. Ad esempio la matrice B può essere espressa come somma di una matrice di E e di una matrice di F nel modo seguente:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Sottolineiamo come la matrice B potrebbe essere ottenuta come somma di una matrice di E e di una matrice di F anche in modi diversi da questo. Ad esempio:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EB.18.15 Consideriamo un vettore non nullo $\boldsymbol{u}$ di E: dal teorema 12.9 sappiamo che l'insieme dei multipli di $\boldsymbol{u}$ coincide con l'insieme dei vettori $\overrightarrow{OA}$ con $A \in r$, vale a dire con E. Dunque
$$E = \{k\boldsymbol{u} \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente se $\boldsymbol{v}$ è un vettore non nullo di F, abbiamo che F coincide con l'insieme dei multipli di $\boldsymbol{v}$. Dunque

$$F = \{k\boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto $E + F$ è l'insieme dei vettori che sono somma di un multiplo di $\boldsymbol{u}$ e di un multiplo di $\boldsymbol{v}$, vale a dire dei vettori del tipo:

$$k\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{v}$$

al variare di h e k in $\mathbb{R}$ (si noti che i coefficienti h di $\boldsymbol{u}$ e k di $\boldsymbol{v}$ variano in maniera indipendente). In altre parole $E + F$ è l'insieme delle combinazioni lineari di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Per il teorema 12.11, abbiamo allora $E + F = V^2(O)$.

EB.18.24 Se scegliamo un vettore non nullo $\boldsymbol{z}$ in $E \cap F$, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} + \mathbf{0}$$

e

$$\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{z} + 2\boldsymbol{z}.$$

In entrambe queste somme il primo addendo è un elemento di E e il secondo addendo è un elemento di F.

Vogliamo ora mostrare che **ogni** vettore di $E + F$ si può esprimere in modi diversi come somma di un vettore di E e di un vettore di F. Sia allora $\boldsymbol{w}$ un qualsiasi vettore di $E + F$. Esistono allora $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in E$ tali che $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Sia adesso $\boldsymbol{z}$ un vettore non nullo di $E \cap F$. Il vettore $\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z}$ è un vettore di E perché somma di due vettori di E. Notiamo inoltre che $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{u}$. Analogamente il vettore $\boldsymbol{v}_1 := \boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}$ è un vettore di F diverso da $\boldsymbol{v}$. Possiamo allora scrivere:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1,$$

e abbiamo, dunque, una diversa espressione di $\boldsymbol{w}$ come somma di un vettore di E e di un vettore di F.

EB.18.28 Iniziamo a considerare il caso in cui r giace nel piano π. In tal caso $F \subseteq E$. Pertanto $E + F = E$ e $E \cap F = F$: la somma $E + F$ non è diretta.

Consideriamo ora il caso in cui la retta r non giace nel piano π, cioè incide il piano π nell'origine: in tal caso un vettore $\overrightarrow{OA}$ appartiene all'intersezione di E con F se e solo se A appartiene sia a π che a r, cioè se e solo se $A = O$. Dunque l'intersezione di E e di F è ridotta al solo vettore nullo. Dunque la somma $E + F$ è diretta. Sappiamo che $\dim E = 2$ e $\dim F = 1$: dalla formula di Grassmann segue che $\dim(E + F) = 2 + 1 - 0 = 3$. Poiché $V^3(O)$ ha dimensione 3 ciò significa che $E + F = V^3(O)$.

Dal momento che abbiamo già osservato che la somma $E + F$ è diretta possiamo scrivere $V^3(O) = E \oplus F$.

EB.18.29 Se la somma $E + F$ fosse diretta, dovremmo avere

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 0 = 5,$$

il che non è possibile perché $E + F$ è un sottospazio di V, che ha dimensione 4. Dunque la somma $E + F$ non può essere diretta. Pertanto $E \cap F$ ha dimensione almeno 1. D'altra parte $E \cap F$ è un sottospazio tanto di E quanto di F, e, quindi, $\dim(E \cap F)$ è minore o uguale sia della dimensione di E (cioè 2) che della dimensione di F (cioè 3). Dunque $\dim(E \cap F) \leq 2$. I valori possibili per $\dim(E \cap F)$ sono dunque 1 e 2.

Se $\dim(E \cap F) = 1$ allora

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Se infine $\dim(E \cap F) = 2$ allora

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 2 = 3.$$

18.5 Sunto

Intersezione di sottospazi vettoriali

Teorema *L'intersezione $E \cap F$ di due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.*

Osservazione L'intersezione $E \cap F$ di due sottospazi vettoriali E e F è un sottospazio vettoriale sia di E che di F. △

Osservazione Se E e F sono due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale allora anche l'intersezione $E \cap F$ ha dimensione finita e si ha $\dim(E \cap F) \leq \dim E$ e $\dim(E \cap F) \leq \dim F$. △

Somma di sottospazi vettoriali

In generale, l'unione $E \cup F$ di due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V non è detto che sia un sottospazio di V.

Definizione Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V la **somma** di E e di F è il sottoinsieme di V formato da tutte le somme del tipo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$. Indichiamo con il simbolo $E + F$ tale insieme. Abbiamo dunque:

$$E + F = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in F\}.$$ △

Osservazione La somma di due sottospazi $E + F$ contiene sia E sia F. △

Teorema *La somma $E + F$ di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V. Se U è un sottospazio vettoriale di V contenente sia E sia F allora U contiene $E + F$.*

Proposizione *Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V (quest'ultimo non necessariamente di dimensione finita). Allora $E + F$ ha dimensione finita.*

In particolare, se $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ formano una base di E e $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_q$ formano una base di F, allora i vettori $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_q$ generano $E + F$ (ma non formano necessariamente una base di $E + F$).

Teorema (Formula di Grassmann) *Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V (quest'ultimo non necessariamente di dimensione finita). Vale allora la formula:*

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

Somma diretta di sottospazi

Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V, se l'intersezione $E \cap F$ contiene vettori non nulli allora ogni vettore della somma $E + F$ si può esprimere in più di un modo come somma di un vettore di E e di un vettore di F.

Definizione Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V diciamo che la somma $E + F$ è **diretta** se $E \cap F = \{\boldsymbol{0}\}$. In tal caso utilizziamo il simbolo $E \oplus F$ per indicare la somma $E + F$. △

Teorema *Siano E ed F due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Se la somma $E+F$ è diretta allora ogni vettore di $E+F$ si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F in un unico modo. In altri termini, se $\boldsymbol{w}$ è un vettore di $E+F$ e si ha*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

con $\boldsymbol{u} \in E$ e $\boldsymbol{v} \in F$ e

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1$$

con $\boldsymbol{u}_1 \in E$ e $\boldsymbol{v}_1 \in F$, allora deve necessariamente essere $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$.

Proposizione *Se E e F sono due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V tali che la somma $E+F$ sia diretta, allora:*

$$\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F.$$

Definizione Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Diciamo che E e F sono **supplementari** in V se $V = E \oplus F$. Devono cioè essere soddisfatte le due condizioni:

- $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$;
- $E + F = V$. △

Osservazione Se E ed F sono sottospazi supplementari in uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora, per la formula di Grassmann, si ha $\dim E + \dim F = \dim V$. △

Teorema *Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r$ una base per E e sia $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ una base per F. I vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_s$ formano una base per V se e solo se E e F sono supplementari in V.*

Corollario *Sia E un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Esiste allora un sottospazio F supplementare di E in V.*

18.6 Esercizi

E.18.1 Determinare $\mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}(n,\mathbb{R})$, dove $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{A}(n,\mathbb{R})$ indicano, rispettivamente, i sottospazi vettoriali delle matrici simmetriche e delle matrici antisimmetriche di $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$.

E.18.2 Verificare che $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) = \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) + \mathrm{A}(2,\mathbb{R})$. La somma è diretta? Chi volesse provare qualcosa di più difficile può verificare la stessa proprietà utilizzando matrici di ordine n qualsiasi.

E.18.3 Determinare la somma $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) + \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ e stabilire se tale somma è diretta. Può essere di aiuto considerare prima il caso $n=2$.

E.18.4 Si considerino i sottospazi vettoriali $E := \{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$ e $F := \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ a & b \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\}$ di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Stabilire per ciascuna delle matrici seguenti se appartiene o meno ad $E+F$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E.18.5 Si considerino i sottospazi E e F di $\mathbb{R}^4$ così definiti:

$$E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0\},$$
$$F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Stabilire se i vettori $(1,3,1,0)$ e $(1,0,1,-2)$ appartengono a $E+F$.

E.18.6 Determinare per ciascuna delle seguenti coppie di sottospazi vettoriali E ed F la loro intersezione e la loro somma.

a. Il sottospazio vettoriale $E := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\}$ e il sottospazio vettoriale $F := \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & c \\ a & 0 \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\}$ di $\mathrm{M}(3,2,\mathbb{R})$;

b. i sottospazi $E := \{(x,y) \mid y = 3x\}$ e $F := \{(x,y) \mid x = y\}$ di $\mathbb{R}^2$.

E.18.7 Determinare in quale dei seguenti casi la somma dei sottospazi E e F di $\mathbb{R}^3$ è diretta:

a. $E := \{(x,y,z) \mid x+y=0\}$, $F := \{(x,y,z) \mid y+z=0\}$;

b. $E := \{(x,y,z) \mid x+y=0\}$, $F := \langle(1,3,1)\rangle$;

c. $E := \{(x,y,z) \mid x-z=0\}$, $F := \langle(1,3,1)\rangle$;

d. $E := \{(x,y,z) \mid x+y=0\}$, $F := \langle(1,1,0),(2,1,1)\rangle$;

e. $E := \{(x,y,z) \mid x+y=y-z=0\}$, $F := \langle(1,1,1)\rangle$;

f. $E := \{(x,y,z) \mid x-y=y-z=0\}$, $F := \langle(1,1,1)\rangle$;

g. $E := \langle(1,3,1),(1,2,0)\rangle$, $F := \langle(2,1,1)\rangle$;

h. $E := \langle(1,3,1),(-1,2,0)\rangle$, $F := \langle(2,1,1)\rangle$.

E.18.8 In ciascuno dei casi dell'esercizio E.18.7 stabilire se i sottospazi vettoriali E e F sono supplementari in $\mathbb{R}^3$.

E.18.9 Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1 := (2,1,3,1)$, $\boldsymbol{u}_2 := (1,0,2,0)$ e $\boldsymbol{u}_3 := (4,2,6,2)$ e sia V il sottospazio generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,0,2,1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1,1,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (2,1,3,0)$ e $\boldsymbol{v}_4 := (1,-1,0,0)$. Determinare una base per U e la sua dimensione, e una base per V e la sua dimensione. Determinare poi una base per l'intersezione di $U \cap V$ e una base per $U+V$.

E.18.10 Siano U e V i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ definiti da:

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 0, x_2 - x_4 = 0\}, \\ V &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + 3x_2 + x_5 = 0, x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Determinare una base per U e la sua dimensione, e una base per V e la sua dimensione. Determinare poi una base per l'intersezione di $U \cap V$ e una base per $U + V$.

E.18.11 Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{u} := (1, 0, 2, 0)$ e $\boldsymbol{v} := (0, 3, 0, 2)$. Determinare una base di un sottospazio F supplementare di E in $\mathbb{R}^4$.

E.18.12 Siano dati i sottospazi $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ ed $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ in $\mathbb{R}^5$. Determinare una base per un sottospazio G supplementare di $E \cap F$ in F.

18.7 Soluzioni degli esercizi

E.18.1 Una matrice A appartiene sia a $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ che a $\mathrm{A}(n, \mathbb{R})$ se $A = {}^tA$ e ${}^tA = -A$. Dunque $A = -A$: ma allora $A = 0$. Pertanto $\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{A}(n, \mathbb{R})$ è il sottospazio banale formato dalla sola matrice nulla.

E.18.2 Dobbiamo mostrare che data una qualsiasi matrice:

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ allora esistono una matrice simmetrica S e una matrice antisimmetrica A tali che $M = S + A$. Consideriamo allora una generica matrice simmetrica

$$S := \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

e una generica matrice antisimmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamone la somma:

$$S + A = \begin{pmatrix} x & y + t \\ y - t & z \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che esistono x, y, z e t tali che:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y + t \\ y - t & z \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che deve allora essere $x = a$, $z = d$, $y = \frac{b+c}{2}$, $t = \frac{b-c}{2}$. Dunque M è somma della matrice simmetrica:

$$S := \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$$

e della matrice antisimmetrica:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) = \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) + \mathrm{A}(2,\mathbb{R})$. Questa somma è diretta perché abbiamo dimostrato nell'esercizio E.18.1 che $\mathrm{S}(2,\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}(2,\mathbb{R}) = \{0\}$.

Consideriamo ora il caso in cui abbiamo a che fare con matrici di ordine n qualsiasi. Sia M una matrice di $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$. Dobbiamo trovare una matrice simmetrica S e una matrice antisimmetrica A tali che $M = S + A$. Consideriamo ora le matrici $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ e $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Chiaramente si ha $M = S + A$. Mostriamo che S è simmetrica, vale a dire che $S = {}^tS$. Si ha:

$$^tS = \frac{1}{2}{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^{tt}M) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S.$$

Verifichiamo ora che A è antisimmetrica, vale a dire che $A = {}^tA$. Si ha:

$$^tA = \frac{1}{2}{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^{tt}M) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A.$$

Dunque $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R}) = \mathrm{S}(n,\mathbb{R}) + \mathrm{A}(n,\mathbb{R})$: sapevamo già che $\mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}(n,\mathbb{R}) = \{0\}$ e, dunque, possiamo affermare che $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R}) = \mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}(n,\mathbb{R})$.

E.18.3 Possiamo subito escludere che la somma sia diretta perché sappiamo che $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ è formato dalle matrici diagonali e, dunque, esistono matrici non nulle in $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \cap \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$.

Mostriamo ora che ogni matrice di $\mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$ si può esprimere come somma di una matrice triangolare superiore e di una matrice triangolare inferiore. Infatti consideriamo la generica matrice quadrata di ordine n:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vediamo allora che si ha:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ovviamente questa decomposizione non è unica.

E.18.4 Vediamo se la matrice A può essere espressa come somma di una matrice di E e di una matrice di F:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b' \\ a' & b' \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b' \\ b+a' & b' \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così le condizioni $a = 1$, $a + b' = 3$, $b + a' = 4$ e $b' = 2$. Si vede facilmente che queste condizioni sono compatibili e quindi che $A \in E + F$.

Vediamo ora se la matrice B può essere espressa come somma di una matrice di E e di una matrice di F:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b' \\ a' & b' \end{pmatrix},$$

cioè
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b' \\ b+a' & b' \end{pmatrix}.$$
Abbiamo così le condizioni $a = 2$, $a + b' = 0$, $b + a' = 0$ e $b' = -2$. Si vede facilmente che queste condizioni sono compatibili e quindi che $B \in E + F$.

Infine, vediamo se la matrice C può essere espressa come somma di una matrice di E e di una matrice di F:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b' \\ a' & b' \end{pmatrix},$$
cioè
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b' \\ b+a' & b' \end{pmatrix}.$$
Abbiamo così le condizioni $a = 1$, $a + b' = 0$, $b + a' = 2$ e $b' = 1$. Si vede facilmente che queste condizioni non sono compatibili e quindi che $C \notin E + F$.

E.18.5 Per verificare se $(1, 3, 1, 0)$ appartiene a $E+F$ dobbiamo verificare se $(1, 3, 1, 0)$ si può esprimere come somma di un vettore di E e di un vettore di F. Consideriamo allora un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di E: sappiamo che $x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0$ e, dunque, possiamo scrivere così questo vettore: $(x_1, x_2, -x_1, -x_2)$. Analogamente possiamo scrivere così il generico vettore di F: $(y_1, -y_1, y_3, -y_3)$. Imponiamo che la somma di questi vettori sia uguale al vettore $(1, 3, 1, 0)$:
$$(1, 3, 1, 0) = (x_1, x_2, -x_1, -x_2) + (y_1, -y_1, y_3, -y_3).$$
Il vettore $(1, 3, 1, 0)$ appartiene a $E + F$ se e solo se è risolubile il sistema:
$$\begin{cases} x_1 \quad + y_1 = 1 \\ x_2 - y_1 = 3 \\ -x_1 \quad + y_3 = 1 \\ -x_2 \quad - y_3 = 0 \end{cases}.$$
Svolgendo i calcoli si vede che il sistema non è risolubile e, quindi, $(1, 3, 1, 0)$ non appartiene a $E + F$. Analogamente per verificare se $(1, 0, 1, -2)$ appartiene a $E + F$ si arriva a considerare il sistema:
$$\begin{cases} x_1 \quad + y_1 = 1 \\ x_2 - y_1 = 0 \\ -x_1 \quad + y_3 = 1 \\ -x_2 \quad - y_3 = -2 \end{cases}.$$
Svolgendo i calcoli si vede che il sistema è risolubile e, quindi, $(1, 0, 1, -2)$ appartiene a $E + F$.

E.18.6

a. Consideriamo una generica matrice $A := \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathrm{M}(3, 2, \mathbb{R})$. La matrice A appartiene a E se e solo se $a_{22} = 0$, $a_{31} = 0$ e $a_{32} = 0$. La matrice B appartiene a F se $a_{11} = 0$ e $a_{22} = 0$. Dunque A appartiene a $E \cap F$ se e solo se $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 0$ e $a_{32} = 0$. Pertanto:
$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{12} \in \mathbb{R}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Calcoliamo ora la somma dei sottospazi E ed F. Calcoliamone preliminarmente la dimensione. Notiamo che E ha dimensione 3 e F ha dimensione 4 mentre $E \cap F$ ha dimensione 2 (basta in ogni caso contare i parametri utilizzati per descrivere ciascun sottospazio). Per la formula di Grassmann abbiamo allora $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 4 - 2 = 5$.

Consideriamo delle generiche matrici $A := \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ di E e $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & c' \\ a' & 0 \\ b' & d' \end{smallmatrix}\right)$ di F e facciamone la somma:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c' \\ a' & 0 \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c+c' \\ b+a' & 0 \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

Notiamo che tutte le matrici di $E + F$ appartengono al sottospazio

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le matrici di G dipendono da 5 parametri: pertanto $\dim G = 5$. Poiché sapevamo già che $E + F$ ha dimensione 5, ne consegue che $G = E + F$.

b. Un vettore (x, y) appartiene sia ad E che ad F se $y = 3x$ e $x = y$. Queste condizioni implicano che $x = 0$ e $y = 0$: pertanto $E \cap F = \{(0,0)\}$. Dalla formula di Grassmann ricaviamo allora $\dim(E + F) = \dim E + \dim F$. Sia E che F sono l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di un'equazione in 2 incognite. Pertanto E e F hanno dimensione $2 - 1 = 1$. Pertanto $\dim(E + F) = 2$ e $E + F$ deve per forza coincidere con $\mathbb{R}^2$.

E.18.7 Dobbiamo in ciascun caso determinare l'intersezione dei sottospazi coinvolti.

a. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se si ha $x + y = 0$ e $y + z = 0$. Risolvendo il sistema dato da queste due equazioni si trova $E \cap F = \{(-t, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Dunque $E \cap F$ contiene vettori non nulli: la somma $E + F$ non è diretta.

b. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se si ha $x + y = 0$ e (x, y, z) è multiplo di $(1, 3, 1)$. Troviamo allora i multipli di $(1, 3, 1)$ (cioè i vettori di F) che appartengono a E. Un multiplo di $(1, 3, 1)$ può scriversi come $h(1, 3, 1) = (h, 3h, h)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $h + 3h = 0$, cioè se solo se $h = 0$. Ma allora l'unico vettore di $E \cap F$ è il vettore $0(1, 3, 1)$, cioè il vettore nullo. Dunque la somma $E + F$ è diretta.

c. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se si ha $x - z = 0$ e (x, y, z) è multiplo di $(1, 3, 1)$. Troviamo allora i multipli di $(1, 3, 1)$ (cioè i vettori di F) che appartengono a E. Un multiplo di $(1, 3, 1)$ può scriversi come $h(1, 3, 1) = (h, 3h, h)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $h - h = 0$, cioè qualunque sia h. Ma allora i vettori di $E \cap F$ sono tutti i multipli di $(1, 3, 1)$: in particolare $E \cap F$ contiene vettori non nulli. Dunque la somma $E + F$ non è diretta.

d. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se $x + y = 0$ e (x, y, z) è combinazione lineare di $(1, 1, 0)$ e $(2, 1, 1)$. Troviamo allora le combinazioni lineari di $(1, 1, 0)$ e $(2, 1, 1)$ (cioè i vettori di F) che appartengono a E. Una combinazione lineare di $(1, 1, 0)$ e $(2, 1, 1)$ può scriversi come $h(1, 1, 0) + k(2, 1, 1) = (h + 2k, h + k, k)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $h + 2k + h + k = 0$, cioè se solo se $h = -\frac{3}{2}k$. Ma allora $E \cap F = \left\{\left(\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$. Dunque $E \cap F$ contiene vettori non nulli: la somma $E + F$ non è diretta.

e. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se si ha $x + y = 0$ e $y - z = 0$ e (x, y, z) è multiplo di $(1, 1, 1)$. Troviamo allora i multipli di $(1, 1, 1)$ (cioè i vettori di F)

che appartengono a E. Un multiplo di $(1, 1, 1)$ può scriversi come $h(1, 1, 1) = (h, h, h)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $h + h = 0$ e $h - h = 0$, cioè se e solo se $h = 0$. Ma allora l'unico vettore di $E \cap F$ è il vettore $0(1, 1, 1)$, cioè il vettore nullo. Dunque la somma $E + F$ è diretta.

f. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo se si ha $x - y = 0$ e $y - z = 0$ e (x, y, z) è multiplo di $(1, 1, 1)$. Troviamo allora i multipli di $(1, 1, 1)$ (cioè i vettori di F) che appartengono a E. Un multiplo di $(1, 1, 1)$ può scriversi come $h(1, 1, 1) = (h, h, h)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $h - h = 0$ e $h - h = 0$: queste due relazioni sono vere per ogni valore di h. Pertanto $E \cap F$ contiene tutti i multipli di $(1, 1, 1)$: la somma $E + F$ non è diretta.

g. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo è combinazione lineare di $(1, 3, 1)$ e $(1, 2, 0)$ ed è multiplo di $(2, 1, 1)$. Supponiamo allora che sia

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= h(1, 3, 1) + k(1, 2, 0),\\ (x, y, z) &= l(2, 1, 1).\end{aligned}$$

Ma allora si ha

$$h(1, 3, 1) + k(1, 2, 0) = l(2, 1, 1),$$

cioè

$$(h + k, 3h + 2k, h) = (2l, l, l).$$

Otteniamo allora un sistema nelle incognite h, k e l:

$$\begin{cases} h + k = 2l \\ 3h + 2k = l \\ h = l \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $h = 0$, $k = 0$, $l = 0$. dunque l'unico vettore di $E \cap F$ è il vettore $0(2, 1, 1)$, cioè il vettore nullo. Dunque la somma $E + F$ è diretta.

h. Un vettore (x, y, z) appartiene a $E \cap F$ se e solo è combinazione lineare di $(1, 3, 1)$ e $(-1, 2, 0)$ ed è multiplo di $(2, 1, 1)$. Supponiamo allora che sia

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= h(1, 3, 1) + k(-1, 2, 0),\\ (x, y, z) &= l(2, 1, 1).\end{aligned}$$

Ma allora si ha

$$h(1, 3, 1) + k(-1, 2, 0) = l(2, 1, 1),$$

cioè

$$(h - k, 3h + 2k, h) = (2l, l, l).$$

Otteniamo allora un sistema nelle incognite h, k e l:

$$\begin{cases} h - k = 2l \\ 3h + 2k = l \\ h = l \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $h = t$, $k = -t$, $l = t$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Pertanto $E \cap F$ è formato dai vettori del tipo $t(2, 1, 1)$: la somma $E + F$ non è diretta.

E.18.8 Ricordiamo che due sottospazi E e F di $\mathbb{R}^3$ sono supplementari in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$. Dobbiamo quindi considerare solo i casi dell'esercizio precedente in cui la somma $E + F$ è diretta e verificare se tale somma coincide con tutto $\mathbb{R}^3$.

b. Poiché E è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di una singola equazione in 3 incognite abbiamo che $\dim E = 3 - 1 = 2$. Il sottospazio F è generato da un singolo vettore non nullo: dunque $\dim F = 1$. Per la formula di Grassmann abbiamo allora $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2+1-0 = 3$. Dunque $E+F = \mathbb{R}^3$. I sottospazi E e F sono supplementari in $\mathbb{R}^3$.

e. Il sottospazio E è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 3 incognite formato da 2 equazioni. La matrice di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2, dunque $\dim E = 3 - 2 = 1$. Il sottospazio F è generato da un singolo vettore non banale: dunque $\dim F = 1$. Sappiamo inoltre che l'intersezione di E con F contiene il solo vettore nullo. Pertanto:

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Ma allora $E + F \neq \mathbb{R}^3$. Pertanto E e F non sono supplementari in $\mathbb{R}^3$.

g. Il sottospazio E è generato da due vettori linearmente indipendenti: dunque abbiamo $\dim E = 2$. Il sottospazio F è generato da un singolo vettore non banale: dunque $\dim F = 1$. Sappiamo inoltre che l'intersezione di E con F contiene il solo vettore nullo. Pertanto:

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Ma allora $E + F = \mathbb{R}^3$. Pertanto E e F sono supplementari in $\mathbb{R}^3$.

E.18.9 Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Come negli esercizi precedenti possiamo calcolare il rango di A, ad esempio riducendo a scalini la matrice A. Dopo alcuni passaggi si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim U = 2$. Poiché gli scalini sono in prima e seconda posizione vediamo che una base di U è data dai vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$.

In maniera analoga consideriamo la matrice B le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il rango di B, riducendo a scalini la matrice B. Dopo alcuni passaggi si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim V = 3$. Poiché gli scalini sono in prima, seconda e quarta posizione vediamo che una base di V è data dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_4$.

Determiniamo ora l'intersezione $U \cap V$. Un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a $U \cap V$ se si può esprimere sia come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sia come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_4$. Dunque dovrà essere:

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{u}_1 + h_2\boldsymbol{u}_2 = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_4,$$

per opportuni scalari h_1, h_2, k_1, k_2 e k_3. In maniera più esplicita possiamo allora scrivere che:

$$h_1(2,1,3,1) + h_2(1,0,2,0) = k_1(1,0,2,1) + k_2(1,1,1,-1) + k_3(1,-1,0,0),$$

vale a dire

$$(2h_1 + h_2, h_1, 3h_1 + 2h_2, h_1) = (k_1 + k_2 + k_3, k_2 - k_3, 2k_1 + k_2, k_1 - k_2).$$

Otteniamo quindi un sistema lineare:

$$\begin{cases} 2h_1 + h_2 - k_1 - k_2 - k_3 = 0 \\ h_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ 3h_1 + 2h_2 - 2k_1 - k_2 = 0 \\ h_1 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $h_1 = t$, $h_2 = t$, $k_1 = 2t$, $k_2 = t$, $k_3 = 0$ al variare del parametro t. Dunque un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a $U \cap V$ se e solo se si può scrivere come:

$$t(2,1,3,1) + t(1,0,2,0) = t(3,1,5,1)$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Vediamo allora che i vettori di $U \cap V$ sono i multipli del vettore $(3,1,5,1)$ che costituisce pertanto una base di $U \cap V$: in particolare $\dim(U \cap V) = 1$. Utilizziamo ora la formula di Grassmann per trovare la dimensione di $U + V$. Abbiamo:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ma allora $U + V = \mathbb{R}^4$. Una base per $U + V$ è allora, ad esempio, la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

E.18.10 Se risolviamo il sistema che definisce U troviamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -3h_2 - h_3 \\ x_2 = h_2 \\ x_3 = h_1 \\ x_4 = h_2 \\ x_5 = h_3 \end{cases}$$

Il sottospazio U ha allora dimensione 3 e una sua base è data dai vettori:

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq (0,0,1,0,0), \quad \boldsymbol{u}_2 \coloneqq (-3,1,0,1,0), \quad \boldsymbol{u}_3 \coloneqq (-1,0,0,0,1).$$

Analogamente risolviamo il sistema le cui equazioni definiscono V:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}h_1 \\ x_2 = \frac{1}{6}h_1 - \frac{1}{3}h_2 \\ x_3 = -h_2 \\ x_4 = h_1 \\ x_5 = h_2 \end{cases}$$

Il sottospazio V ha allora dimensione 2 e una sua base è data dai vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 1, 0\right), \quad \boldsymbol{v}_2 := \left(0, -\frac{1}{3}, -1, 0, 1\right).$$

Per determinare l'intersezione di U e V risolviamo il sistema che si ottiene considerando le equazioni che definiscono U insieme alle equazioni che definiscono V. Si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}h \\ x_2 = -\frac{2}{5}h \\ x_3 = -h \\ x_4 = -\frac{2}{5}h \\ x_5 = h \end{cases}$$

Il sottospazio $U \cap V$ ha allora dimensione 1 e una sua base è data dal vettore:

$$\boldsymbol{w} := \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -1, -\frac{2}{5}, 1\right).$$

Vogliamo ora determinare la dimensione e una base per $U + V$. Dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Dobbiamo allora cercare 4 vettori linearmente indipendenti in $U + V$. Possiamo cominciare con considerare la base che abbiamo ottenuto di U e cercare di completarla a una base di $U + V$. Ci serve allora un vettore $\boldsymbol{z}$ di $U + V$ che non sia combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$, cioè non appartenga ad U. Possiamo ad esempio cercare $\boldsymbol{z}$ in V. In questo caso per affermare che $\boldsymbol{z}$ non appartiene a U dobbiamo verificare che $\boldsymbol{z}$ non appartenga a $U \cap V$, cioè non sia multiplo di $\boldsymbol{w}$. Vediamo subito che possiamo prendere come vettore $\boldsymbol{z}$ il vettore $\boldsymbol{v}_1$. Una base per $U + V$ è allora quella formata dai vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{v}_1$, vale a dire:

$$(0, 0, 1, 0, 0), \quad (-3, 1, 0, 1, 0), \quad (-1, 0, 0, 0, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 1, 0\right).$$

E.18.11 Il sottospazio E ha dimensione 2 perché è generato da 2 vettori linearmente indipendenti. Pertanto un supplementare F di E deve avere dimensione $4 - 2 = 2$. Se $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{t}$ formano una base di F è sufficiente scegliere tali vettori in modo tale che $E + F = \mathbb{R}^4$. Infatti, per l'osservazione 18.33, la condizione che $E \cap F = \{\boldsymbol{0}\}$ sarà poi automaticamente soddisfatta.

La somma $E + F$ è generata dai vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{t}$. Affinché generino tutto $\mathbb{R}^4$ devono formare una base per $\mathbb{R}^4$. Cerchiamo allora come primo generatore di F un vettore $\boldsymbol{w} := (h_1, h_2, h_3, h_4)$ che non sia combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Ciò è equivalente a imporre che la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_1 \\ 0 & 3 & h_2 \\ 2 & 0 & h_3 \\ 0 & 2 & h_4 \end{pmatrix}$$

abbia rango 3. Osserviamo che il minore formato dalle prime 3 righe ha determinante $3h_3 - 6h_1$. Scegliendo h_1, h_2, h_3 e h_4 in modo tale che $3h_3 - 6h_4 \neq 0$ abbiamo che la matrice A ha rango 3. Prendiamo allora come vettore $\boldsymbol{w}$ il vettore $(1, 0, 0, 0)$. Dobbiamo ora scegliere un secondo generatore $\boldsymbol{t} := (k_1, k_2, k_3, k_4)$ per F in modo tale che non sia combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Ciò è equivalente a imporre che la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k_1 \\ 0 & 3 & 0 & k_2 \\ 2 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 2 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$$

abbia rango 4. Il determinante di B è $4k_2 - 6k_4$. Scegliendo k_1, k_2, k_3 e k_4 in modo tale che $4k_2 - 6k_4 \neq 0$ abbiamo che la matrice B ha rango 4. Prendiamo allora come vettore $\boldsymbol{t}$ il vettore $(0, 1, 0, 0)$.

Il sottospazio F generato dai vettori $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 100)$ è allora un supplementare di E.

E.18.12 Determiniamo innanzitutto le dimensioni degli spazi vettoriali coinvolti. Il sottospazio vettoriale F è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni indipendenti in 5 incognite e, pertanto, ha dimensione $5 - 2 = 3$. Il sottospazio vettoriale $E \cap F$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che questa matrice ha rango 3 (ad esempio riducendola a scalini). Pertanto $E \cap F$ ha dimensione $5 - 3 = 2$.

I complementi di $E \cap F$ in F hanno dunque dimensione $3 - 2 = 1$. Basta allora trovare un vettore $\boldsymbol{v}$ che appartiene a F ma non a $E \cap F$: in tal caso infatti, detto G il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$, si ha che l'intersezione di G con $E \cap F$ ha dimensione 0 (non può avere dimensione 1 perché altrimenti G e conterrebbe $\boldsymbol{v}$ che non appartiene a $E \cap F$); per l'osservazione 18.33 la condizione $(E \cap F) + G = F$ è allora automaticamente soddisfatta.

Dobbiamo quindi trovare un vettore $\boldsymbol{v}$ che appartiene a F ma non a $E \cap F$, vale a dire un vettore che appartiene a F ma non a E. Risolvendo il sistema che definisce F, usando, per esempio, x_2, x_4 e x_5 come parametri, vediamo che il generico vettore di F è del tipo $(-h, h, -k - l, k, l)$ al variare di h, k e l in $\mathbb{R}$. Imponendo che l'equazione che definisce E non sia soddisfatta troviamo la condizione $-h + h - (-k - l) + k \neq 0$ cioè $2k + l \neq 0$. Scegliendo, ad esempio $h = 0$, $k = 0$ e $l = 1$, troviamo il vettore $(0, 0, -1, 0, 1)$. Possiamo allora scegliere il sottospazio vettoriale G generato da tale vettore.

CAPITOLO 19

Sottospazi affini

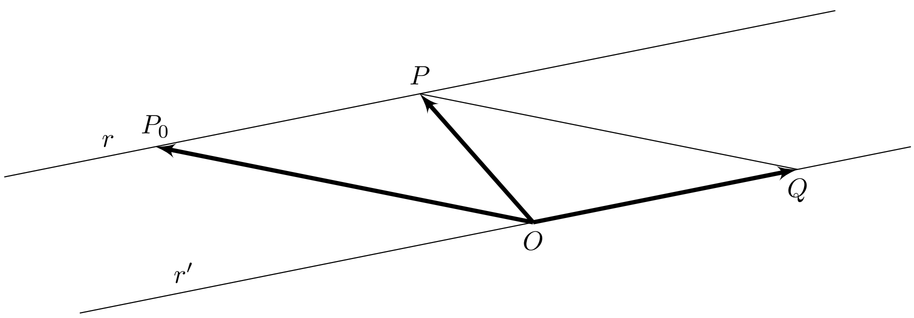
Abbiamo visto che, nello spazio vettoriale dei vettori del piano o dello spazio applicati in un punto O, le rette passanti per O possono essere viste come sottospazi vettoriali di dimensione 1. Abbiamo anche visto che nello spazio vettoriale dei vettori dello spazio i piani passanti per O possono essere visti come sottospazi vettoriali di dimensione 2.

In questo capitolo vediamo che le rette del piano o dello spazio e i piani dello spazio (non necessariamente passanti per O) hanno una struttura algebrica un po' più generale dei sottospazi vettoriali, che chiamiamo sottospazio affine. Introduciamo quindi la nozione di sottospazio affine di uno spazio vettoriale qualsiasi. Ciò ci permetterà di riconoscere in particolare che l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari, quando non è vuoto, è un sottospazio affine.

19.1 Le rette del piano e dello spazio

Fissato nel piano o nello spazio un punto O consideriamo lo spazio vettoriale $V^2(O)$ dei vettori applicati nel punto O e lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori applicati in O. Quel che segue vale indifferentemente in entrambi i casi.

Consideriamo una retta r non passante per O e un suo punto P_0. Sia r' la retta passante per O e parallela alla retta r.



Osserviamo che, dato comunque un punto Q sulla retta r', il vettore:

$$\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$$

ha come vertice un punto P appartenente alla retta r. Viceversa, dato un punto qualsiasi $P \in r$, possiamo sempre trovare un punto $Q \in r'$ tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$.

Bene, abbiamo dimostrato che l'insieme dei punti $P \in r$ è dato da tutti e soli i punti per i quali esiste un punto $Q \in r'$ tale che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}.$$

Posto $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{v}_0 := \overrightarrow{OP_0}$, possiamo esprimere l'affermazione precedente dicendo che l'insieme dei punti $P \in r$ è dato da tutti e soli i punti P vertici dei vettori $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ per i quali esiste un vettore $\boldsymbol{v}' = \overrightarrow{OQ}$ con $Q \in r'$ tale che:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'.$$

Nella costruzione precedente abbiamo implicitamente supposto che la retta r non passi per il punto O. Applichiamo la stessa costruzione a una retta r passante per O. In questo caso la retta r' passante per O e parallela a r è la retta r stessa. I parallelogrammi necessari per determinare i vettori somma di vettori sono tutti degeneri, i punti O, P_0, P e Q sono tutti allineati.

In ogni caso, sia che la retta r passi per O o che non ci passi, si ha sempre che i punti $P \in r$ sono tutti e soli i punti vertici dei vettori $\overrightarrow{OP}$ del tipo

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$$

con $Q \in r'$.

Ricordiamo inoltre che, data una retta r' passante per O, l'insieme

$$E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in r'\}$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$. Possiamo quindi sintetizzare tutto ciò nel:

Teorema 19.1 *Sia r una retta e sia P_0 un suo punto. Sia r' la retta parallela a r passante per O. Allora $P \in r$ se e solo se esiste $Q \in r'$ tale che:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}.$$

Equivalentemente, chiamato E il sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$ di dimensione 1 così definito:

$$E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in r'\},$$

si ha che $P \in r$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ appartiene all'insieme:

$$\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}.$$

Osservazione 19.2 Nel teorema precedente abbiamo scelto un punto P_0 sulla retta r: se scegliamo un differente punto Q_0, posto $\boldsymbol{w}_0 := \overrightarrow{OQ_0}$ abbiamo che $P \in r$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ appartiene all'insieme $\{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$. Dunque gli insiemi $\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$ e $\{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$ coincidono. $\triangle$

Osservazione 19.3 L'uguaglianza tra gli insiemi

$$\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\} \quad \text{e} \quad \{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$$

non significa che $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}'$ per qualche vettore $\boldsymbol{v}'$ di E perché altrimenti avremmo $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0$. Significa invece che dato un qualunque vettore $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$ con $\boldsymbol{v}' \in E$ esiste un vettore $\boldsymbol{v}'' \in E$ tale che $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}''$. △

Diamo infine la:

Definizione 19.4 Un vettore $\boldsymbol{v}' := \overrightarrow{OQ}$ e una retta r si dicono **paralleli** se il punto Q appartiene alla retta r' parallela alla retta r e passante per O. △

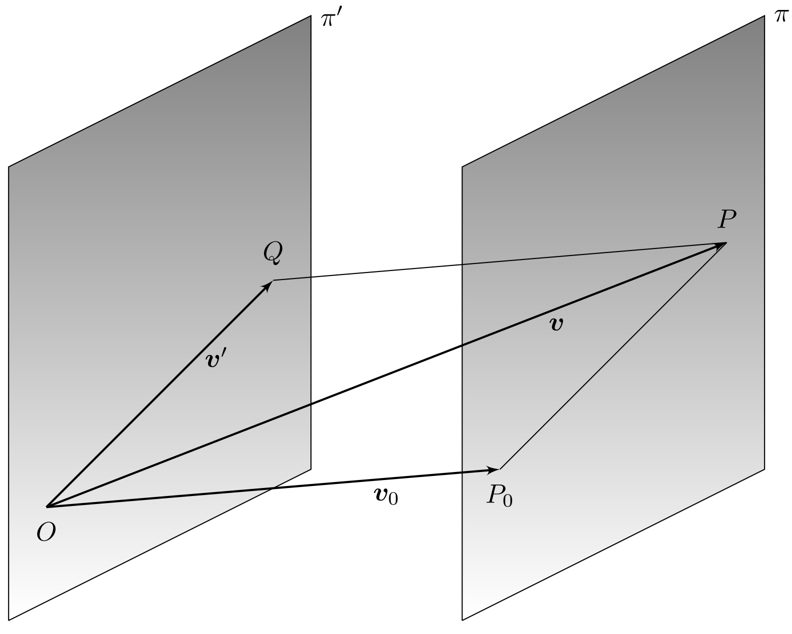
19.2 I piani dello spazio

Fissato nello spazio un punto O consideriamo lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori applicati in O.

Consideriamo ora un piano π non passante per O e un suo punto P_0. Sia π' il piano passante per O e parallelo al piano π.

In modo analogo al caso della retta vediamo che l'insieme dei punti $P \in \pi$ è dato da tutti e soli i punti P vertici dei vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ per i quali esiste un vettore $\boldsymbol{v}' := \overrightarrow{OQ}$ con $Q \in \pi'$ tale che:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'.$$



Possiamo applicare la stessa costruzione a un piano π passante per O. In questo caso il piano π' passante per O e parallelo a π è il piano π stesso.

In ogni caso, sia che il piano π passi per O o che non ci passi, si ha sempre che i punti $P \in \pi$ sono tutti e soli i punti vertici dei vettori $\overrightarrow{OP}$ del tipo

$$\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}.$$

con $Q \in \pi'$.

Ricordiamo inoltre che, dato un piano π' passante per O, l'insieme

$$E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in \pi'\}$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $V^3(O)$.

Possiamo quindi sintetizzare tutto ciò nel:

Teorema 19.5 *Sia π un piano e sia P_0 un suo punto. Sia π' il piano parallelo a π passante per O. Allora $P \in \pi$ se e solo se esiste $Q \in \pi'$ tale che:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}.$$

Equivalentemente, chiamato E il sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 2 così definito:

$$E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in \pi'\}.$$

si ha che $P \in \pi$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ appartiene all'insieme:

$$\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}.$$

Nel teorema precedente abbiamo scelto un punto P_0 sul piano π: se scegliamo un differente punto Q_0, posto $\boldsymbol{w}_0 := \overrightarrow{OQ_0}$ abbiamo che $P \in \pi$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ appartiene all'insieme $\{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$. Dunque gli insiemi $\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$ e $\{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$ coincidono.

Osservazione 19.6 L'uguaglianza tra gli insiemi

$$\{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\} \quad \text{e} \quad \{\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}$$

non significa che $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}'$ per qualche vettore $\boldsymbol{v}'$ di E perché altrimenti avremmo $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0$. Significa invece che dato un qualunque vettore $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$ con $\boldsymbol{v}' \in E$ esiste un vettore $\boldsymbol{v}'' \in E$ tale che $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}''$. △

L'osservazione 19.6 ha esattamente lo stesso enunciato dell'osservazione 19.3: ciò che cambia è solo la dimensione del sottospazio vettoriale E coinvolto.

19.3 Sottospazi affini

Definizione 19.7 In uno spazio vettoriale V siano dati un vettore $\boldsymbol{v}_0$ e un sottospazio vettoriale E. Consideriamo l'insieme $\boldsymbol{v}_0 + E$ ottenuto sommando a ogni vettore di E il vettore $\boldsymbol{v}_0$, cioè:

$$\boldsymbol{v}_0 + E := \{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}.$$

Questo insieme viene chiamato **sottospazio affine passante** per $\boldsymbol{v}_0$ e **parallelo** a E. La **dimensione** del sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ è, per definizione, uguale alla dimensione di E. △

Esercizio di base 19.8 Mostrare che il sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ contiene il vettore $\boldsymbol{v}_0$.

Esempio 19.9 Per il teorema 19.1 un sottospazio affine di dimensione 1 dello spazio vettoriale $V^2(O)$ o dello spazio vettoriale $V^3(O)$ è costituito da tutti e soli i vettori il cui punto finale appartiene a una retta r fissata. $\triangle$

Esempio 19.10 Per il teorema 19.5 un sottospazio affine di dimensione 2 dello spazio vettoriale $V^3(O)$ è costituito da tutti e soli i vettori il cui punto finale appartiene a un piano π fissato. $\triangle$

Esercizio di base 19.11 Dimostrare che i sottospazi affini di dimensione 0 di uno spazio vettoriale V sono formati da singoli vettori di V.

Esercizio di base 19.12 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostrare che in V esiste un solo sottospazio affine di dimensione n. Esso è dato da tutto lo spazio vettoriale V.

Esercizio di base 19.13 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. Sia:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Determinare tutti e soli i vettori appartenenti al sottospazio affine $A + \mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ e verificare che tale sottospazio affine non è un sottospazio vettoriale. Ricordiamo che $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche.

Osservazione 19.14 L'esercizio di base 19.13 mostra che, in generale, un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V non è un sottospazio vettoriale di V. $\triangle$

Nota 19.15 L'osservazione precedente mostra che i concetti di sottospazio vettoriale e sottospazio affine non coincidono. Pertanto è opportuno specificare sempre se si sta parlando di sottospazi affini o vettoriali.

Ad ogni modo, ogniqualvolta si parla genericamente di un "sottospazio", senza specificare "affine" o "vettoriale", si intende sempre dire che si tratta un sottospazio vettoriale. $\triangle$

Esercizio di base 19.16 Si consideri la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Dimostrare che B appartiene al sottospazio affine $A + \mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ dell'esercizio di base 19.13. Si mostri poi che $A + \mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = B + \mathrm{S}(2, \mathbb{R})$.

Nell'esercizio di base 19.16 abbiamo visto che lo stesso sottospazio affine si può rappresentare in due modi diversi. Analogamente avevamo notato che per descrivere una retta o un piano come sottospazio affine si poteva scegliere un qualsiasi punto appartenente alla retta o al piano. Tutto ciò ha validità generale:

Proposizione 19.17 *Sia $\boldsymbol{v} + E$ un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V. Sia $\boldsymbol{w}$ un vettore di V. Possono sussistere due casi:*

- *se* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + E$ *allora* $\boldsymbol{v} + E = \boldsymbol{w} + E$*;*
- *se* $\boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{v} + E$ *allora l'intersezione di* $\boldsymbol{v} + E$ *e* $\boldsymbol{w} + E$ *è vuota.*

Dimostrazione Supponiamo che $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + E$. Allora $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ per qualche $\boldsymbol{v}' \in E$. Mostriamo ora che $\boldsymbol{v} + E \supseteq \boldsymbol{w} + E$: per far ciò dobbiamo mostrare che ogni vettore di $\boldsymbol{w} + E$ appartiene a $\boldsymbol{v} + E$. Un vettore di $\boldsymbol{w} + E$ si può scrivere come $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{u} \in E$. Ma allora

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{v} + E,$$

perché $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$ appartiene a E. Abbiamo così mostrato che $\boldsymbol{v} + E \supseteq \boldsymbol{w} + E$. Per mostrare l'inclusione opposta si procede in maniera analoga.

Supponiamo ora che $\boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{v} + E$. Se esistesse un vettore $\boldsymbol{u}$ appartenente all'intersezione di $\boldsymbol{v} + E$ e $\boldsymbol{w} + E$ per quanto abbiamo appena visto avremmo che $\boldsymbol{v} + E = \boldsymbol{u} + E$ e $\boldsymbol{w} + E = \boldsymbol{u} + E$. Ma allora $\boldsymbol{w} + E = \boldsymbol{v} + E$. Poiché $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{w} + E$ avremmo che $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + E$. ■

Esercizio di base 19.18 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$. Sia:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

△

Verificare che il sottospazio affine $C + \mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ coincide con $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$.

Esercizio di base 19.19 Dimostrare che, dato un sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ di uno spazio vettoriale V, si ha che:

- se $\boldsymbol{v}_0 \in E$ allora $\boldsymbol{v}_0 + E$ coincide con E e quindi è un sottospazio vettoriale;
- se $\boldsymbol{v}_0 \notin E$ allora $\boldsymbol{v}_0 + E$ non è un sottospazio vettoriale. △

19.4 L'insieme delle soluzioni di un sistema

Nel capitolo 14 abbiamo visto che, dato un sistema lineare omogeneo S in q incognite, l'insieme delle soluzioni di S è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$.

Se, invece, S non è omogeneo l'insieme delle sue soluzioni non è un sottospazio vettoriale (per vedere ciò basta notare che la matrice nulla non è soluzione di S).

Cosa possiamo dire in generale dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare S non necessariamente omogeneo?

Notiamo che in alcuni casi $\mathrm{Sol}(S) = \varnothing$, cioè il sistema S non ha soluzioni. Consideriamo quindi sistemi risolubili. Cominciamo con un:

Esempio 19.20 Riprendiamo il sistema dell'esempio 8.14:

$$S\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2h - k \\ x_2 = 2 - h \\ x_3 = h \\ x_4 = k \end{cases}$$

al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Riscriviamo queste soluzioni come insieme di matrici:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2h - k \\ 2 - h \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ora notiamo che

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2h - k \\ 2 - h \\ h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'insieme E formato dalle matrici

$$h \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di h e k in $\mathbb{R}$ è l'insieme delle combinazioni lineari delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(4, 1, \mathbb{R})$ di dimensione 2. Pertanto abbiamo che

$$\mathrm{Sol}(S) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + E.$$

Dunque $\mathrm{Sol}(S)$ è un sottospazio affine. Notiamo che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione particolare del sistema: infatti la otteniamo assegnando ad entrambi i parametri h e k il valore nullo. △

Il procedimento che abbiamo così delineato può essere adattato a un qualsiasi sistema lineare non necessariamente omogeneo $S\colon AX = B$ di p equazioni nelle q incognite $x_1, x_2, \dots, x_q$. Si determinano le soluzioni del sistema con il metodo che si preferisce. Se il rango della matrice è r, sappiamo che $q-r$ incognite scelte opportunamente fungeranno da parametri, mentre le altre saranno espresse come polinomi di primo grado in questi parametri. Più precisamente, supponendo per semplicità che le incognite cui assegniamo valori parametrici siano le ultime $q-r$ e che dunque abbiamo posto $x_{r+1} \coloneqq h_1$, $x_{r+2} \coloneqq h_2$, $\dots$, $x_q \coloneqq h_{q-r}$, le soluzioni di S si esprimeranno nella forma seguente:

$$\begin{pmatrix} d_1 + c_{11}h_1 + c_{12}h_2 + c_{1,q-r}h_{q-r} \\ d_2 + c_{21}h_1 + c_{22}h_2 + c_{2,q-r}h_{q-r} \\ \vdots \\ d_r + c_{r1}h_1 + c_{r2}h_2 + c_{r,q-r}h_{q-r} \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{q-r} \end{pmatrix},$$

al variare dei parametri reali $h_1, h_2, \dots, h_{q-r}$. Notiamo che i coefficienti d_i e c_{ij} non sono parametri ma sono dei numeri ben precisi. Si riscrivono allora le soluzioni così:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + h_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + h_{q-r} \begin{pmatrix} c_{1,q-r} \\ c_{2,q-r} \\ \vdots \\ c_{r,q-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo allora che l'insieme delle soluzioni di S si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + E$$

dove E è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori:

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \begin{pmatrix} c_{1,q-r} \\ c_{2,q-r} \\ \vdots \\ c_{r,q-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ma allora E è un sottospazio vettoriale e $\operatorname{Sol}(S)$ è un sottospazio affine. Notiamo che

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione particolare del sistema S (si ottiene ponendo uguale a 0 tutti i parametri), mentre al momento non è chiaro come possa essere interpretato il sottospazio vettoriale E. Per chiarire meglio questo punto cominciamo con la:

Definizione 19.21 Dato un sistema lineare $S\colon AX = B$, chiamiamo **sistema omogeneo associato** a S il sistema $SO\colon AX = 0$. In altri termini il sistema SO si ottiene da S semplicemente ponendo uguali a 0 tutti i termini noti delle equazioni che formano S. △

Siamo ora pronti ad enunciare il:

Teorema 19.22 *Sia $S\colon AX = B$ un sistema lineare risolubile e sia X_0 una soluzione particolare di S. Se $SO\colon AX = 0$ è il sistema omogeneo associato a S, si ha:*

$$\operatorname{Sol}(S) = X_0 + \operatorname{Sol}(SO).$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di S è un sottospazio affine parallelo al sottospazio vettoriale $\operatorname{Sol}(SO)$.

Dimostrazione Per provare che $\operatorname{Sol}(S) = X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$ dobbiamo mostrare che $\operatorname{Sol}(S) \supseteq X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$ e che $\operatorname{Sol}(S) \subseteq X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$.

Mostriamo innanzitutto che ogni elemento di $X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$ appartiene a $\operatorname{Sol}(S)$. Un elemento di $X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$ si scrive come $X_0 + X'$ per qualche X' soluzione di SO. Dobbiamo allora provare che $X_0 + X'$ è soluzione di S, vale a dire che $A(X_0 + X') = B$. Ora:

$$A(X_0 + X') = AX_0 + AX'.$$

Poiché X_0 è una soluzione di S abbiamo che $AX_0 = B$, poiché X' è soluzione di SO abbiamo che $AX' = 0$. Dunque:

$$A(X_0 + X') = B + 0 = B.$$

Abbiamo così mostrato che $X_0 + X'$ appartiene a $\operatorname{Sol}(S)$.

Mostriamo ora che ogni elemento di $\operatorname{Sol}(S)$ appartiene a $X_0 + \operatorname{Sol}(SO)$. Sia allora X_1 un elemento di $\operatorname{Sol}(S)$. Dobbiamo mostrare che $X_1 = X_0 + X'$ per qualche elemento X' di $\operatorname{Sol}(SO)$. Come possiamo trovare l'elemento X' giusto? Notiamo che affinché risulti $X_1 = X_0 + X'$ deve necessariamente essere $X' = X_1 - X_0$. Per completare la dimostrazione dobbiamo allora provare che $X_1 - X_0$ è soluzione di $\operatorname{Sol}(SO)$, vale a dire che $A(X_1 - X_0) = 0$. Ora:

$$A(X_1 - X_0) = AX_1 - AX_0.$$

Poiché X_1 e X_0 sono soluzioni di S abbiamo che $AX_1 = B$ e $AX_0 = B$. Dunque:

$$A(X_1 - X_0) = B - B = 0,$$

come volevamo. ■

Vogliamo ora determinare la dimensione del sottospazio affine $\operatorname{Sol}(S)$. Per definizione essa è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale $\operatorname{Sol}(SO)$ delle soluzioni del sistema associato SO. Sappiamo calcolare questa dimensione grazie al teorema 17.29. Abbiamo così la:

Proposizione 19.23 *Sia S un sistema lineare risolubile di p equazioni in q incognite. Se la matrice del sistema ha rango r allora il sottospazio affine* $\operatorname{Sol}(S)$ *ha dimensione $q - r$.*

Esercizio di base 19.24 Sia dato il sistema lineare:

$$S\colon \begin{cases} 2x + y + z - w = 2 \\ y + w + t = 3 \\ 2x + 2y + z + t = 5 \end{cases}$$

△

Stabilire se l'insieme delle soluzioni di S è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$ e in caso affermativo calcolarne la dimensione.

Esercizio di base 19.25 Sia dato il sottoinsieme F di $\mathbb{R}^5$ così definito:

$$F := \{(x, y, z, w, t) \mid 2x + y + z - w = 2, y + w + t = 3, 2x + 2y + z + t = 4\}.$$

△

Stabilire se F è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$ e in caso positivo determinarne la dimensione.

19.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.19.8 Per mostrare che $\boldsymbol{v}_0$ appartiene al sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ dobbiamo mostrare che $\boldsymbol{v}_0$ si può esprimere come somma di $\boldsymbol{v}_0$ e di un vettore di E. Ovviamente $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0 + \mathbf{0}$ e $\mathbf{0}$ è un vettore di E.

EB.19.11 Un sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ di uno spazio vettoriale V ha dimensione 0 se e solo se E ha dimensione 0. Ciò significa che il sottospazio vettoriale E è formato dal solo vettore nullo. Quindi $\boldsymbol{v}_0 + E = \{\boldsymbol{v}_0\}$.

EB.19.12 Sia n la dimensione dello spazio vettoriale V. Consideriamo un sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ di dimensione n. Sappiamo che l'unico sottospazio vettoriale di V che ha dimensione uguale a n è lo spazio vettoriale V stesso. Quindi $\boldsymbol{v}_0 + E = \boldsymbol{v}_0 + V$.

Abbiamo ovviamente $\boldsymbol{v}_0 + V \subseteq V$. Dimostriamo che si ha $V \subseteq \boldsymbol{v}_0 + V$. Dobbiamo dimostrare che ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ è uguale a $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$ per qualche $\boldsymbol{v}' \in V$. Se poniamo $\boldsymbol{v}' := -\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v} \in V$, abbiamo quel che volevamo.

EB.19.13 Sappiamo che si ha:

$$\mathrm{S}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

e quindi

$$A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t_1 & 2+t_2 \\ 3+t_2 & 4+t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notiamo che $O \notin A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Il sottospazio affine considerato non è quindi un sottospazio vettoriale.

EB.19.16 Per mostrare che la matrice B appartiene a $A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ dobbiamo provare che esiste una matrice simmetrica S tale che $B = A + S$: visto che l'unica matrice S tale che $B = A + S$ è $B - A$, dobbiamo allora mostrare che $B - A$ è una matrice simmetrica. Basta allora calcolare $B - A$:

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo effettivamente trovato una matrice simmetrica S.

Dobbiamo ora mostrare che $A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) = B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$.

Come prima cosa mostriamo che $B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) \subseteq A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$: questo significa mostrare che ogni elemento di $B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ appartiene a $A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Una matrice generica M di $B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ si scrive come $B + C$ con C matrice simmetrica. Per mostrare che M appartiene a $A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ dobbiamo trovare una matrice simmetrica D tale che $M = A + D$. Sappiamo che $B = A + S$ con S simmetrica: ma allora

$$M = B + C = (A + S) + C = A + (S + C).$$

Ora $S + C$ è una matrice simmetrica perché è somma delle due matrici simmetriche S e C. Dunque abbiamo espresso M come somma di A e di una matrice simmetrica.

Per mostrare che $A + \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) \subseteq B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ procediamo in maniera del tutto analoga: l'unica cosa che ci serve notare preliminarmente è che la matrice A appartiene a $B + \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$, cioè che A è la somma di B e di una matrice simmetrica: dato che $B = A + S$ abbiamo che $A = B + (-S)$ e, ovviamente $-S$ è una matrice simmetrica.

EB.19.18 Abbiamo

$$C + \mathrm{S}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t_1 & 2+t_2 \\ 2+t_2 & 4+t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo $t_1' := 1 + t_1$, $t'2 := 2 + t_2$, $t_3' := 4 + t_3$, otteniamo:

$$C + \mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1' & t_2' \\ t_2' & t_3' \end{pmatrix} \mid t_i' \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{S}(2, \mathbb{R}).$$

EB.19.19 Notiamo innanzitutto che $E = \mathbf{0} + E$. Possiamo adesso applicare la proposizione 19.17.

Se $\boldsymbol{v}_0 \in E$ allora $\boldsymbol{v}_0 + E = \mathbf{0} + E$ e quindi il sottospazio affine $\mathbf{0} + E$ è un sottospazio vettoriale.

Se invece $\boldsymbol{v}_0 \notin E$ allora $\boldsymbol{v}_0 + E$ e $\mathbf{0} + E = E$ hanno intersezione vuota. In particolare $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{v}_0 + E$ e, pertanto, $\boldsymbol{v}_0 + E$ non è un sottospazio vettoriale.

EB.19.24 Per stabilire se $\mathrm{Sol}(S)$ è un sottospazio affine dobbiamo verificare che sia non vuoto, cioè che il sistema S sia risolubile. La matrice dei coefficienti di S è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che la matrice A ha rango 2. Calcolando il rango della matrice completa del sistema troviamo ancora 2 e, pertanto, il sistema S è risolubile. Dunque $\mathrm{Sol}(S)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$. La dimensione di $\mathrm{Sol}(S)$ è uguale al numero delle incognite, cioè 5, meno il rango della matrice del sistema cioè 2. Pertanto $\dim \mathrm{Sol}(S) = 5 - 2 = 3$.

EB.19.25 Notiamo che F non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z - w \phantom{{}+t} = 2 \\ y \phantom{{}+z} + w + t = 3 \\ 2x + 2y + z \phantom{{}-w} + t = 4 \end{cases}$$

Notiamo che la matrice dei coefficienti di questo sistema è la stessa del sistema dell'esercizio di base precedente e ha quindi rango 2. Calcolando il rango della matrice completa del sistema si trova 3, e, quindi il sistema S non è risolubile. L'insieme F è allora vuoto e non è, dunque, un sottospazio affine.

19.6 Sunto

Definizione In uno spazio vettoriale V siano dati un vettore $\boldsymbol{v}_0$ e un sottospazio vettoriale E. Consideriamo l'insieme $\boldsymbol{v}_0 + E$ ottenuto sommando a ogni vettore di E il vettore $\boldsymbol{v}_0$, cioè:

$$\boldsymbol{v}_0 + E := \{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in E\}.$$

Questo insieme viene chiamato **sottospazio affine passante** per $\boldsymbol{v}_0$ e **parallelo** a E. La **dimensione** del sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ è, per definizione, uguale alla dimensione di E. △

Osservazione Il sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ contiene il vettore $\boldsymbol{v}_0$. △

Nota Ogniqualvolta si parla genericamente di un "sottospazio", senza specificare "affine" o "vettoriale", si intende sempre dire che si tratta un sottospazio vettoriale. △

Teorema *Un sottospazio affine di dimensione* 1 *dello spazio vettoriale* $V^2(O)$ *o dello spazio vettoriale* $V^3(O)$ *è costituito da tutti e soli i vettori il cui punto finale appartiene a una retta* r *fissata.*

Teorema *Un sottospazio affine di dimensione* 2 *dello spazio vettoriale* $V^3(O)$ *è costituito da tutti e soli i vettori il cui punto finale appartiene a un piano* π *fissato.*

Proposizione *Sia* $\boldsymbol{v} + E$ *un sottospazio affine di uno spazio vettoriale* V*. Sia* $\boldsymbol{w}$ *un vettore di* V*. Possono sussistere due casi:*

- *se* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + E$ *allora* $\boldsymbol{v} + E = \boldsymbol{w} + E$*;*
- *se* $\boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{v} + E$ *allora l'intersezione di* $\boldsymbol{v} + E$ *e* $\boldsymbol{w} + E$ *è vuota.*

L'insieme delle soluzioni di un sistema

Definizione Dato un sistema lineare $S\colon AX = B$, chiamiamo **sistema omogeneo associato** a S il sistema $SO\colon AX = 0$. In altri termini il sistema SO si ottiene da S semplicemente ponendo uguali a 0 tutti i termini noti delle equazioni che formano S. $\triangle$

Teorema *Sia* $S\colon AX = B$ *un sistema lineare risolubile e sia* X_0 *una soluzione particolare di* S*. Se* $SO\colon AX = 0$ *è il sistema omogeneo associato a* S*, si ha:*

$$\mathrm{Sol}(S) = X_0 + \mathrm{Sol}(SO).$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di S *è un sottospazio affine parallelo al sottospazio vettoriale* $\mathrm{Sol}(SO)$*.*

Proposizione *Sia* S *un sistema lineare risolubile di* p *equazioni in* q *incognite. Se la matrice del sistema ha rango* r *allora il sottospazio affine* $\mathrm{Sol}(S)$ *ha dimensione* $q - r$*.*

19.7 Esercizi

E.19.1 Si consideri, al variare di $b \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$S_b\colon x + 2y = b.$$

Dimostrare che i sottospazi affini $\mathrm{Sol}(S_b)$, al variare di b, sono tutti paralleli a uno stesso sottospazio vettoriale.

E.19.2 Dato lo spazio vettoriale $V^2(0)$, si determinino due sottospazi affini di dimensione 1 non aventi alcun vettore in comune.

E.19.3 Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$, verificare che l'insieme:

$$S := \{1 + ax + bx^2 \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio affine e calcolarne la dimensione.

E.19.4 Scrivere le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 4y + z + w = 3 \\ 5x + 6y + 3z + 2w = 5 \end{cases}$$

come sottospazio affine $\boldsymbol{v}_0 + E$ di $\mathbb{R}^4$, determinando esplicitamente un vettore $\boldsymbol{v}_0$ e una base per E.

19.8 Soluzioni degli esercizi

E.19.1 Per ogni $b \in \mathbb{R}$ il sistema S_b è ovviamente risolubile. L'insieme delle soluzioni è parallelo all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Ma, ovviamente, il sistema omogeneo associato non dipende da b. Pertanto i sottospazi affini delle soluzioni di S_b sono tutti paralleli a uno stesso sottospazio vettoriale E.

Notiamo, per inciso, che E ha come base $\boldsymbol{v}' = (2, -1)$. I sottospazi affini hanno pertanto tutte dimensione uguale a 1.

E.19.2 Sappiamo che un sottospazio affine di dimensione 1 di $V^2(O)$ è dato da tutti e soli i vettori aventi il punto finale su una retta r. Basta quindi considerare due rette r e r' parallele non coincidenti.

E.19.3 L'insieme S è, ovviamente, il sottospazio affine passante per 1 e parallelo al sottospazio vettoriale E generato da x e x^2. Dunque la dimensione di S è uguale alla dimensione di E, cioè 2.

E.19.4 Risolvendo il sistema troviamo:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t - u \\ y = 2t + \dfrac{1}{2}u \\ z = t \\ w = u \end{cases}$$

al variare di t e u in $\mathbb{R}$. La generica soluzione del sistema può allora essere scritta così:

$$(1, 0, 0, 0) + t(-3, 2, 1, 0) + u\left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Possiamo allora scrivere l'insieme delle soluzioni di questo sistema nel modo seguente:

$$(1, 0, 0, 0) + \left\langle (-3, 2, 1, 0), \left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right) \right\rangle.$$

CAPITOLO 20

Equazioni vettoriali di rette e piani

L'insieme dei vettori aventi il punto finale su una retta fissata o su un piano fissato può essere caratterizzato da un tipo particolare di equazione, detta equazione vettoriale. È possibile poi identificare tramite queste equazioni i vettori aventi il punto finale su semirette, segmenti e semispazi fissati.

20.1 Equazioni vettoriali di rette

Quel che diremo in questo paragrafo si applica sia al caso della geometria del piano sia al caso della geometria dello spazio.

Sia fissato un punto O nel piano o nello spazio. Consideriamo lo spazio vettoriale $V^2(O)$ dei vettori del piano applicati nel punto O o lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in O.

Abbiamo visto che, data una retta r, l'insieme dei vettori aventi il punto finale sulla retta r è un sottospazio affine di dimensione 1.

In particolare, dato un punto P_0 della retta r e considerata la retta r' passante per O e parallela a r, si ha che i punti della retta r sono tutti e soli i punti P per i quali

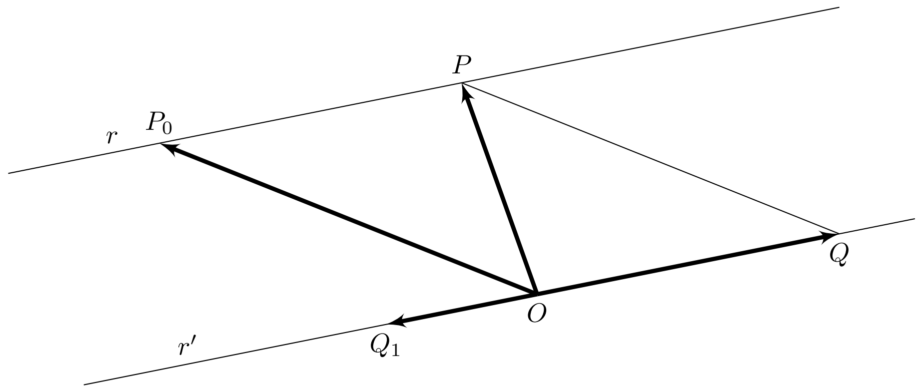
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$$

per qualche punto Q della retta r'.

Sappiamo d'altronde che, fissato un punto Q_1 sulla retta r' distinto dal punto O, i punti Q della r' sono tutti e soli i punti per i quali $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OQ_1}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Abbiamo pertanto che i punti della retta r sono tutti e soli i punti P per i quali

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}$$

per qualche numero reale t.



Abbiamo dimostrato il:

Teorema 20.1 *Sia data una retta r e un suo punto P_0. Sia r' la retta passante per O e parallela alla retta r e sia Q_1 un suo punto distinto da O.*

I punti P della retta r sono tutti e soli i punti per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}.$$

*Questa equazione viene chiamata **equazione vettoriale** della retta r e il vettore $\overrightarrow{OQ_1}$ viene detto **vettore direttore** della retta r.*

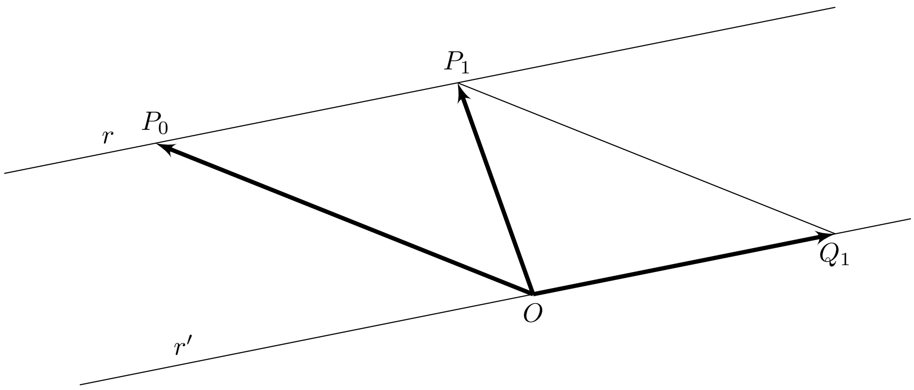
Definizione 20.2 Tutti i vettori $\overrightarrow{OQ}$ con $Q \in r'$ si dicono vettori **paralleli** alla retta r. △

Osservazione 20.3 Dalla definizione precedente vediamo che i vettori paralleli a una data retta formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1: in particolare il vettore nullo è parallelo a ogni retta. Ovviamente il vettore nullo non è però vettore direttore di nessuna retta (proprio perché non individua nessuna direzione). △

Osservazione 20.4 Notiamo che per determinare un'equazione vettoriale di una retta r, si devono scegliere due punti: il punto P_0 sulla retta r e il punto $Q_1 \neq O$ sulla retta r'. Pertanto la retta r ha infiniti vettori direttori e infinite equazioni vettoriali. △

Siano ora dati due punti P_0 e P_1 distinti. Vogliamo determinare un'equazione vettoriale della retta r passante per essi.

Consideriamo la retta r' passante per O e parallela alla retta r. Consideriamo su r' il punto Q_1 tale che il quadrilatero $OQ_1P_1P_0$ sia un parallelogramma (eventualmente degenere, nel caso in cui la retta r e la retta r' coincidano, cioè nel caso in cui la retta r passi per O). Notiamo che, poiché i punti P_1 e P_0 sono distinti, i punti Q_1 e O sono anch'essi distinti.



Dalla definizione di addizione tra vettori (regola del parallelogramma) si ha:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ_1}$$

da cui segue che il vettore

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OQ_1}$$

è parallelo alla retta r. Abbiamo pertanto il teorema:

Teorema 20.5 *La retta passante per due punti distinti P_0 e P_1 ha equazione vettoriale*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}).$$

Osservazione 20.6 Notiamo che per $t = 0$ abbiamo il punto P_0 e per $t = 1$ abbiamo il punto P_1. $\triangle$

20.2 Semirette e segmenti

Quel che diremo in questo paragrafo si applica sia al caso della geometria del piano sia al caso della geometria dello spazio.

Sia fissato un punto O nel piano o nello spazio. Consideriamo lo spazio vettoriale $V^2(O)$ dei vettori del piano applicati nel punto O o lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in O.

Se Q_1 è un punto distinto da O, per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare i punti Q tali che $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OQ_1}$:

- se $t > 0$ appartengono alla semiretta di r' avente origine in O e contenente il punto Q_1;

- se $t < 0$ appartengono alla semiretta di r' avente origine in O e non contenente il punto Q_1;

- se $0 < t < 1$ appartengono al segmento aperto di estremi i punti O e Q_1.

Da tutto ciò si può ricavare il:

Teorema 20.7 *Dati due punti distinti P_0 e P_1, i punti P tali che*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$$

- *se* $t > 0$ *appartengono alla semiretta di* r *avente origine in* P_0 *e contenente il punto* P_1*;*
- *se* $t < 0$ *appartengono alla semiretta di* r *avente origine in* P_0 *e non contenente il punto* P_1*;*
- *se* $0 < t < 1$ *appartengono al segmento aperto di estremi i punti* P_0 *e* P_1*.*

Dimostrazione Sia Q_1 il punto tale che $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$: quindi $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}$. Sia poi Q il punto tale che $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OQ_1}$. Osserviamo (con l'aiuto di una figura) che P appartiene alla semiretta origine in P_0 e contenente il punto P_1 se e solo se Q appartiene alla semiretta origine in O e contenente il punto Q_1. In modo analogo si dimostrano gli altri casi del teorema. ■

Nota 20.8 Nel teorema precedente abbiamo usato il termine semiretta per indicare la semiretta **aperta**, cioè non contenente l'origine P_0. I punti che si ottengono per $t \geq 0$ sono invece quelli della semiretta **chiusa** (cioè contenente l'origine) di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1. Analogamente i punti che si ottengono per $t \leq 0$ sono invece quelli della semiretta **chiusa** di r avente origine in P_0 e non contenente il punto P_1.

Allo stesso modo abbiamo usato il termine segmento per indicare il segmento **aperto**, cioè non contenente gli estremi. I punti che si ottengono per $0 \leq t \leq 1$ sono invece quelli della segmento **chiuso** (cioè contenente entrambi gli estremi) di estremi i punti P_0 e P_1. △

Esercizio di base 20.9 Sia dato il triangolo di vertici A, B e C. Determinare un'equazione vettoriale della mediana del triangolo ABC passante per A. (Ricordiamo che la mediana cercata è la retta passante per A e per il punto medio dei punti B e C).

20.3 Equazioni vettoriali di piani

Sia fissato un punto O dello spazio e sia $V^3(O)$ lo spazio vettoriale dei vettori applicati in O.

Abbiamo visto che, dato un piano π, l'insieme dei vettori aventi il punto finale nel piano π è un sottospazio affine di dimensione 2.

In particolare, dato un punto P_0 del piano π e considerato il piano π' passante per O e parallelo a π, si ha che i punti P del piano π sono tutti e soli i punti per i quali

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$$

per qualche punto Q del piano π'. Sappiamo d'altronde che, fissati due punti Q_1 e Q_2 del piano π' non allineati a O, i punti del piano π' sono tutti e soli i punti per i quali

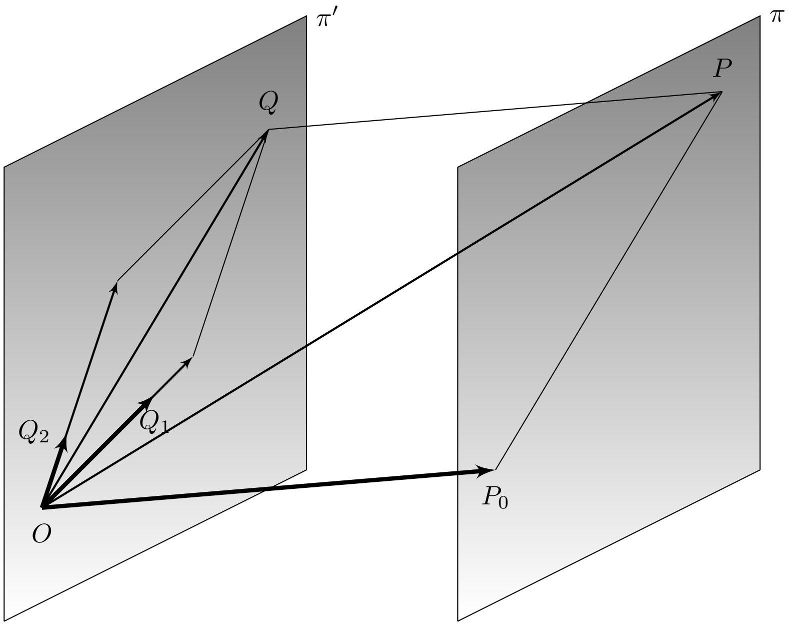
$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OQ_1} + u\overrightarrow{OQ_2}$$

per qualche t e u numeri reali.

Abbiamo pertanto che i punti P del piano π sono tutti e soli i punti per i quali

$$OP = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1} + u\overrightarrow{OQ_2}$$

per qualche t e u numeri reali.



Abbiamo dimostrato il:

Teorema 20.10 *Sia dato un piano π, un punto P_0 di π e due punti Q_1 e Q_2 appartenenti al piano π' passante per O e parallelo a π e tali che O, Q_1 e Q_2 non sono allineati.*

L'insieme dei punti P del piano π è dato da tutti e soli i punti P per i quali esistono $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1} + u\overrightarrow{OQ_2}.$$

*L'equazione precedente si chiama **equazione vettoriale** del piano e i vettori $\overrightarrow{OQ_1}$ e $\overrightarrow{OQ_2}$ si dicono **vettori direttori** del piano.*

Definizione 20.11 I vettori $\overrightarrow{OQ}$ aventi il punto finale Q sul piano π' si dicono **paralleli** al piano π. △

Osservazione 20.12 Dalla definizione precedente vediamo che i vettori paralleli a una data retta formano un sottospazio vettoriale di dimensione 2: in particolare il vettore nullo è parallelo a ogni piano. △

Osservazione 20.13 Notiamo che, per determinare un'equazione vettoriale del piano π, abbiamo dovuto scegliere tre punti: il punto P_0 sul piano π e due punti Q_1 e Q_2 appartenenti al piano π'. Pertanto il piano π ha infinite coppie di vettori direttori e infinite equazioni vettoriali. △

Sappiamo che, dati tre punti non allineati P_0, P_1 e P_2, esiste uno e un solo piano passante per essi. Vogliamo determinare una sua equazione vettoriale. Per far ciò usiamo un metodo analogo a quello usato nel teorema 20.5 per determinare un'equazione vettoriale della retta passante per due punti.

Consideriamo il vettore $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$. Il teorema 20.5 ci dice che il punto Q_1 appartiene alla retta r' passante per O e parallela alla retta r passante per P_0 e P_1.

Analogamente il vettore $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$ ha il punto finale Q_2 sulla retta s' passante per O e parallela alla retta s passante per P_0 e P_2.

D'altronde i tre punti P_0, P_1 e P_2 non sono allineati e quindi i vettori $\overrightarrow{OQ_1}$ e $\overrightarrow{OQ_2}$ sono linearmente indipendenti. Pertanto le rette r' e s', passanti entrambe per O, non coincidono. Esse determinano, pertanto, un piano π'. Quest'ultimo piano è parallelo al piano π dal momento che le rette r' e s' sono parallele alle rette r e s appartenenti al piano π.

Dal teorema 20.10 il piano π ha dunque equazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) + u(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}).$$

Abbiamo dimostrato la prima parte del seguente teorema.

Teorema 20.14 *Il piano π passante per tre punti P_0, P_1 e P_2 non allineati ha equazione vettoriale:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) + u(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}).$$

Se inoltre nell'equazione precedente si pone:

- $t > 0$, *otteniamo tutti e soli i punti appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e contenente il punto P_1;*
- $t < 0$, *otteniamo tutti e soli appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e non contenente il punto P_1;*
- $u > 0$, *otteniamo tutti e soli i punti appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e contenente il punto P_2;*
- $u < 0$, *otteniamo tutti e soli appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e non contenente il punto P_2.*

Dimostrazione Abbiamo già determinato l'equazione vettoriale del piano. Le caratterizzazioni dei semipiani possono essere condotte in modo analogo al teorema 20.7. ■

Nota 20.15 Nel teorema precedente abbiamo usato il termine semipiano per indicare un semipiano **aperto**, cioè non contenente la retta che lo delimita. Invece i punti che si ottengono per $t \geq 0$ sono quelli appartenenti al semipiano **chiuso** (cioè contenente la retta che lo delimita) di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e contenente il punto P_1. Analogamente per gli altri semipiani chiusi. △

20.4 Allineamento e complanarità

Nel teorema 12.10 abbiamo visto che i punti O, P_1 e P_2 sono allineati se e solo se i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ sono linearmente dipendenti. Vogliamo vedere se c'è un teorema analogo nel caso in cui il punto O sia sostituito da un punto P_0 qualsiasi. Più in generale ci chiediamo quando un numero qualunque di punti siano allineati. Abbiamo il:

Teorema 20.16 *I punti P_0, P_1, ..., P_n sono allineati se e solo se i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo innanzitutto che i punti siano allineati, cioè che esista una retta r che li contiene tutti. Supponendo che un vettore direttore della retta r sia $\boldsymbol{v}$, l'equazione vettoriale della retta r può allora essere scritta come

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\boldsymbol{v}.$$

Sia ora i un qualsiasi intero da 1 a n: poiché il punto P_i appartiene a r esiste un valore del parametro t_i per cui si ha $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP_0} + t_i\boldsymbol{v}$ o, equivalentemente $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0} = t_i\boldsymbol{v}$ cioè $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0}$ è multiplo di $\boldsymbol{v}$, vale a dire appartiene al sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$. Dunque i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ appartengono tutti al sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$ e pertanto il sottospazio che essi generano ha dimensione minore o uguale a 1.

Viceversa supponiamo che i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generino uno sottospazio di dimensione minore di 1. Dunque sono tutti multipli di un vettore non nullo $\boldsymbol{v}$. Consideriamo allora la retta r di equazione vettoriale

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\boldsymbol{v}.$$

Questa ovviamente contiene il punto P_0. Mostriamo che la retta r contiene anche ciascuno dei P_i per $1 \leq i \leq n$. Sappiamo che il vettore $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0}$ è multiplo di $\boldsymbol{v}$ cioè esiste un numero reale t_i tale che $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0} = t_i\boldsymbol{v}$. Pertanto si ottiene

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP_0} + t_i\boldsymbol{v}.$$

Dunque il punto P_i appartiene a r. ∎

In maniera analoga al teorema 20.16 possiamo dimostrare il:

Teorema 20.17 *I punti P_0, P_1, ..., P_n sono complanari se e solo se i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2.*

Esercizio di base 20.18 Dimostrare il teorema precedente.

20.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.20.9 Il punto medio dei punti B e C è il punto M tale che

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

pertanto un'equazione vettoriale della mediana cercata è:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}\right).$$

EB.20.18 Supponiamo innanzitutto che i punti siano complanari, cioè che esista un piano π che li contiene tutti. Supponendo che vettori direttori del piano π siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, l'equazione vettoriale del piano π può allora essere scritta come

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\boldsymbol{v} + u\boldsymbol{w}.$$

Sia ora i un qualsiasi intero da 1 a n: poiché il punto P_i appartiene a π esistono valori dei parametri t_i e u_i per cui si ha $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP_0} + t_i\boldsymbol{v} + u_i\boldsymbol{w}$ o, equivalentemente $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0} = t_i\boldsymbol{v} + u_i\boldsymbol{w}$ cioè $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, vale a dire appartiene al sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Dunque i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, $\dots$, $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ appartengono tutti al sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e pertanto il sottospazio che essi generano ha dimensione minore o uguale a 2.

Viceversa supponiamo che i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, $\dots$, $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generino uno sottospazio di dimensione minore di 2. Dunque sono tutti combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Consideriamo allora il piano π di equazione vettoriale

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\boldsymbol{v} + u\boldsymbol{w}.$$

Questo ovviamente contiene il punto P_0. Mostriamo che contiene anche ciascuno dei P_i per $1 \leq i \leq n$. Sappiamo che il vettore $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ cioè esistono numeri reali t_i e u_i tali che $\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_0} = t_i\boldsymbol{v} + u_i\boldsymbol{w}$. Pertanto si ottiene

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP_0} + t_i\boldsymbol{v} + u_i\boldsymbol{w}.$$

Dunque il punto P_i appartiene a π.

20.6 Sunto

Equazioni vettoriali di rette

Teorema *Sia data una retta r, un punto P_0 di r e un punto $Q_1 \neq O$ sulla retta r' parallela a r e passante per O.*

L'insieme dei punti P della retta r è dato da tutti e soli i punti P per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}.$$

*L'equazione precedente si chiama **equazione vettoriale** della retta e il vettore $\overrightarrow{OQ_1}$ viene detto **vettore direttore** della retta r.*

Definizione Data una retta r, sia r' la retta passante per O parallela a r. Tutti i vettori $\overrightarrow{OQ}$ con $Q \in r'$ si dicono vettori **paralleli** alla retta r. $\triangle$

Teorema *Dati due punti distinti P_0 e P_1, la retta r passante per essi ha equazione vettoriale:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}).$$

Inoltre i punti P che verificano l'equazione vettoriale,

- *se $t > 0$, appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1;*
- *se $t < 0$, appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e non contenente il punto P_1;*
- *se $0 < t < 1$, appartengono al segmento aperto di estremi i punti P_0 e P_1.*

Equazioni vettoriali di piani

Teorema *Sia dato un piano π, un punto P_0 di π e due punti Q_1 e Q_2 appartenenti al piano π' passante per O e parallelo a π e tali che O, Q_1 e Q_2 non sono allineati.*

L'insieme dei punti P del piano π è dato da tutti e soli i punti P per i quali esistono $t_1 \in \mathbb{R}$ e $t_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1} + u\overrightarrow{OQ_2}.$$

*L'equazione precedente si chiama **equazione vettoriale** del piano e i vettori $\overrightarrow{OQ_1}$ e $\overrightarrow{OQ_2}$ si dicono **vettori direttori** del piano.*

Definizione I vettori $\overrightarrow{OQ}$ aventi il punto finale Q sul piano π' si dicono **paralleli** al piano π. △

Teorema *Il piano π passante per tre punti P_0, P_1 e P_2 non allineati ha equazione vettoriale:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) + u(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$$

Se inoltre nell'equazione precedente si pone:

- $t > 0$, *otteniamo tutti e soli i punti appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e contenente il punto P_1;*

- $t < 0$, *otteniamo tutti e soli appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e non contenente il punto P_1;*

- $u > 0$, *otteniamo tutti e soli i punti appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e contenente il punto P_2;*

- $u < 0$, *otteniamo tutti e soli appartenenti al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e non contenente il punto P_2.*

Allineamento e complanarità

Teorema *I punti P_0, P_1, ..., P_n sono allineati se e solo se i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a* 1.

Teorema *I punti P_0, P_1, ..., P_n sono complanari se e solo se i vettori $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$, ..., $\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP_0}$ generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a* 2.

CAPITOLO 21

Riferimenti affini

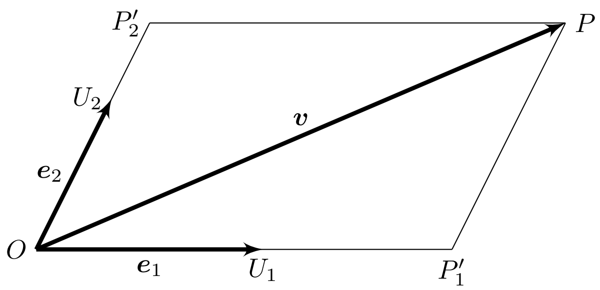
Iniziamo a studiare la geometria analitica del piano e dello spazio. Per ora ci limitiamo ad analizzare solo alcune proprietà del piano, le cosiddette proprietà affini. Introdurremo i sistemi di riferimento affine che permettono di associare a ciascun punto del piano una coppia di numeri reali e a ciascun punto dello spazio una terna di numeri reali.

21.1 Sistemi di riferimento affine nel piano

Abbiamo visto nel capitolo 17 che lo spazio vettoriale $V^2(O)$ dei vettori di un piano applicati in un punto O ha dimensione uguale a 2. Una sua base è data dai vettori:

$$\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$$

dove i punti O, U_1 e U_2 non sono allineati. Pertanto, per il teorema 17.3, ogni vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ di $V^2(O)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$.



Abbiamo cioè

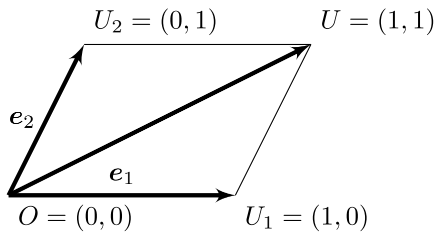
$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

Ciò ci permette di associare a ogni punto P del piano la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ delle componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$. Viceversa, a ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamo il vettore $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$.

Definizione 21.1 Un **sistema di riferimento affine** del piano è dato da un punto O del piano, detto **origine** del sistema di riferimento e da una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ e $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ di $V^2(O)$ (dunque O, U_1 e U_2 non sono allineati). I punti U_1 e U_2 vengono chiamati **punti unità**. La retta passante per O e U_1 viene detta **asse delle** x. La retta passante per O e U_2 viene detta **asse delle** y. L'asse delle x e l'asse delle y vengono chiamati **assi coordinati**.

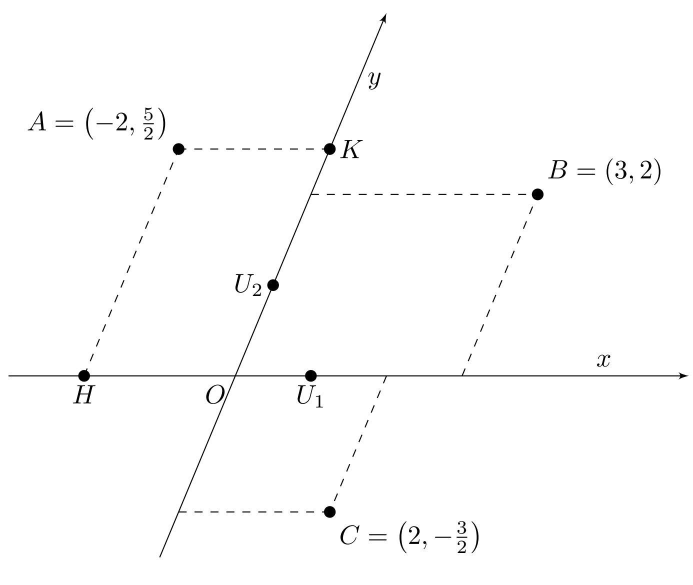
Dato un punto P, associamo ad esso la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ delle componenti del vettore $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ relative alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$. Viceversa, a ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamo il vettore $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$. Indichiamo ciò con il simbolo $P = (x, y)$. I numeri reali x e y vengono chiamati **coordinate** del punto P relative al sistema di riferimento. Il numero x viene chiamato **ascissa** del punto P. Il numero y viene chiamato **ordinata** del punto P. △

Esempio 21.2 Abbiamo $\overrightarrow{OO} = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2$. Pertanto l'origine del sistema di riferimento ha coordinate $(0, 0)$. Abbiamo $\overrightarrow{OU_1} = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2$. Pertanto le coordinate di U_1 sono $(1, 0)$. In modo analogo si vede che si ha $U_2 = (0, 1)$. Sia r_1 la retta passante per U_1 e parallela all'asse delle y. Sia r_2 la retta passante per U_2 e parallela all'asse delle x. Sia U il punto di intersezione delle rette r_1 e r_2. Poiché $\overrightarrow{OU} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ si ha $U = (1, 1)$.



△

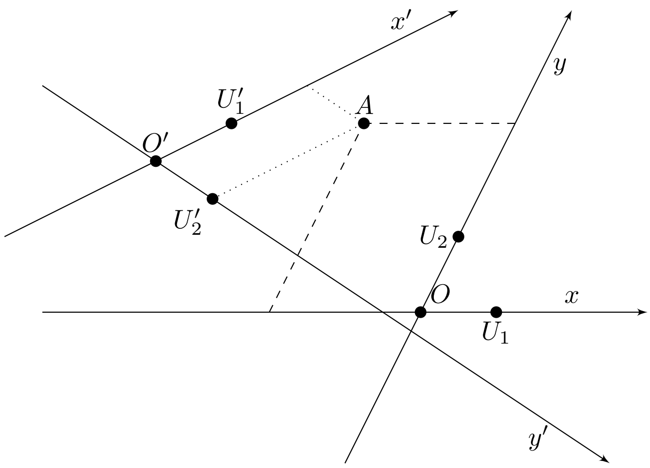
Esempio 21.3 Proviamo ora a rappresentare alcuni punti rispetto a un certo sistema di riferimento.



Notiamo che se da un punto, ad esempio A, tracciamo la retta parallela all'asse delle y, questa interseca l'asse delle x in un punto H. Il valore assoluto dell'ascissa di A è uguale al rapporto tra la distanza di H dall'origine e la distanza di U_1 dall'origine. Se il punto H sta sulla semiretta di origine O e contenente U_1 l'ascissa è positiva, se sta sulla semiretta non contenente U_1 (come avviene nel disegno dell'esempio), l'ascissa è negativa. In maniera analoga se tracciamo la retta parallela all'asse delle x passante per A_1, questa interseca l'asse delle y in un punto K da cui possiamo ricavare l'ordinata y di A. $\triangle$

Lo stesso punto ha in genere coordinate diverse rispetto a sistemi di riferimenti diversi, come possiamo vedere dal prossimo esempio

Esempio 21.4 Il punto A riprodotto in figura ha coordinate $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ rispetto al sistema di riferimento la cui origine è il punto O e i cui punti unità sono U_1 e U_2 e ha coordinate $(2, 1)$ rispetto al sistema di riferimento la cui origine è il punto O' e i cui punti unità sono U'_1 e U'_2.



$\triangle$

Esercizio di base 21.5 Dimostrare che i punti dell'asse delle x sono tutti e soli i punti aventi coordinate del tipo $(x, 0)$.

Esercizio di base 21.6 Dimostrare che i punti dell'asse delle y sono tutti e soli i punti aventi coordinate del tipo $(0, y)$.

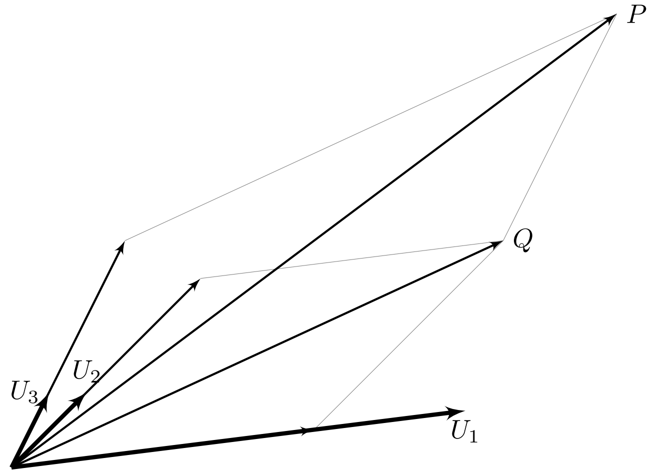
21.2 Sistemi di riferimento affine nello spazio

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per il piano possiamo introdurre anche nello spazio dei sistemi di riferimento affine. Ricordiamo che nel capitolo 17 abbiamo mostrato che lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O ha dimensione uguale a 3. Una sua base è data da tre vettori:

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OU_3}.$$

dove i punti O, U_1, U_2 e U_3 non sono complanari. Pertanto, per il teorema 17.3, ogni vettore $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ di $V^3(O)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$. Abbiamo cioè

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$



Ciò ci permette di associare a ogni punto P la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ delle componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$. Viceversa, a ogni terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associamo il vettore $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Possiamo quindi dare la:

Definizione 21.7 Un **sistema di riferimento affine** dello spazio è dato da un punto O dello spazio, detto **origine** del sistema di riferimento e da una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$, $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ e $\boldsymbol{e}_3 := \overrightarrow{OU_3}$ di $V^3(O)$ (dunque O, U_1, U_2 e U_3 non sono complanari). I punti U_1, U_2 e U_3 vengono chiamati **punti unità**. La retta passante per O e U_1 viene detta **asse delle** x. La retta passante per O e U_2 viene detta **asse delle** y. La retta passante per O e U_3 viene detta **asse delle** z. Gli assi delle x, delle y e delle z vengono chiamati **assi coordinati**. Il piano passante per O, U_1 e U_2 si chiama **piano** xy. Il piano passante per O, U_1 e U_3 si chiama **piano** xz. Il piano passante per O, U_2 e U_3 si chiama **piano** yz. I tre piani xy, xz e yz vengono chiamati **piani coordinati**.

Dato un punto P, associamo ad esso la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ delle componenti del vettore $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ relative alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$. Viceversa, a ogni terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associamo il vettore $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Indichiamo ciò con il simbolo $P = (x, y, z)$. I numeri reali x, y e z vengono chiamati **coordinate** del punto P relative al sistema di riferimento. $\triangle$

Ovviamente, come già avviene per il piano lo stesso punto ha coordinate diverse rispetto a sistemi di riferimento differenti.

21.3 Punto medio

D'ora in poi supporremo di aver fissato, una volta per tutte, un sistema di riferimento affine. Nel piano avremo quindi fissato un'origine O e una base di $V^2(O)$, nello spazio avremo fissato un'origine O e una base di $V^3(O)$.

Il teorema 11.21 ci dà una formula vettoriale per il calcolo del punto medio di due punti A e B nel piano o nello spazio. Rispetto a un sistema di riferimento affine questa formula può essere facilmente tradotta in termini di coordinate di punti. Abbiamo quindi nel piano:

Teorema 21.8 *Dati due punti $A := (x_1, y_1)$ e $B := (x_2, y_2)$ del piano, il loro punto medio M è dato da*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Esercizio di base 21.9 Dimostrare in dettaglio il teorema precedente.

Osservazione 21.10 Per dimostrare il teorema precedente abbiamo essenzialmente "tradotto" un'equazione vettoriale in equazioni in termini di coordinate. Molti altri risultati che daremo saranno dimostrati utilizzando questo approccio, senza però dare esplicitamente ogni volta tutti i dettagli. △

Esempio 21.11 Il punto medio dei punti $A := (1, 2)$ e $C := (3, 8)$ del piano è il punto $M := (2, 5)$. △

Analogamente nello spazio abbiamo

Teorema 21.12 *Dati due punti $A := (x_1, y_1, z_1)$ e $B := (x_2, y_2, z_2)$ dello spazio, il loro punto medio M è dato da*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Ricordiamo che, dato un punto P_0, chiamiamo **punto simmetrico** del punto A rispetto al punto P_0, il punto B tale che il punto P_0 sia il punto medio dei punti A e B. Dunque utilizzando le formule che danno il punto medio è facile determinare il simmetrico di un punto rispetto a un altro.

Esercizio di base 21.13

a. Determinare le coordinate del punto B simmetrico di $A := (1, 2)$ rispetto all'origine O.

b. Determinare poi le coordinate del punto C simmetrico di $A := (1, 2)$ rispetto al punto $P_0 := (3, -5)$. △

Esercizio di base 21.14

a. Determinare le coordinate del punto B simmetrico di $A := (1, 3, -1)$ rispetto all'origine O.

b. Determinare poi le coordinate del punto C simmetrico di $A := (1, 3, -1)$ rispetto al punto $P_0 := (2, -2, 5)$. △

21.4 Allineamento e complanarità

Dal teorema 20.16 segue immediatamente il:

Teorema 21.15 *I punti $P_0 := (x_0, y_0)$, $P_1 := (x_1, y_1)$, …, $P_n := (x_n, y_n)$ del piano sono allineati se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Nel caso particolare in cui abbiamo a che fare con tre punti abbiamo il:

Corollario 21.16 *I punti $P_0 := (x_0, y_0)$, $P_1 := (x_1, y_1)$, e $P_2 := (x_2, y_2)$ del piano sono allineati se e solo*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Esempio 21.17 Ci chiediamo se i tre punti

$$P_0 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad P_1 := \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{7}\right), \quad P_2 := \left(-\frac{1}{5}, 4\right)$$

sono allineati.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ \frac{6}{7} - \frac{1}{3} & 4 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ \frac{11}{21} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo e quindi i tre punti sono allineati. △

Nel caso in cui si considerino punti nello spazio abbiamo, sempre dal teorema 20.16,

Teorema 21.18 *I punti dello spazio $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, …, $P_n := (x_n, y_n, z_n)$ sono allineati se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0, z_n - z_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & \dots & z_n - z_0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Il teorema 20.17 ci dà invece il:

Teorema 21.19 *I punti dello spazio $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, …, $P_n := (x_n, y_n, z_n)$ sono complanari se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0, z_n - z_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & \dots & z_n - z_0 \end{pmatrix} \leq 2.$$

Nel caso particolare in cui abbiamo a che fare con quattro punti abbiamo il:

Corollario 21.20 *I punti* $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ *e* $P_3 := (x_3, y_3, z_3)$ *dello spazio sono complanari se e solo*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

21.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.21.5 Il punto P appartiene all'asse delle x se e solo se $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OU_1} = x\overrightarrow{OU_1} + 0\overrightarrow{OU_2}$ e quindi $P = (x, 0)$.

EB.21.6 Il punto P appartiene all'asse delle y se e solo se $\overrightarrow{OP} = y\overrightarrow{OU_2} = 0\overrightarrow{OU_1} + y\overrightarrow{OU_2}$ e quindi $P = (0, y)$.

EB.21.9 Dire che $A := (x_1, y_1)$ e $B := (x_2, y_2)$ è equivalente a dire che $\overrightarrow{OA} = x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\overrightarrow{OB} = x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Dal teorema 11.21 abbiamo

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{y_1 + y_2}{2}\boldsymbol{e}_2.$$

Dunque

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

EB.21.13

a. Le coordinate (x, y) del punto B simmetrico di $A = (1, 2)$ rispetto a O devono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{2} = 0 \\ \dfrac{2 + y}{2} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi $B = (-1, -2)$.

b. Le coordinate (x, y) del punto C simmetrico di $A = (1, 2)$ rispetto a $P_0 = (3, -5)$ devono verificare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{2} = 3 \\ \dfrac{2 + y}{2} = -5 \end{cases}$$

Abbiamo quindi $C = (5, -12)$.

EB.21.14

a. Le coordinate (x, y, z) del punto B simmetrico di $A = (1, 3, -1)$ rispetto a O devono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{2} = 0 \\ \dfrac{3 + y}{2} = 0 \\ \dfrac{-1 + y}{2} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi $B = (-1, -3, 1)$.

b. Le coordinate (x, y, z) del punto C simmetrico di $A = (1, 3, -1)$ rispetto al punto $P_0 = (2, -2, 5)$ devono verificare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{2} = 2 \\ \dfrac{3+y}{2} = -2 \\ \dfrac{-1+y}{2} = 5 \end{cases}$$

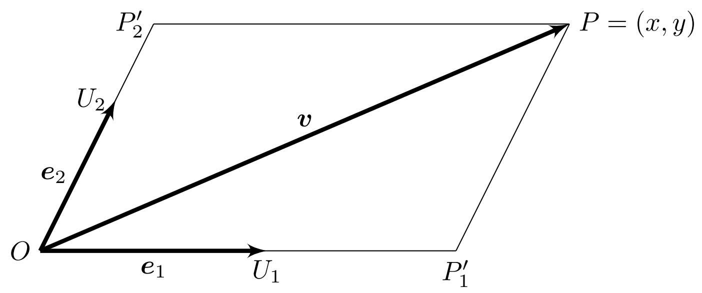
Abbiamo quindi $C = (3, -7, 11)$.

21.6 Sunto

Sistemi di riferimento affine nel piano

Definizione Un **sistema di riferimento affine** del piano è dato da un punto O del piano, detto **origine** del sistema di riferimento e da una base $\mathbf{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ e $\mathbf{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ di $V^2(O)$ (dunque O, U_1 e U_2 non sono allineati). I punti U_1 e U_2 vengono chiamati **punti unità**. La retta passante per O e U_1 viene detta **asse delle** x. La retta passante per O e U_2 viene detta **asse delle** y. L'asse delle x e l'asse delle y vengono chiamati **assi coordinati**.

Dato un punto P, associamo ad esso la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ delle componenti del vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ relative alla base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$. Viceversa, a ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamo il vettore $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Indichiamo ciò con il simbolo $P = (x, y)$. I numeri reali x e y vengono chiamati **coordinate** del punto P relative al sistema di riferimento. Il numero x viene chiamato **ascissa** del punto P. Il numero y viene chiamato **ordinata** del punto P. $\triangle$



Sistemi di riferimento affine nello spazio

Definizione Un **sistema di riferimento affine** dello spazio è dato da un punto O dello spazio, detto **origine** del sistema di riferimento e da una base $\mathbf{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$, $\mathbf{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ e $\mathbf{e}_3 := \overrightarrow{OU_3}$ di $V^3(O)$ (dunque O, U_1, U_2 e U_3 non sono complanari). I punti U_1, U_2 e U_3 vengono chiamati **punti unità**. La retta passante per O e U_1 viene detta **asse delle** x. La retta passante per O e U_2 viene detta **asse delle** y. La retta passante per O e U_3 viene detta **asse delle** z. Gli assi delle x, delle y e delle z vengono chiamati **assi coordinati**. Il piano passante per O, U_1 e U_2 si chiama **piano** xy. Il piano passante per O, U_1 e U_3 si chiama **piano** xz. Il piano passante per O, U_2 e U_3 si chiama **piano** yz. I tre piani xy, xz e yz vengono chiamati **piani coordinati**.

Dato un punto P, associamo ad esso la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ delle componenti del vettore $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ relative alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$. Viceversa, a ogni terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associamo il vettore $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Indichiamo ciò con il simbolo $P = (x, y, z)$. I numeri reali x, y e z vengono chiamati **coordinate** del punto P relative al sistema di riferimento. △

Punto medio

Teorema *Dati due punti $A := (x_1, y_1)$ e $B := (x_2, y_2)$ del piano, il loro punto medio M è dato da*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Teorema *Dati due punti $A := (x_1, y_1, z_1)$ e $B := (x_2, y_2, z_2)$ dello spazio, il loro punto medio M è dato da*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Allineamento e complanarità

Teorema *I punti $P_0 := (x_0, y_0)$, $P_1 := (x_1, y_1)$, $\dots$, $P_n := (x_n, y_n)$ del piano sono allineati se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Corollario *I punti $P_0 := (x_0, y_0)$, $P_1 := (x_1, y_1)$, e $P_2 := (x_2, y_2)$ del piano sono allineati se e solo*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema *I punti $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, $\dots$, $P_n := (x_n, y_n, z_n)$ dello spazio sono allineati se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0, z_n - z_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & \dots & z_n - z_0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Teorema *I punti $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, $\dots$, $P_n := (x_n, y_n, z_n)$ dello spazio sono complanari se e solo se i vettori*

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \dots, (x_n - x_0, y_n - y_0, z_n - z_0)$$

generano uno sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2, cioè se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \dots & x_n - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & \dots & y_n - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & \dots & z_n - z_0 \end{pmatrix} \leq 2.$$

Corollario *I punti $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 := (x_3, y_3, z_3)$ dello spazio sono complanari se e solo*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

CAPITOLO 22

Equazioni parametriche

In questo capitolo vediamo come rette nel piano e nello spazio e piani nello spazio possano essere rappresentati per mezzo di equazioni parametriche. In questo capitolo sia fissato, una volta per tutte, un sistema di riferimento affine. Nel piano avremo quindi fissato un'origine O e una base di $V^2(O)$, nello spazio avremo fissato un'origine O e una base di $V^3(O)$.

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine dato da un'origine O e dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ di una base di $V^2(O)$.

22.1 Equazioni parametriche di rette nel piano

Una retta r nel piano può essere individuata per mezzo di un suo punto $P_0 \coloneqq (x_0, y_0)$ e da un punto $Q_1 \coloneqq (l, m)$ distinto dall'origine O (ciò implica che l e m non possono essere entrambi nulli) e appartenente alla retta r' parallela a r e passante per O. Dal teorema 20.1 sappiamo che un punto generico $P \coloneqq (x, y)$ del piano appartiene a r se e solo se esiste un numero reale t tale che

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}.$$

Se utilizziamo le coordinate dei punti coinvolti possiamo riscrivere questa equazione così

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x_0\boldsymbol{e}_1 + y_0\boldsymbol{e}_2 + t(l\boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2)$$

ovvero

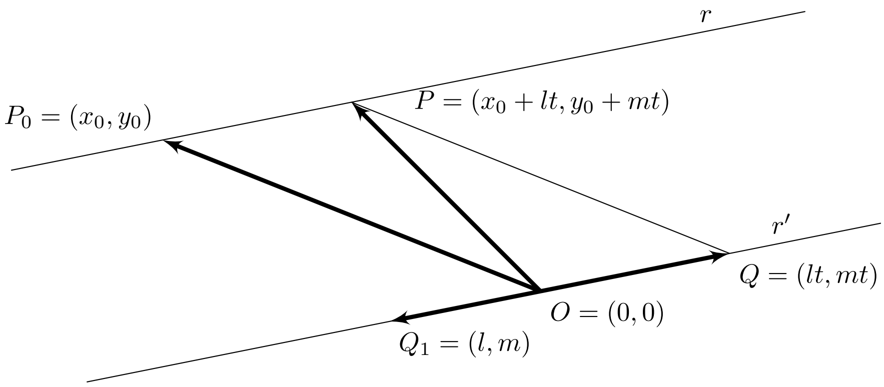
$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = (x_0 + lt)\boldsymbol{e}_1 + (y_0 + mt)\boldsymbol{e}_2.$$

Poiché i vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ formano una base ciò può avvenire se e solo $x = x_0 + lt$ e $y = y_0 + mt$. Dunque riassumendo abbiamo il:

Teorema 22.1 *Sia r una retta nel piano e sia r' la retta parallela a r e passante per O. Scegliamo un punto $P_0 \coloneqq (x_0, y_0)$ su r e un punto $Q_1 \coloneqq (l, m)$, distinto dal punto O, sulla retta r'. L'insieme dei punti della retta r è dato da tutti e soli i punti $P \coloneqq (x, y)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si chiamano ***equazioni parametriche*** *della retta. I numeri reali* (l, m) *si chiamano* ***parametri direttori*** *della retta. Inoltre il vettore* $\boldsymbol{v} := (l, m)$ *è parallelo alla retta* r*.*



Esempio 22.2 Consideriamo la retta r passante per il punto $P_0 := (1, 2)$ e parallela alla retta r' passante per O e per $Q_1 := (4, -7)$. Vogliamo determinare l'equazione vettoriale e le equazioni parametriche della retta r.

Notiamo che i vettori aventi i punti finali sulla retta r' sono tutti e soli i vettori che sono multipli del vettore $\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OQ_1}$. Pertanto, posto $\boldsymbol{v}_0 := \overrightarrow{OP_0}$, un'equazione vettoriale della retta r è

$$r \colon \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + t\boldsymbol{v}_1.$$

Dunque la retta r ha equazioni parametriche

$$r \colon \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \end{cases}.$$

Assegnando valori numerici al parametro t e sostituendoli nelle equazioni parametriche di r otteniamo le coordinate di punti sulla retta. Ad esempio per $t = 0$ otteniamo il punto di coordinate $(1, 2)$ (cioè il punto P_0), per $t = 1$ otteniamo il punto $(5, -5)$, per $t = -\frac{2}{3}$ otteniamo il punto $\left(-\frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$ e così via. △

Osservazione 22.3 I parametri direttori di una retta non possono essere entrambi nulli. Inoltre i parametri direttori di una retta fissata non sono univocamente determinati. Essi infatti sono le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta e sono quindi tutte proporzionali tra loro, cioè differiscono una dall'altra per un fattore di proporzionalità. △

Esempio 22.4 Riprendiamo la retta r dell'esempio 22.2. Nelle equazioni parametriche che ne abbiamo date abbiamo scelto come parametri direttori $(4, -7)$. Avremmo potuto scegliere come parametri direttori una qualsiasi coppia di numeri proporzionali a questa, ad esempio $(-4, 7)$ o $(8, -14)$ o ancora $\left(1, -\frac{7}{4}\right)$. Le equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 7t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2 - 14t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - \dfrac{7}{4}t \end{cases}$$

sono tutte equazioni parametriche della stessa retta r.

Possiamo ottenere altre equazioni parametriche della retta r anche in altro modo: finora abbiamo variato solo la scelta dei parametri direttori: possiamo anche variare la scelta del punto P_0 sulla retta r. Nell'esempio 22.2 abbiamo visto che i punti $(5,-5)$ e $\left(-\frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$ appartengono a r. Ecco quindi altre equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = -5 - 14t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} - 4t \\ y = \dfrac{20}{3} + 7t \end{cases}.$$

Abbiamo quindi infinite possibili scelte per le equazioni parametriche di una retta r. Confrontiamo adesso tra loro due di queste scelte, ad esempio queste

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = -5 - 14t \end{cases}.$$

Queste sono due parametrizzazioni diverse della stessa retta: ovviamente sostituendo lo stesso valore al valore di t otteniamo, in generale, punti diversi. Ad esempio per $t = 2$ otteniamo nel primo caso il punto $(9,-12)$ e nel secondo il punto $(21,-33)$. Tuttavia al variare di t dobbiamo ottenere complessivamente sia nel primo che nel secondo caso tutti i punti di r. Ad esempio il punto $(9,-12)$ che abbiamo trovato nella prima parametrizzazione per $t = 2$, lo troviamo anche nella seconda parametrizzazione in corrispondenza del valore $t = -\frac{1}{2}$. △

Esercizio di base 22.5 Determinare l'equazione vettoriale e le equazioni parametriche dell'asse delle x.

Esercizio di base 22.6 Determinare l'equazione vettoriale e le equazioni parametriche dell'asse delle y.

Esercizio di base 22.7 Determinare l'equazione vettoriale e le equazioni parametriche della retta r che passa per l'origine O ed è parallela al vettore $\overrightarrow{OU_1} + \overrightarrow{OU_2}$.

Dall'equazione vettoriale della retta passante per due punti distinti (teorema 20.5) otteniamo immediatamente il:

Teorema 22.8 *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1)$, la retta r passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}$$

I parametri direttori della retta passante per due punti sono dati dalle differenze delle coordinate di due suoi punti distinti.

Esempio 22.9 La retta r passante per i punti $A \coloneqq (1, 2)$ e $B \coloneqq (5, 7)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + (5 - 1)t \\ y = 2 + (7 - 2)t \end{cases}$$

cioè

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$$

△

Esempio 22.10 La retta r passante per i punti $A \coloneqq (1, 2)$ e $B \coloneqq (5, 2)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + (5 - 1)t \\ y = 2 + (2 - 2)t \end{cases}$$

cioè

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 \end{cases}$$

△

Esempio 22.11 La retta r passante per i punti $A \coloneqq (1, 2)$ e $B \coloneqq (1, 7)$ ha equazioni parametriche:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 5t \end{cases}$$

△

22.2 Posizione reciproca di rette nel piano

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come la stessa retta possa essere rappresentata per mezzo di equazioni parametriche diverse. Non è però chiaro come si può stabilire se due sistemi di equazioni parametriche rappresentano la stessa retta, o, più in generale se rappresentano rette parallele e distinte o rette incidenti.

Iniziamo con l'osservare che i parametri direttori di una retta danno la direzione della retta ad essa parallela e passante per l'origine. Si ottiene quindi immediatamente il:

Teorema 22.12 *Due rette sono parallele se e solo se esse hanno parametri direttori proporzionali. In altre parole, le rette r e s di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = x_0' + \ \ l_2 t \\ y = y_0' + m_2 t \end{cases}$$

sono parallele se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Esercizio di base 22.13 Dimostrare il precedente teorema.

Esempio 22.14 Consideriamo le due rette

$$r\colon \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = -5 + 6t \end{cases}.$$

Poiché r ha parametri direttori $(2, -3)$ e s ha parametri direttori $(-4, 6)$, per il teorema 22.12 sono parallele. Ci chiediamo se sono parallele e distinte o parallele e coincidenti. Possiamo prendere un punto qualunque sulla retta r, ad esempio $A := (3, 1)$, e verificare se appartiene alla retta s: nel caso la risposta sia affermativa le due rette coincidono, altrimenti sono distinte. Per verificare se A appartiene a s consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3 = 7 - 4t \\ 1 = -5 + 6t \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4t = 4 \\ -6t = -6 \end{cases}.$$

Questo sistema è risolubile (con soluzione $t = 1$) e, dunque, A appartiene a s. Pertanto la retta r e la retta s coincidono. △

Esempio 22.15 Consideriamo le due rette

$$r\colon \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 5 + 6t \end{cases}.$$

Come nell'esempio precedente le due rette sono parallele. Vediamo se il punto $A := (3, 1)$ di r appartiene anche a s. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3 = 7 - 4t \\ 1 = 5 + 6t \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4t = 4 \\ -6t = -4 \end{cases}.$$

Questo sistema non è risolubile e, dunque, A non appartiene a s. Pertanto la retta r e la retta s sono rette parallele non coincidenti. △

Esempio 22.16 Consideriamo le due rette

$$r\colon \begin{cases} x = 12 + t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 + t \end{cases}.$$

Poiché r ha parametri direttori $(1, -3)$ e s ha parametri direttori $(-4, 1)$ per il teorema 22.12 non sono parallele. Pertanto sono incidenti. Vogliamo determinare la loro intersezione. Cerchiamo cioè un punto $P := (\bar{x}, \bar{y})$ che stia sulla retta r cioè tale che

$$\begin{cases} \bar{x} = 12 + t \\ \bar{y} = 4 - 3t \end{cases}$$

per qualche valore di t, e che stia sulla retta s cioè tale che

$$\begin{cases} \bar{x} = 2 - 4t \\ \bar{y} = 1 + t \end{cases}.$$

Potremmo allora considerare il sistema

$$\begin{cases} 12 + t = 2 - 4t \\ 4 - 3t = 1 + t \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 5t = -10 \\ -4t = -3 \end{cases}.$$

Questo è un sistema non risolubile, quindi apparentemente, non siamo in grado di trovare un punto di intersezione. In realtà nello scrivere il sistema la cui soluzione ci dovrebbe dare il punto di intersezione abbiamo commesso un grave errore. Uguagliando in questo modo le equazioni parametriche di r e di s abbiamo implicitamente supposto che il punto di intersezione tra r e s si ottiene assegnando lo stesso valore al parametro nelle equazioni di r e nelle equazioni di s: non c'è motivo perché ciò avvenga (anche se in qualche caso particolare può capitare).

Riscriviamo allora le equazioni di s usando un parametro differente

$$s\colon \begin{cases} x = 2 - 4u \\ y = 1 + u \end{cases}.$$

Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} 12 + t = 2 - 4u \\ 4 - 3t = 1 + u \end{cases}$$

vale a dire

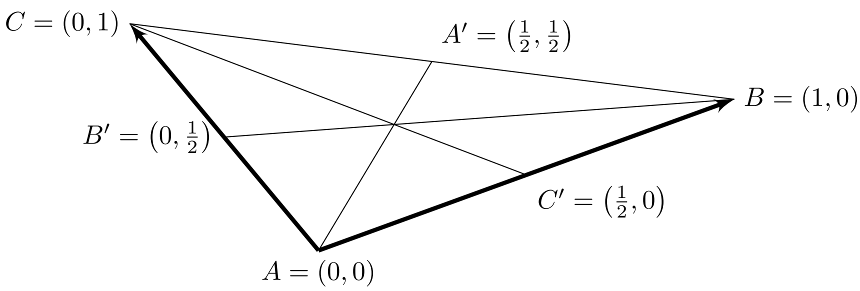
$$\begin{cases} t + 4u = -10 \\ -3t - u = -3 \end{cases}.$$

Risolvendo questo sistema troviamo $t = 2$ e $u = -3$. Se sostituiamo ora il valore $t = 2$ nelle equazioni di r troviamo il punto $P = (14, -2)$. Avremmo trovato ovviamente lo stesso punto sostituendo il valore -3 nelle equazioni parametriche di s. $\triangle$

Esempio 22.17 Vogliamo dimostrare il teorema che afferma che le tre mediane di un triangolo si intersecano in un punto. Questo punto viene detto **baricentro** del triangolo.

Indichiamo con A, B e C i vertici del triangolo. Consideriamo lo spazio vettoriale $V^2(A)$ dei vettori applicati in A. Un sistema di riferimento con origine in A è dato dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{AB}$ e $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{AC}$. Rispetto a questo sistema di riferimento i tre vertici hanno quindi coordinate:

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1).$$



I punti medi dei lati hanno coordinate:

$$A' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B' = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad C' = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

e quindi le tre mediane hanno equazioni:

$$r_{AA'} : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$
$$r_{BB'} : \begin{cases} x = \phantom{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}}t \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$
$$r_{CC'} : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ y = \phantom{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}}t \end{cases}$$

Si verifica facilmente che le mediane $r_{AA'}$ e $r_{BB'}$ si intersecano nel punto

$$H := \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

e che tale punto appartiene alla mediana $r_{CC'}$.

Abbiamo dimostrato il teorema. $\triangle$

Esercizio di base 22.18 Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A := (1,1)$ e $B := (2,2)$ e della retta s passante per $C := (1,-1)$ e $D := (-3,2)$. Determinare poi, se esistono, i punti di intersezione delle due rette.

22.3 Equazioni parametriche di rette nello spazio

Vogliamo ora introdurre il concetto di equazioni parametriche di una retta nello spazio. La trattazione non è essenzialmente diversa da quell fatta nel piano: semplicemente abbiamo una coordinata in più di cui tenere conto. Per questo motivo ometteremo la dimostrazione dei risultati.

Teorema 22.19 *Sia r una retta nello spazio e sia r' la retta parallela a r e passante per O. Scegliamo un punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ su r e un punto*

$Q_1 := (l, m, n)$, distinto dal punto O, sulla retta r'. L'insieme dei punti della retta r è dato da tutti e soli i punti $P := (x, y, z)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ nt \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si chiamano ***equazioni parametriche*** *della retta. I numeri reali (l, m, n) si chiamano* ***parametri direttori*** *della retta. Inoltre il vettore $\boldsymbol{v} := (l, m, n)$ è parallelo alla retta r.*

Esempio 22.20

1. L'asse delle x ha equazione vettoriale

$$\boldsymbol{v} = t\overrightarrow{OU_1}$$

ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

2. L'asse delle y ha equazione vettoriale

$$\boldsymbol{v} = t\overrightarrow{OU_2}$$

ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

3. L'asse delle z ha equazione vettoriale

$$\boldsymbol{v} = t\overrightarrow{OU_3}$$

ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

$\triangle$

Osservazione 22.21 I parametri direttori di una retta non possono essere tutti nulli. Inoltre i parametri direttori di una retta fissata non sono univocamente determinati. Essi infatti sono le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta e sono quindi tutte proporzionali tra loro, cioè differiscono una dall'altra per un fattore di proporzionalità. $\triangle$

Teorema 22.22 *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, la retta r passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

I parametri direttori della retta passante per due punti sono dati dalle differenze delle coordinate di due suoi punti distinti.

Teorema 22.23 *Due rette sono parallele se e solo se esse hanno parametri direttori proporzionali. In altre parole, le rette r e s di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ n_1 t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = x_0' + \ \ l_2 t \\ y = y_0' + m_2 t \\ z = z_0' + \ n_2 t \end{cases}$$

sono parallele se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Esercizio di base 22.24 Sia r la retta passante per il punto $P_0 \coloneqq (1, 2, 3)$ e per il punto $P_1 \coloneqq (-1, 1, 2)$. Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per $A \coloneqq (2, 4, 5)$ e parallela alla retta r. Verificare poi se la retta s coincide con la retta r.

22.4 Equazioni parametriche di piani

Anche i piani nello spazio possono essere rappresentati per mezzo di equazioni parametriche. Una volta ancora, traducendo in termini di coordinate il teorema 20.10, otteniamo il:

Teorema 22.25 *Sia π un piano nello spazio e sia π' il piano parallelo a π e passante per O. Scegliamo un punto $P_0 \coloneqq (x_0, y_0, z_0)$ su π e due punti $Q_1 \coloneqq (l_1, m_1, n_1)$ e $Q_2 \coloneqq (l_2, m_2, n_2)$ sul piano π' e tali che O, Q_1 e Q_2 non siano allineati. L'insieme dei punti del piano π è dato da tutti e soli i punti $P \coloneqq (x, y, z)$ per i quali esistono $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t + \ \ l_2 u \\ y = y_0 + m_1 t + m_2 u \\ z = z_0 + \ n_1 t + \ n_2 u \end{cases}.$$

*Le equazioni precedenti si chiamano **equazioni parametriche** del piano.*

Esempio 22.26 Il piano xy ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$

Il piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = u \end{cases}.$$

Il piano yz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = u \end{cases}$$

△

Esempio 22.27 Il piano passante per $A := (1, 2, 3)$ parallelo al piano xy ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + u \, . \\ z = 3 \end{cases}$$

△

Esercizio di base 22.28 Dato il piano π di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + t + u \, . \\ z = 1 - t - u \end{cases}$$

△

determinare il piano σ parallelo a π e passante per $A := (1, 4, 5)$.

Dal teorema 20.14 deriva il:

Teorema 22.29 *Dati tre punti non allineati $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ dello spazio, il piano π passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)u \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)u \, . \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)u \end{cases}$$

22.5 Semirette, semipiani e segmenti

Dal teorema 20.7 segue immediatamente il:

Teorema 22.30 *Siano $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1)$ due punti distinti del piano e sia r la retta passante per essi. I punti $P := (x, y)$ tali che*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}$$

- *se $t > 0$ appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1;*
- *se $t < 0$ appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e non contenente il punto P_1;*
- *se $0 < t < 1$ appartengono al segmento aperto di estremi i punti P_0 e P_1.*

Analogamente nello spazio abbiamo

Teorema 22.31 *Siano $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ due punti distinti dello spazio e sia r la retta passante per essi. I punti $P := (x, y, z)$ tali che*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

- *se $t > 0$ appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1;*
- *se $t < 0$ appartengono alla semiretta di r avente origine in P_0 e non contenente il punto P_1;*
- *se $0 < t < 1$ appartengono al segmento aperto di estremi i punti P_0 e P_1.*

Esempio 22.32 Consideriamo i punti $P_0 := (1, 2)$, $P_1 := (3, 5)$ e $A := (5, 8)$. Verifichiamo se il punto A appartiene al segmento di estremi P_0 e P_1. La retta r passante per P_0 e P_1 ha equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Il sistema:

$$\begin{cases} 5 = 1 + 2t \\ 8 = 2 + 3t \end{cases}$$

è risolubile e la sua unica soluzione è $t = 2$. Pertanto il punto A, pur appartenendo alla semiretta di r avente origine in P_0 e passante per P_1, non appartiene al segmento di estremi P_0 e P_1. △

Infine nello spazio abbiamo il:

Teorema 22.33 *Siano $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ tre punti non allineati dello spazio e sia π il piano passante per essi. I punti $P := (x, y, z)$ tali che*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)u \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)u \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)u \end{cases} .$$

- *per $t > 0$ appartengono al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e contenente il punto P_1;*
- *per $t < 0$ appartengono al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_2 e non contenente il punto P_1;*
- *per $u > 0$ appartengono al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e contenente il punto P_2;*
- *per $u < 0$ appartengono al semipiano di π delimitato dalla retta passante per i punti P_0 e P_1 e non contenente il punto P_2.*

Nota 22.34 Nei teoremi precedenti abbiamo usato il termine semiretta, semipiano e segmento per indicare insiemi aperti, cioè senza il bordo. Per ottenere i corrispondenti insiemi chiusi dobbiamo, ad esempio, sostituire alla disuguaglianza $t > 0$ la disuguaglianza $t \geq 0$ e similmente per le altre disuguaglianze. △

22.6 Soluzioni degli esercizi di base

EB.22.5 Ricordiamo che per determinare un'equazione vettoriale (e quindi poi equazioni parametriche) di una retta (in questo caso l'asse delle x) dobbiamo scegliere un punto sulla retta che funga da punto "iniziale" (possiamo scegliere in questo caso il punto O). Dobbiamo poi scegliere un punto diverso dall'origine che stia sulla retta passante per l'origine e parallela alla retta data: il vettore congiungente l'origine con questo punto dà il vettore direttore della retta. Dal momento che l'asse della x passa per l'origine la retta parallela ad esso e passante per l'origine è l'asse delle x stesso. Come punto su questa retta distinto dall'origine, possiamo scegliere il punto U_1.

I vettori $\overrightarrow{OP}$ aventi i loro vertici P sull'asse delle x sono allora tutti e soli i vettori del tipo:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + t\overrightarrow{OU_1},$$

vale a dire

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OU_1}.$$

Abbiamo determinato un'equazione vettoriale dell'asse delle x. Pertanto l'asse delle x ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}.$$

Avremmo potuto scegliere come punto iniziale un qualsiasi punto P_0 sull'asse delle x e un qualsiasi punto $Q_1 \neq O$ sull'asse delle x per ottenere il vettore direttore. In tal caso avremmo ottenuto l'equazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}.$$

D'altronde si ha $\overrightarrow{OP_0} = a\overrightarrow{OU_1}$, per qualche numero reale a, e $\overrightarrow{OQ_1} = b\overrightarrow{OU_1}$ per qualche numero reale non nullo b. Fissati quindi comunque $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, le equazioni

$$\begin{cases} x = a + bt \\ y = 0 \end{cases}$$

sono equazioni parametriche dell'asse delle x.

EB.22.6 Nel caso dell'asse delle y ci si comporta in modo analogo. Un'equazione vettoriale dell'asse delle y è

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OU_2}$$

da cui derivano le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Altre equazioni vettoriali sono:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ_1}$$

con P_0 punto dell'asse delle y e Q_1 punto dell'asse delle y distinto da O. Pertanto, fissati comunque $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, le equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = a + bt \end{cases}$$

sono equazioni parametriche dell'asse delle y.

EB.22.7 Un'equazione vettoriale della retta r è:

$$\overrightarrow{OP} = t(\overrightarrow{OU_1} + \overrightarrow{OU_2})$$

da cui derivano le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}.$$

Altre equazioni parametriche di r sono, per esempio:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \end{cases}.$$

EB.22.13 La retta r è parallela al vettore $\boldsymbol{u}$ avente componenti (l_1, m_1) relative alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$. Analogamente la retta s è parallela al vettore $\boldsymbol{v}$ avente componenti (l_2, m_2). Pertanto le rette r e s sono parallele se e solo se i due vettori (che sono entrambi non nulli) $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono linearmente dipendenti. Ciò succede se e solo se il rango della matrice

$$M := \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

avente come colonne le componenti dei due vettori relativamente alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è uguale a 1.

EB.22.18 Le due rette hanno equazioni parametriche:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad s\colon \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases}.$$

Dal momento che i parametri direttori delle due rette non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Si intersecano quindi in un punto. Cerchiamolo.

Un punto $P := (a, b)$ appartiene ad ambedue le rette se esistono due numeri reali t e u (non necessariamente uguali) tali che:

$$\begin{cases} a = 1 + t \\ b = 1 + t \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - 4u \\ b = -1 + 3u \end{cases}$$

Cerchiamo pertanto le soluzioni del seguente sistema nelle incognite t e u:

$$\begin{cases} 1 + t = 1 - 4u \\ 1 + t = -1 + 3u \end{cases}$$

Otteniamo

$$t = -\frac{8}{7} \quad u = \frac{2}{7}.$$

Sostituendo il valore ottenuto per t nelle equazioni parametriche della retta r otteniamo il punto di intersezione

$$P = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Notiamo che, sostituendo il valore ottenuto di u nelle equazioni parametriche della retta s, otteniamo ovviamente lo stesso risultato.

EB.22.24 Facendo la differenza delle coordinate dei punti P_1 e P_0 otteniamo i parametri direttori: $(-1-1, 1-2, 2-3) = (-2, -1, -1)$. Possiamo scegliere per la retta s gli stessi parametri direttori. Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo le equazioni parametriche della retta s:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 - \ \ t \\ z = 5 - \ \ t \end{cases}$$

La retta r e la retta s coincidono se e solo se il punto P_0 (o un qualunque altro punto di r) appartiene a s. Ciò avviene se e solo se esiste un numero reale t tale che

$$\begin{cases} 1 = 2 - 2t \\ 2 = 4 - \ \ t \\ 3 = 5 - \ \ t \end{cases}$$

Si vede subito che questo sistema non è risolubile e dunque le rette r e s non coincidono.

EB.22.28 È sufficiente cambiare i termini noti nelle equazioni parametriche di π:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t + u \\ z = 5 - t - u \end{cases} .$$

22.7 Sunto

Equazioni parametriche di rette nel piano

Teorema *Sia r una retta nel piano e sia r' la retta parallela a r e passante per O. Scegliamo un punto $P_0 := (x_0, y_0)$ su r e un punto $Q_1 := (l, m)$, distinto dal punto O, sulla retta r'. L'insieme dei punti della retta r è dato da tutti e soli i punti $P := (x, y)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si chiamano ***equazioni parametriche*** *della retta. I numeri reali (l, m) si chiamano* ***parametri direttori*** *della retta. Inoltre il vettore $\boldsymbol{v} := (l, m)$ è parallelo alla retta r.*

Osservazione I parametri direttori di una retta non possono essere entrambi nulli. Inoltre i parametri direttori di una retta fissata non sono univocamente determinati. Essi infatti sono le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta e sono quindi tutte proporzionali tra loro, cioè differiscono una dall'altra per un fattore di proporzionalità. △

Teorema *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1)$, la retta r passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}$$

I parametri direttori della retta passante per due punti sono dati dalle differenze delle coordinate di due suoi punti distinti. Inoltre

- *per $t > 0$ si ottengono punti della semiretta di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1;*
- *per $t < 0$ si ottengono punti della semiretta di r avente origine in P_0 e non contenente il punto P_1;*
- *per $0 < t < 1$ si ottengono punti del segmento aperto di estremi i punti P_0 e P_1.*

Teorema *Due rette sono parallele se e solo se esse hanno parametri direttori proporzionali. In altre parole, le rette r e s di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ \ l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \end{cases}$$

sono parallele se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Equazioni parametriche di rette nello spazio

Teorema *Sia r una retta nello spazio e sia r' la retta parallela a r e passante per O. Scegliamo un punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ su r e un punto $Q_1 := (l, m, n)$, distinto dal punto O, sulla retta r'. L'insieme dei punti della retta r è dato da tutti e soli i punti $P := (x, y, z)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ \ nt \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si chiamano ***equazioni parametriche*** *della retta. I numeri reali (l, m, n) si chiamano* ***parametri direttori*** *della retta. Inoltre il vettore $\boldsymbol{v} := (l, m, n)$ è parallelo alla retta r.*

Osservazione I parametri direttori di una retta non possono essere tutti nulli. Inoltre i parametri direttori di una retta fissata non sono univocamente determinati. Essi infatti sono le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta e sono quindi tutte proporzionali tra loro, cioè differiscono una dall'altra per un fattore di proporzionalità. $\triangle$

Teorema *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$, la retta r passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

I parametri direttori della retta passante per due punti sono dati dalle differenze delle coordinate di due suoi punti distinti. Inoltre

- *per $t > 0$ si ottengono punti della semiretta di r avente origine in P_0 e contenente il punto P_1;*

• *per* $t < 0$ *si ottengono punti della semiretta di* r *avente origine in* P_0 *e non contenente il punto* P_1*;*

• *per* $0 < t < 1$ *si ottengono punti del segmento aperto di estremi i punti* P_0 *e* P_1*.*

Teorema *Due rette sono parallele se e solo se esse hanno parametri direttori proporzionali. In altre parole, le rette* r *e* s *di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ n_1 t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ \ l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \\ z = z'_0 + \ n_2 t \end{cases}$$

sono parallele se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Equazioni parametriche di piani

Teorema *Sia* π *un piano nello spazio e sia* π' *il piano parallelo a* π *e passante per* O*. Scegliamo un punto* $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ *su* π *e due punti* $Q_1 := (l_1, m_1, n_1)$ *e* $Q_2 := (l_2, m_2, n_2)$ *sul piano* π' *e tali che* O*,* Q_1 *e* Q_2 *non siano allineati. L'insieme dei punti del piano* π *è dato da tutti e soli i punti* $P := (x, y, z)$ *per i quali esistono* $t \in \mathbb{R}$ *e* $u \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t + \ \ l_2 u \\ y = y_0 + m_1 t + m_2 u \\ z = z_0 + \ n_1 t + \ n_2 u \end{cases}.$$

Le equazioni precedenti si chiamano ***equazioni parametriche*** *del piano.*

Teorema *Dati tre punti non allineati* $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$*,* $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ *dello spazio, il piano* π *passante per essi ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)u \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)u \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)u \end{cases}.$$

Inoltre

• *per* $t > 0$ *si ottengono punti del semipiano di* π *delimitato dalla retta passante per i punti* P_0 *e* P_2 *e contenente il punto* P_1*;*

• *per* $t < 0$ *si ottengono punti del semipiano di* π *delimitato dalla retta passante per i punti* P_0 *e* P_2 *e non contenente il punto* P_1*;*

• *per* $u > 0$ *si ottengono punti del semipiano di* π *delimitato dalla retta passante per i punti* P_0 *e* P_1 *e contenente il punto* P_2*;*

• *per* $u < 0$ *si ottengono punti del semipiano di* π *delimitato dalla retta passante per i punti* P_0 *e* P_1 *e non contenente il punto* P_2*.*

22.8 Esercizi

Sia fissato nel piano o nello spazio un sistema di riferimento affine.

E.22.1 Determinare le equazioni parametriche della retta del piano passante per i punti $A \coloneqq (1,1)$ e $B \coloneqq (2,3)$.

E.22.2 Sia dato nel piano il punto $A \coloneqq (1,2)$.

a. Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A e parallela alla retta r avente equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

b. Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A e parallela all'asse delle x.

c. Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A e parallela all'asse delle y.

E.22.3 Verificare se le rette del piano

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

sono parallele e determinare gli eventuali punti di intersezione.

E.22.4 Verificare se le rette del piano

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 6t \end{cases}$$

sono parallele e determinare gli eventuali punti di intersezione.

E.22.5 Verificare se le rette del piano

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = \ 2 - 4t \\ y = \dfrac{1}{2} + 6t \end{cases}$$

sono parallele e determinare gli eventuali punti di intersezione.

E.22.6 Siano dati nello spazio il punto $A \coloneqq (3,1,4)$ e la retta r avente equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \ \ 2 + \ t \\ y = \ \ 1 + 4t \\ z = -1 - 5t \end{cases}.$$

Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A e parallela alla retta r.

E.22.7 Sia α il piano passante per i punti $A \coloneqq (9,5,7)$, $B \coloneqq (1,2,3)$ e $C \coloneqq (2,5,10)$. Determinare le equazioni parametriche del piano β passante per il punto $D = (2,4,6)$ e parallelo al piano α. Verificare se i piani α e β sono coincidenti.

22.9 Soluzioni degli esercizi

E.22.1 La retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

E.22.2 La generica retta passante per $A \coloneqq (1, 2)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 2 + mt \end{cases}$$

dove (l, m) sono i parametri direttori. Possiamo prendere come parametri direttori della retta cercata i parametri direttori della retta cui essa deve essere parallela. Distinguiamo ora i tre casi.

a. La retta r ha parametri direttori $(1, -1)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

b. L'asse delle x ha parametri direttori $(1, 0)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \end{cases}$$

c. L'asse delle y ha parametri direttori $(0, 1)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \end{cases}$$

E.22.3 Le due rette hanno parametri direttori $(2, -3)$ e $(-1, 1)$. Poiché i parametri direttori non sono proporzionali le due rette non sono parallele.

Determiniamo il loro punto di intersezione. Abbiamo il sistema nelle incognite t e u:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - u \\ 2 - 3t = 3 + u \end{cases}$$

che ha come soluzione:

$$t = -2 \quad u = 5.$$

Il punto di intersezione ha quindi coordinate $(-3, 8)$.

E.22.4 Le due rette hanno parametri direttori $(2, -3)$ e $(-4, 6)$. Poiché i parametri direttori sono proporzionali le due rette sono parallele.

Controlliamo se le due rette coincidono. Per far ciò verifichiamo se il punto $P_0 \coloneqq (1, 2)$, che ovviamente appartiene alla retta r, appartiene anche alla retta s. Sostituendo le coordinate di P_0 nelle equazioni parametriche della retta s otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2 - 4t \\ 2 = 3 + 6t \end{cases}$$

il quale non ha soluzioni. Pertanto le due rette sono parallele non coincidenti e quindi non hanno punti di intersezione.

E.22.5 Le due rette hanno parametri direttori $(2, -3)$ e $(-4, 6)$ e quindi sono parallele.
Controlliamo se le due rette coincidono. Per far ciò verifichiamo se $P_0 \coloneqq (1, 2)$ appartiene alla retta s. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2 - 4t \\ 2 = \dfrac{1}{2} + 6t \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = \frac{1}{4}$. Pertanto le due rette sono parallele coincidenti.

E.22.6 La generica retta passante per $A \coloneqq (3, 1, 4)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 4 + nt \end{cases}$$

dove (l, m, n) sono i parametri direttori. Possiamo prendere come parametri direttori della retta cercata i parametri direttori della retta r cui essa deve essere parallela. La retta r ha parametri direttori $(1, 4, -5)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \end{cases}.$$

E.22.7 Il piano α ha equazioni parametriche

$$\alpha\colon \begin{cases} x = 9 - 8t - 7u \\ y = 5 - 3t \\ z = 7 - 4t + 3u \end{cases}$$

Il piano β ha equazioni parametriche

$$\beta\colon \begin{cases} x = 2 - 8t - 7u \\ y = 4 - 3t \\ z = 6 - 4t + 3u \end{cases}$$

Per verificare se i piani α e β coincidono, verifichiamo se i punti A, B, C e D sono complanari. Utilizziamo il corollario 21.20. La matrice avente come colonne le componenti dei vettori $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ è:

$$\begin{pmatrix} -8 & -7 & -7 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché il suo rango è 3, il punto D non appartiene al piano α. I piani α e β sono quindi paralleli distinti.

CAPITOLO 23

Equazioni cartesiane nel piano

Sia fissato in un piano un sistema di riferimento affine con origine in un punto O. Abbiamo visto nel capitolo 22 che i punti di una retta sono caratterizzati da equazioni parametriche. Ora vediamo che le rette sono caratterizzate anche da altre equazioni, dette equazioni cartesiane. Questo tipo di equazioni ci permette di caratterizzare i punti di semipiani per mezzo di semplici disequazioni.

23.1 Equazioni cartesiane di rette

Abbiamo visto nel capitolo 22 che i punti dell'asse delle x sono tutti e soli i punti del tipo $(x, 0)$ al variare di x nei reali. In altre parole i punti dell'asse delle x sono tutti e soli i punti $P \coloneqq (x, y)$ che soddisfano l'equazione $y = 0$.

Analogamente i punti dell'asse delle y sono tutti e soli i punti $P \coloneqq (x, y)$ che soddisfano l'equazione $x = 0$. Pertanto i punti $P \coloneqq (x, y)$ di ognuno dei due assi del sistema di riferimento affine sono caratterizzati da un'equazione lineare in x e y.

Consideriamo allora più in generale un'equazione del tipo:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0).$$

Questa equazione forma un sistema lineare di un'equazione nelle due incognite x e y, la cui matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ha rango 1, dal momento che $(a, b) \neq (0, 0)$. Anche la matrice completa del sistema ha ovviamente rango 1 e, pertanto, il sistema è risolubile e l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione $2 - 1 = 1$, cioè una retta.

Finora abbiamo mostrato che l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado nelle incognite x e y è l'insieme dei punti di una retta. Non abbiamo però finora mostrato che **ogni** retta r è l'insieme delle soluzioni di qualche equazione di primo grado nelle incognite x e y, non abbiamo cioè mostrato che ogni retta r ha equazione cartesiana.

Possiamo allora ragionare in questo modo. Prendiamo una retta r e scegliamo su di essa due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1)$. Vogliamo trovare un'equazione cartesiana del tipo $ax + by + c = 0$ con a e b non entrambi nulli che rappresenti la retta r. Le coordinate dei punti P_0 e P_1 devono soddisfare l'equazione. Deve cioè essere:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$$

Poiché noi stiamo cercando di determinare a, b e c, possiamo pensare queste condizioni come un sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b e c (si osservi che x_0, y_0, x_1 e y_1 sono in questo caso coordinate di punti che supponiamo noti). Dal momento che abbiamo 3 incognite e 2 equazioni esiste almeno una soluzione non banale a questo sistema. In una tale soluzione a e b non possono essere ambedue nulli (altrimenti si avrebbe anche $c = 0$). Esiste allora almeno un'equazione del tipo $ax+by+c = 0$ con a e b non entrambi nulli che è soddisfatta dalle coordinate dei punti P_0 e P_1. Questa equazione cartesiana rappresenta una retta che, dovendo passare per i punti P_0 e P_1 di r, necessariamente coincide con r. Abbiamo così dimostrato il:

Teorema 23.1 *L'insieme delle soluzioni di un'equazione del tipo*

$$ax + by + c = 0 \quad \textit{con } (a, b) \neq (0, 0),$$

è l'insieme dei punti di una retta r.

Viceversa, data una retta r, esiste un'equazione del tipo di cui sopra le cui soluzioni sono i punti della retta r.

L'equazione viene detta ***equazione cartesiana*** *della retta.*

Osservazione 23.2 Ogni equazione equivalente all'equazione $ax + by + c = 0$ ha le stesse soluzioni ed è quindi un'equazione cartesiana della stessa retta. Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che le equazioni equivalenti all'equazione $ax + by + c = 0$ sono tutte e sole le sue multiple per una costante non nulla, cioè le equazioni del tipo $kax + kby + kc = 0$ con $k \neq 0$. Dunque l'equazione cartesiana di una retta nel piano può essere scelta in infiniti modi. △

Esempio 23.3 Abbiamo visto che l'asse delle x ha equazione cartesiana

$$y = 0.$$

Anche l'equazione $3y = 0$ ha come soluzioni i punti dell'asse delle x. Più in generale, ogni equazione $ay = 0$ con $a \neq 0$ è equazione cartesiana dell'asse delle x. △

Esempio 23.4 Abbiamo visto anche che l'equazione

$$x = 0$$

è un'equazione cartesiana dell'asse delle y. Ogni equazione $ax = 0$ con $a \neq 0$ è equazione cartesiana dell'asse delle y. △

Esempio 23.5 L'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$x - y = 0$$

è dato dai punti $P := (t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$, cioè dai punti finali dei vettori $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OU}$ con $U := (1, 1)$. Abbiamo pertanto i punti della retta r passante per l'origine O e il punto U. Lasciamo al lettore il compito di disegnare questa retta. △

Esempio 23.6 L'insieme delle soluzioni dell'equazione:

$$x - y + 1 = 0$$

è dato da:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \phantom{-1+{}} t \end{cases}$$

Abbiamo quindi una retta s parallela alla retta r dell'esempio 23.5. Lasciamo al lettore il compito di disegnare questa retta. △

Esempio 23.7 Consideriamo l'equazione

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

Si tratta dell'equazione cartesiana di una retta r. Determiniamo due suoi punti. Ponendo $x := 0$ otteniamo il punto $A := \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Ponendo $y := 0$ otteniamo il punto $B := \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Lasciamo al lettore il compito di disegnare questa retta. △

Esercizio di base 23.8 Fissato un sistema di riferimento affine, disegnare la retta di equazione cartesiana

$$3x + 4y + 5 = 0.$$ △

Esercizio di base 23.9 Fissato un sistema di riferimento affine, disegnare la retta di equazione cartesiana

$$3x + 5 = 0.$$ △

Esercizio di base 23.10 Fissato un sistema di riferimento affine, disegnare la retta di equazione cartesiana

$$4y + 5 = 0.$$ △

23.2 Equazione cartesiana ed equazioni parametriche

Abbiamo mostrato che ogni retta può essere rappresentata sia tramite equazioni parametriche, che tramite un'equazione cartesiana. Come si può passare da una rappresentazione all'altra?

Data l'equazione cartesiana di una retta r:

$$ax + by + c = 0$$

possiamo trovare le equazioni parametriche della retta, semplicemente "risolvendo" l'equazione cartesiana, ovvero esprimendo un'incognita in funzione dell'altra e poi ponendo quest'ultima uguale a un parametro t. Vediamolo in dettaglio con un esempio.

Esempio 23.11 Sia data la retta di equazione cartesiana

$$2x + 3y - 4 = 0.$$

Ora, poiché il coefficiente della x è diverso da 0, si ha:

$$x = 2 - \frac{3}{2}y.$$

Posto $y := t$, possiamo allora scrivere le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{3}{2}t \\ y = \phantom{2 - \dfrac{3}{2}}t \end{cases}$$

△

Esercizio di base 23.12 Determinare le equazioni parametriche della retta r avente equazione cartesiana

$$x + 2y + 1 = 0.$$

△

Esercizio di base 23.13 Determinare le equazioni parametriche della retta r avente equazione cartesiana

$$2y + 1 = 0.$$

△

Esercizio di base 23.14 Determinare le equazioni parametriche della retta r avente equazione cartesiana

$$x + 1 = 0.$$

△

Consideriamo di nuovo l'esempio 23.11: dalle equazioni parametriche della retta r vediamo che essa ha parametri direttori $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$. Poiché possiamo scegliere come coppia di parametri direttori una qualsiasi coppia a questa proporzionale, anche $(-3, 2)$ sono parametri direttori della retta. Dal momento che eravamo partiti dall'equazione cartesiana $2x + 3y - 4 = 0$ notiamo che i parametri direttori sembrano essere in relazione con i coefficienti della x e della y in questa equazione. Ciò può essere meglio precisato:

Proposizione 23.15 *La retta r di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ ha parametri direttori $(-b, a)$.*

Dimostrazione Consideriamo prima il caso in cui $a \neq 0$. Come nell'esempio 23.11 possiamo allora esprimere x in funzione di y così: $x = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$ e ottenere le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a}t \\ y = \phantom{-\dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a}}t \end{cases}$$

da cui vediamo che r ha parametri direttori $\left(-\frac{b}{a}, 1\right)$. Una coppia proporzionale a questa è $(-b, a)$, come desiderato.

Consideriamo ora il caso in cui $a = 0$ (e, dunque deve essere $b \neq 0$). La retta ha allora equazione $by + c = 0$ da cui ricaviamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \quad t \\ y = -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

e quindi vediamo che r ha parametri direttori $(1, 0)$. Questa coppia è proporzionale alla coppia $(-b, a) = (-b, 0)$. ■

Abbiamo inoltre visto che si può passare dall'equazione cartesiana alle equazioni parametriche semplicemente risolvendo l'equazione cartesiana. Ma come possiamo passare dalle equazioni parametriche a un'equazione cartesiana? Vediamolo con qualche esempio.

Esempio 23.16 Sia data la retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + \ \ t \\ y = 2 + 3t \end{cases}.$$

Dalla prima equazione otteniamo:

$$t = x - 1.$$

Sostituendo t nella seconda otteniamo:

$$3x - y - 1 = 0,$$

che è un'equazione cartesiana della retta. △

Esercizio di base 23.17 Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}.$$

△

Esercizio di base 23.18 Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \end{cases}.$$

△

Esercizio di base 23.19 Determinare un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \end{cases}.$$

△

23.3 Retta passante per due punti

Siano dati due punti distinti P_0 e P_1. Sappiamo che per essi passa una e una sola retta r. Vogliamo determinare un'equazione cartesiana della retta r. Abbiamo vari metodi. Possiamo, ad esempio, scriverne le equazioni parametriche usando la formula descritta nel teorema 22.8 e da esse passiamo a un'equazione cartesiana eliminando il parametro.

Esempio 23.20 Dati i punti $P_0 := (1, 3)$ e $P_1 := (4, 2)$, le equazioni parametriche della retta passante per essi sono

$$\begin{cases} x = 1 + (4 - 1)t \\ y = 3 + (2 - 3)t \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo ora $t = 3 - y$ che sostituito nella prima dà $x = 1 + 3(3 - y)$ ovvero $x + 3y - 10 = 0$, che è l'equazione cartesiana della retta. Può essere utile verificare che non abbiamo sbagliato qualche calcolo, sostituendo in questa equazione le coordinate dei punti P_0 e P_1. Abbiamo: $1 + 3 \cdot 3 - 10 = 0$ e $4 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$. Dunque l'equazione trovata rappresenta effettivamente una retta passante per i punti P_0 e P_1. $\triangle$

Un altro metodo che possiamo utilizzare è quello di scrivere una generica equazione cartesiana di una retta $ax + by + c = 0$ e determinare a, b e c imponendo il passaggio per i punti P_0 e P_1. Abbiamo usato (in astratto) questo metodo per dimostrare il teorema 23.1.

Esempio 23.21 Vogliamo determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per i punti O e $A := (2, 1)$. Consideriamo l'equazione cartesiana generica

$$ax + by + c = 0.$$

Dobbiamo determinare a b e c. Imponiamo il passaggio per O e per A. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 0a + 0b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a = k$, $b = -2k$, $c = 0$. Abbiamo infinite terne. Ne scegliamo una (non banale) ponendo $k := 1$. Determiniamo in questo modo l'equazione:

$$x - 2y = 0.$$

Notiamo che avremmo potuto assegnare qualsiasi numero reale non nullo al parametro k. Scegliendo, per esempio, $k := -\frac{2}{3}$, avremmo ottenuto l'equazione:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 0.$$

che è ovviamente equivalente all'equazione ottenuta in precedenza. $\triangle$

Esercizio di base 23.22 Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per $A := (1,1)$ e $B := (3,2)$.

Esercizio di base 23.23 Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per $A := (1,1)$ e $B := (1,2)$.

Esercizio di base 23.24 Determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per $A := (1,1)$ e $B := (2,1)$.

Vogliamo dare un altro metodo ancora per determinare la retta passante per due punti distinti. Il corollario 21.16 ci dice che un punto $P := (x,y)$ è allineato ai punti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_1 := (x_1, y_1)$ se e solo se:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Poiché una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante possiamo analogamente scrivere:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante della matrice secondo la prima riga otteniamo un polinomio di primo grado nelle variabili x e y. Osserviamo infatti che, poiché i punti P_0 e P_1 sono distinti, i coefficienti delle variabili non sono entrambi nulli. Abbiamo dimostrato il:

Teorema 23.25 *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_2 := (x_1, y_1)$, la retta r passante per essi ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Osservazione 23.26 Osserviamo che il vettore $\boldsymbol{v} := (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, le cui componenti coincidono con la seconda riga della matrice, è parallelo alla retta r. △

Esempio 23.27 Vogliamo determinare un'equazione cartesiana della retta r passante per i punti $A := (1,6)$ e $B := (3,2)$. Applichiamo il teorema precedente. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 6 \\ 3 - 1 & 2 - 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi:

$$-4(x-1) - 2(y-6) = 0.$$

Otteniamo pertanto l'equazione cartesiana della retta r:

$$r\colon\ -4x - 2y + 16 = 0.$$ △

Teorema 23.28 *Sia $\boldsymbol{v} := (l, m)$ un vettore non nullo e $P_0 := (x_0, y_0)$ un punto. La retta r passante per P_0 e parallela al vettore $\boldsymbol{v}$ ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostrazione La retta r cercata passa per il punto P_0 e per il punto Q con $\overrightarrow{OQ} := \overrightarrow{OP_0} + \boldsymbol{v}$. Applicando il teorema 23.25 otteniamo ciò che vogliamo. ■

Esempio 23.29 La retta r passante per il punto $P_0 := (1, 2)$ e parallela al vettore $\boldsymbol{v} := (3, 2)$ ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi:

$$r\colon 2x - 3y + 4 = 0.$$

△

23.4 Intersezione di rette

Siano date le due rette di equazione cartesiane:

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Vogliamo determinare gli eventuali punti di intersezione delle due rette. Essi sono dati dai punti le cui coordinate verificano entrambe le equazioni. Dobbiamo quindi determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 23.30 Cerchiamo i punti di intersezione delle rette:

$$r\colon x + y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon 2x + y + 1 = 0.$$

Abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(0, -1)$. Pertanto le due rette si intersecano nel punto $A := (0, -1)$. △

Esempio 23.31 Cerchiamo i punti di intersezione delle rette:

$$r\colon x + y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon 2x + 2y + 3 = 0$$

Il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

non ha ovviamente alcuna soluzione. Le due rette sono pertanto parallele distinte. △

Esempio 23.32 Cerchiamo i punti di intersezione delle rette:

$$r\colon x + y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon 2x + 2y + 2 = 0.$$

Il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

ha ovviamente infinite soluzioni. Le due rette sono pertanto parallele coincidenti. △

Riguardiamo i tre esempi precedenti. Nell'esempio 23.32 le due rette sono parallele coincidenti; inoltre le terne date dai coefficienti delle variabili e dai termini noti sono proporzionali. Nell'esempio 23.31 le due rette sono parallele distinte; le due terne di cui sopra non sono proporzionali; sono però proporzionali le coppie dei coefficienti delle variabili. Nell'esempio 23.30 le due rette si intersecano in un punto; le coppie dei coefficienti delle variabili non sono proporzionali. Tutto ciò può essere generalizzato nel seguente teorema.

Teorema 23.33 *Siano date le rette di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Posto:

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A' := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

si ha:

- *le rette sono incidenti se e solo se* $\operatorname{rk} A = 2$*;*
- *le rette sono parallele distinte se e solo se* $\operatorname{rk} A = 1$ *e* $\operatorname{rk} A' = 2$*;*
- *le rette sono parallele coincidenti se e solo se* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 1$.

Dimostrazione La dimostrazione deriva subito dal teorema di Rouché Capelli dopo aver osservato che la matrice completa del sistema dato dalle equazioni cartesiane delle due rette è:

$$A'' := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$$

e che $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A''$. ■

Osservazione 23.34 Il rango della matrice A è sempre maggiore o uguale a 1 poiché $(a, b) \neq (0, 0)$. △

Osservazione 23.35 Dall'ultima parte del teorema precedente ricaviamo un'informazione che avevamo già visto in precedenza: ogni retta ha infinite equazioni cartesiane tutte tra loro proporzionali. △

23.5 Fasci di rette

Esempio 23.36 Consideriamo la retta r di equazione cartesiana:

$$r\colon x + 2y + 3 = 0.$$

Consideriamo, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta r_k di equazione cartesiana:

$$r_k\colon x + 2y + k = 0.$$

Ovviamente se $k = 3$ otteniamo la retta r. Abbiamo cioè $r_3 = r$. Se poniamo, per esempio, $k = 1$ otteniamo la retta r_1 di equazione:

$$r_1\colon x + 2y + 1 = 0,$$

che, per il teorema 23.33, è parallela alla retta r. Notiamo che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta r_k è parallela alla retta r. △

Tutto ciò viene generalizzato nel seguente teorema.

Teorema 23.37 *Data una retta r di equazione cartesiana:*

$$r\colon ax + by + c = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta r_k avente equazione cartesiana

$$r_k\colon ax + by + k = 0.$$

è parallela alla retta r.

Viceversa, ogni retta parallela alla retta r ha equazione cartesiana del tipo

$$ax + by + k = 0.$$

*L'insieme di tutte le rette parallele a r viene chiamato **fascio** di rette parallele.*

DIMOSTRAZIONE Il fatto che ogni retta r_k sia parallela alla retta r deriva dal teorema 23.33.

Viceversa, sia s una retta parallela a r. Sia

$$a'x + b'y + c' = 0$$

una sua equazione cartesiana. Poiché r e s sono parallele, dal teorema 23.33 segue

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

il che implica che esiste un numero reale h tale che $a' = ha$ e $b' = hb$. Notiamo che si ha $h \neq 0$, perché $(a', b') \neq (0, 0)$. Nell'equazione cartesiana della retta s dividiamo per h; otteniamo l'equazione cartesiana di s:

$$ax + by + \frac{c'}{h} = 0$$

ponendo $k := \frac{c'}{h}$ otteniamo l'equazione cercata. ■

Esempio 23.38 Data la retta r di equazione cartesiana

$$2x + 3y + 1 = 0$$

vogliamo determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $A := (3, 4)$ e parallela alla retta r.

Consideriamo il fascio di rette parallele a r:

$$2x + 3y + k = 0.$$

Tra tutte queste rette cerchiamo quella passante per il punto A. Imponiamo quindi il passaggio per A:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + k = 0.$$

Otteniamo $k = -18$. La retta s ha quindi equazione cartesiana

$$2x + 3y - 18 = 0. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 23.39 Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto $B := (1, -1)$ e parallela alla retta r di equazione

$$2x + 3y + 1 = 0. \qquad \triangle$$

Esempio 23.40 Nell'esempio 23.30 abbiamo visto che le due rette

$$r\colon x + y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon 2x + y + 1 = 0$$

si intersecano nel punto $A := (0, -1)$. Notiamo che, se consideriamo una qualsiasi combinazione lineare delle equazioni delle due rette:

$$h(x + y + 1) + k(2x + y + 1) = 0$$

in cui $(h, k) \neq (0, 0)$ otteniamo sempre un'equazione di primo grado nelle variabili x e y. Abbiamo quindi una retta che indichiamo con il simbolo $r_{h,k}$. Tutte queste rette, al variare di h e k, passano per il punto A. Viceversa, si può verificare (noi non lo facciamo) che, se n è una retta passante per il punto A, allora esistono numeri reali h e k non entrambi nulli tali che l'equazione

$$h(x + y + 1) + k(2x + y + 1) = 0$$

è un'equazione cartesiana della retta n.

Per esempio, la retta

$$s\colon 4x + \frac{7}{2}y + \frac{7}{2} = 0$$

passa per il punto A e la sua equazione può essere scritta nella forma:

$$3(x + y + 1) + \frac{1}{2}(2x + y + 1) = 0. \qquad \triangle$$

Tutto ciò si generalizza nel seguente teorema:

Teorema 23.41 *Siano date due rette r e s incidenti in un punto A:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Allora, per ogni coppia di numeri reali $(h, k) \neq (0, 0)$, l'equazione cartesiana

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

rappresenta una retta $r_{h,k}$ che passa per il punto A. Viceversa, ogni retta passante per il punto A ha equazione cartesiana del tipo

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

*L'insieme di tutte le rette passanti per il punto A viene chiamato **fascio** di rette passanti per A.*

Dimostrazione Notiamo innanzitutto che l'equazione

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

può essere scritta nella forma

$$(ha_1 + ka_2)x + (hb_1 + kb_2)y + (hc_1 + kc_2) = 0.$$

Dobbiamo innanzitutto provare che, scegliendo h e k non entrambi nulli, essa rappresenta l'equazione cartesiana di una retta. Dobbiamo quindi dimostrare che almeno uno dei coefficienti delle variabili x e y è diverso da 0. Notiamo allora che, essendo le due rette non parallele, si ha

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi le coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono linearmente indipendenti. Pertanto, qualsiasi loro combinazione lineare con coefficienti h e k non entrambi nulli:

$$h(a_1, b_1) + k(a_2, b_2) = (ha_1 + ka_2, hb_1 + kb_2)$$

è non nulla.

Dobbiamo ora dimostrare che ogni retta $r_{h,k}$ passa per il punto A. Sia $A \coloneqq (x_0, y_0)$. Dal momento che A appartiene sia ad r che a s, abbiamo:

$$a_1x_0 + b_1x_0 + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0,$$

ma allora, per ogni h e k abbiamo

$$h(a_1x_0 + b_1x_0 + c_1) + k(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0.$$

Pertanto ogni retta $r_{h,k}$ passa per il punto A.

Non dimostriamo che ogni retta passante per A ha equazione cartesiana del tipo $h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$. ■

Esempio 23.42 Dato il punto $A \coloneqq (x_0, y_0)$ vogliamo scrivere le equazioni cartesiane di tutte le rette appartenenti al fascio di rette passanti per A. Per far ciò abbiamo bisogno di due rette distinte entrambe passanti per il punto A. Notiamo che la retta r di equazione cartesiana

$$x - x_0 = 0$$

passa per il punto A. Analogamente la retta s di equazione cartesiana

$$y - y_0 = 0$$

passa per il punto A. Pertanto le rette del fascio cercato hanno equazioni cartesiane:

$$h(x - x_0) + k(y - y_0) = 0$$

con h e k non entrambi nulli. △

Esempio 23.43 Sia data la retta r di equazione cartesiana

$$2x + 3y + 1 = 0$$

e il punto $A \coloneqq (3, 4)$. Nell'esempio 23.38 abbiamo determinato un'equazione cartesiana della retta s passante per il punto A e parallela alla retta r, considerando dapprima il fascio delle rette parallele a r e imponendo poi il passaggio per il punto A.

Vogliamo ora determinare un'equazione cartesiana di s considerando dapprima il fascio di rette passanti per A e imponendo poi il parallelismo con la retta r. Il fascio delle rette passanti per A è dato da:

$$r_{h,k} \colon h(x - 3) + k(y - 4) = 0.$$

Affinché questa retta sia parallela alla retta r i coefficienti delle incognite x e y devono essere proporzionali rispettivamente a 2 e a 3. Deve essere pertanto $h = t \cdot 2$ e $k = t \cdot 3$. Al variare di $t \neq 0$ abbiamo quindi le equazioni

$$2t(x - 3) + 3t(y - 4) = 0.$$

Tutte queste equazioni sono proporzionali fra loro e rappresentano, quindi, la stessa retta. Scegliamo quindi un qualsiasi valore non nullo di t, per esempio $t = 1$. Abbiamo l'equazione

$$2(x - 3) + 3(y - 4) = 0.$$

Dunque la retta s ha equazione cartesiana

$$2x + 3y - 18 = 0.$$ △

Esercizio di base 23.44 Siano date le rette

$$r \colon x - 2y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s \colon 2x + y = 0.$$ △

Determinare le rette r' e s' passanti per il punto $A \coloneqq (1, 1)$ e parallele rispettivamente a r e a s.

23.6 Semipiani

Sappiamo che una retta divide il piano in due semipiani.

Esempio 23.45 Consideriamo, per esempio, la retta $x = 0$. Si tratta dell'asse delle y. Esso divide il piano in due semipiani. Notiamo che i punti appartenenti a un semipiano sono tutti e soli i punti $P := (x, y)$ tali che $x > 0$. I punti dell'altro semipiano verificano la condizione $x < 0$ (si consiglia di fare una figura). In modo analogo si vede che l'asse delle x, cioè la retta di equazione $y = 0$ divide il piano in due semipiani. I punti di un semipiano verificano la disequazione $y > 0$; i punti dell'altro semipiano verificano la disequazione $y < 0$. △

Esempio 23.46 Consideriamo ora la retta di equazione $x - 1 = 0$. Si verifica facilmente che i punti di uno dei semipiani delimitati da questa retta verificano la disequazione $x - 1 > 0$; i punti dell'altro semipiano verificano la disequazione $x - 1 < 0$. △

In tutti i casi appena visti abbiamo che, data una retta tramite equazione cartesiana, i punti di un semipiano delimitato dalla retta sono i punti le cui coordinate verificano la disequazione ottenuta dall'equazione cartesiana della retta sostituendo il simbolo di uguaglianza = con il simbolo >. Analogamente i punti dell'altro semipiano si ottengono usando il simbolo <.

Se invece di semipiani aperti (cioè non contenenti la retta che li delimita) avessimo considerato semipiani chiusi (cioè contenenti la retta che li delimita) avremmo dovuto considerare disuguaglianze con il simbolo $\geq$ o $\leq$.

Questo fatto è generalizzato dal seguente teorema di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 23.47 *Sia data la retta*

$$r\colon ax + by + c = 0.$$

I punti di uno dei due semipiani delimitati dalla retta r sono tutti e soli i punti $P := (x, y)$ tali che:

$$ax + by + c > 0.$$

I punti dell'altro semipiano verificano invece la disequazione

$$ax + by + c < 0.$$

Esempio 23.48 Consideriamo la retta r di equazione

$$r\colon x + y - 1 = 0.$$

Uno dei due semipiani delimitato da r è dato dai punti verificanti la disequazione

$$x + y - 1 > 0.$$

L'altro semipiano è dato dai punti verificanti la disequazione

$$x + y - 1 < 0.$$

Se vogliamo stabilire se un certo punto P che non sta sulla retta r appartiene all'uno o all'altro dei due semipiani sostituiamo le coordinate di P nel polinomio $x + y - 1$ e controlliamo il segno del risultato. Ad esempio, considerato il punto $P := (3, -1)$ abbiamo $3 + (-1) - 1 > 0$. Dunque il punto P appartiene al semipiano di disequazione $x + y - 1 > 0$.

Questo tipo di argomento ci permette anche di disegnare i due semipiani. Infatti una volta disegnato il grafico della retta r su un piano, basta prendere un punto P in uno dei due semipiani e verificare qual è la disequazione soddisfatta dalle coordinate di P. $\triangle$

Esercizio di base 23.49 Determinare la disequazione verificata da tutti i punti appartenenti al semipiano contenente il punto $A := (1, 2)$ e delimitato dalla retta passante per i punti $B := (1, 1)$ e $C := (3, 5)$.

Esempio 23.50 Vogliamo determinare un sistema di disequazioni che descriva l'insieme dei punti interni al triangolo T di vertici $A := (1, 3)$, $B := (-1, 5)$ e $C := (2, 3)$.

La retta r_{AB} passante per i vertici A e B del triangolo ha equazione cartesiana $x + y - 4 = 0$. Notiamo che i punti interni al triangolo T stanno tutti su uno dei due semipiani delimitati dalla retta r_{AB}. Come possiamo scegliere tra il semipiano di disequazione $x + y - 4 > 0$ e il semipiano di disequazione $x + y - 4 < 0$? Il semipiano che ci interessa contiene, oltre ai punti interni a T, anche il vertice C. Ora $2 + 3 - 4 > 0$: dunque il semipiano che vogliamo ha disequazione $x + y - 4 > 0$.

La retta r_{AC} passante per i vertici A e C del triangolo ha equazione cartesiana $y - 3 = 0$. I punti interni al triangolo T stanno tutti su uno dei due semipiani delimitati dalla retta r_{AC}, precisamente quello contenente il vertice B. Ora $5 - 3 > 0$: dunque il semipiano che vogliamo ha disequazione $y - 3 > 0$.

La retta r_{BC} passante per i vertici B e C del triangolo ha equazione cartesiana $2x + 3y - 13 = 0$. I punti interni al triangolo T stanno tutti su uno dei due semipiani delimitati dalla retta r_{BC}, precisamente quello contenente il vertice A. Ora $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 13 < 0$: dunque il semipiano che vogliamo ha disequazione $2x + 3y - 13 < 0$.

In conclusione l'insieme dei punti interni al triangolo T è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y - 4 > 0 \\ y - 3 > 0 \\ 2x + 3y - 13 < 0 \end{cases}$$

Sottolineiamo che questo sistema definisce i punti interni al triangolo T e **non** comprende i punti che stanno sui lati di T. Se volessimo dare un sistema di disequazioni che definisce i punti interni al triangolo T e i punti che stanno sui lati di T avremmo dovuto dare il sistema:

$$\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ y - 3 \geq 0 \\ 2x + 3y - 13 \leq 0 \end{cases}$$

$\triangle$

Esercizio di base 23.51 Determinare un sistema di disequazioni che descriva l'insieme dei punti interni al triangolo T i cui lati stanno sulle rette $r\colon 2x-y+3=0$, $s\colon x-3y+5=0$ e $t\colon 3x-4y=0$.

23.7 Soluzioni degli esercizi di base

EB.23.8 Per disegnare la retta può essere utile determinare due suoi punti. Ponendo $x=0$ otteniamo il punto $A := \left(0, -\frac{5}{4}\right)$, ponendo $y=0$ otteniamo il punto $B := \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$. Possiamo quindi disegnare la retta passante per i due punti. Lasciamo ciò al lettore.

EB.23.9 Tutti i punti della retta hanno ascissa uguale a $-\frac{5}{3}$. Due punti della retta sono quindi $A := \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ e $B := \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$. La retta è quindi parallela all'asse delle y.

EB.23.10 Tutti i punti della retta hanno ordinata uguale a $-\frac{5}{4}$. Due punti della retta sono quindi $A := \left(0, -\frac{5}{4}\right)$ e $B := \left(1, -\frac{5}{4}\right)$. La retta è quindi parallela all'asse delle x.

EB.23.12 Esprimiamo la variabile x in funzione della variabile y:

$$x = -1 - 2y.$$

Ponendo $y = t$ otteniamo le equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \end{cases}$$

Notiamo che avremmo potuto esplicitare l'equazione cartesiana della retta r rispetto alla variabile y e porre $x = t$. In tal caso avremmo ottenuto le seguenti equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = \phantom{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}t \\ y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

EB.23.13 La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Notiamo che anche le seguenti sono equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

EB.23.14 La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$$

EB.23.17 La retta ha equazione cartesiana:

$$x - y + 1 = 0.$$

EB.23.18 In questo caso non c'è bisogno di fare alcun calcolo. La retta ha come equazione cartesiana:

$$y - 2 = 0.$$

EB.23.19 La retta ha equazione cartesiana

$$x - 1 = 0.$$

EB.23.22 Data l'equazione cartesiana generica di una retta $ax+by+c = 0$ imponiamo il passaggio per i due punti. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a = t$, $b = -2t$, $c = t$. Ponendo $t = 1$ otteniamo un'equazione cartesiana della retta:

$$x - 2y + 1 = 0.$$

EB.23.23 Un'equazione cartesiana della retta r è ovviamente:

$$x - 1 = 0.$$

EB.23.24 Un'equazione cartesiana della retta r è ovviamente:

$$y - 1 = 0.$$

EB.23.39 Notiamo che il punto B appartiene alla retta r. La retta r' coincide pertanto con la retta r.

EB.23.44 Consideriamo il fascio di rette passanti per A:

$$h(x - 1) + k(y - 1) = 0.$$

Si ottiene la retta r' ponendo $h = 1$ e $k = -2$; quindi:

$$r' \colon x - 2y + 1 = 0.$$

Si ottiene la retta s' ponendo $h = 2$ e $k = 1$; quindi:

$$s' \colon 2x + y - 3 = 0.$$

Notiamo che $r' = r$. Ciò non ci sorprende, infatti $A \in r$. Invece $s' \neq s$; infatti $A \notin s$.

EB.23.49 La retta passante per B e C ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 \\ 3 - 1 & 5 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$4x - 2y - 2 = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione otteniamo

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 = -2 < 0.$$

I punti del semipiano cercato verificano quindi la disequazione

$$4x - 2y - 2 < 0.$$

EB.23.51 Determiniamo il vertice A intersezione di r e s. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

troviamo $A = \left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$. I punti interni al triangolo stanno sul semipiano delimitato da t e contenente il vertice A. Poiché $3\left(-\frac{4}{5}\right) - 4\left(\frac{7}{5}\right) < 0$, i punti interni al triangolo stanno sul semipiano $3x - 4y < 0$.

Determiniamo il vertice B intersezione di r e t. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

troviamo $B = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$. I punti interni al triangolo stanno sul semipiano delimitato da s e contenente il vertice B. Poiché $-\frac{12}{5} - 3\left(-\frac{9}{5}\right) + 5 > 0$, i punti interni al triangolo stanno sul semipiano $x - 3y + 5 > 0$.

Determiniamo il vertice C intersezione di s e t. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

troviamo $C = (4, 3)$. I punti interni al triangolo stanno sul semipiano delimitato da r e contenente il vertice C. Poiché $2 \cdot 4 - 3 + 3 > 0$, i punti interni al triangolo stanno sul semipiano $2x - y + 3 > 0$.

In conclusione l'insieme dei punti interni al triangolo T è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - 4y < 0 \\ x - 3y + 5 > 0 \\ 2x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

23.8 Sunto

Equazioni cartesiane di rette

Teorema *L'insieme dei punti $P := (x, y)$ del piano le cui coordinate verificano un'equazione del tipo:*

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0),$$

è l'insieme dei punti di una retta r.

Viceversa, data una retta r, esiste un'equazione del tipo di cui sopra le cui soluzioni sono i punti della retta r.

*L'equazione viene detta **equazione cartesiana** della retta.*

Osservazione Ogni equazione del tipo $kax + kby + kc = 0$ con $k \neq 0$ è equivalente all'equazione $ax + by + c = 0$ ed è quindi un'equazione cartesiana della stessa retta. △

Proposizione *La retta r di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ ha parametri direttori $(-b, a)$.*

Teorema *Dati due punti distinti $P_0 := (x_0, y_0)$ e $P_2 := (x_1, y_1)$, la retta r passante per essi ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema *Sia* $\boldsymbol{v} := (l, m)$ *un vettore non nullo e* $P_0 := (x_0, y_0)$ *un punto. La retta* r *passante per* P_0 *e parallela al vettore* $\boldsymbol{v}$ *ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0.$$

Intersezione di rette

Teorema *Siano date le rette di equazioni cartesiane:*

$$r \colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s \colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Posto:

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A' := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

si ha:

- *le rette sono incidenti se e solo se* $\operatorname{rk} A = 2$*;*
- *le rette sono parallele distinte se e solo se* $\operatorname{rk} A = 1$ *e* $\operatorname{rk} A' = 2$*;*
- *le rette sono parallele coincidenti se e solo se* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 1$*.*

Fasci di rette

Teorema *Data una retta* r *di equazione cartesiana:*

$$r \colon ax + by + c = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$*, la retta* r_k *avente equazione cartesiana*

$$r_k \colon ax + by + k = 0.$$

è parallela alla retta r*.*

Viceversa, ogni retta parallela alla retta r *ha equazione cartesiana del tipo*

$$ax + by + k = 0.$$

L'insieme di tutte le rette parallele a r *viene chiamato* ***fascio*** *di rette parallele.*

Teorema *Siano date due rette* r *e* s *incidenti in un punto* A*:*

$$r \colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s \colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Allora, per ogni coppia di numeri reali $(h, k) \neq (0, 0)$*, l'equazione cartesiana*

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

rappresenta una retta $r_{h,k}$ *che passa per il punto* A*. Viceversa, ogni retta passante per il punto* A *ha equazione cartesiana del tipo*

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

L'insieme di tutte le rette passanti per il punto A *viene chiamato* ***fascio*** *di rette passanti per* A*.*

Semipiani

Teorema *Sia data la retta*

$$r\colon ax + by + c = 0.$$

I punti di uno dei due semipiani delimitati dalla retta r sono tutti e soli i punti $P := (x, y)$ tali che:

$$ax + by + c > 0.$$

I punti dell'altro semipiano verificano invece la disequazione

$$ax + by + c < 0.$$

23.9 Esercizi

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine.

E.23.1 Determinare l'equazione cartesiana della retta s passante per $P_0 := (1, 2)$ e parallela alla retta r passante per i punti $A := (1, 1)$ e $B := (2, 4)$.

E.23.2

a. Trovare l'equazione cartesiana della retta r passante per i punti $A := (1, 1)$ e $B := (2, 4)$.

b. Trovare l'equazione cartesiana della retta s passante per i punti $C := (1, 2)$ e $D := (-2, 5)$.

c. Trovare le coordinate degli eventuali punti di intersezione delle rette r e s.

E.23.3 Siano dati i punti $A := (1, 2)$, $B := (1, 3)$ e $D := (3, 4)$. Determinare il punto C in modo tale che $ABCD$ sia un parallelogramma.

E.23.4 Dato il triangolo di vertici $A := (1, 1), B := (1, 2)$ e $C := (3, -2)$, determinare un'equazione cartesiana della sua mediana passante per A. Disegnare infine triangolo e mediana.

E.23.5 Determinare quali disequazioni verificano tutti e soli i punti interni al triangolo di vertici $O := (0, 0)$, $U_1 := (1, 0)$ e $U_2 := (0, 1)$.

E.23.6 Determinare la retta r passante per il punto d'intersezione delle rette $s\colon 2x + 3y - 1 = 0$ e $t\colon x + 2y - 1 = 0$ e parallela alla retta $u\colon 3x - y + 2 = 0$.

E.23.7 In ciascuno dei casi seguenti determinare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della retta determinata dalle condizioni:

a. passante per i punti $P := (3, 1)$ e $Q := (2, 5)$;

b. passante per il punto $P := (2, 2)$ e di parametri direttori $(2, 5)$;

c. passante per il punto $P := (4, -2)$ e parallela alla retta avente equazione cartesiana $2x - y + 5 = 0$;

d. passante per il punto $P := (-1, 2)$ e parallela alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

E.23.8 Stabilire per quali valori di k le rette $r\colon 2x - ky + 1 = 0$ e $s\colon (k+1)x + ky - 1 = 0$ sono:

a. parallele;

b. coincidenti.

E.23.9 Determinare la retta r passante per l'intersezione delle rette $s\colon 2x + 3y - 1 = 0$ e $t\colon x + 2y - 1 = 0$ e parallela alla retta $3x - y + 2 = 0$.

E.23.10 Per ciascuna delle tre terne di punti seguenti determinare se i punti sono allineati. In caso affermativo determinare la retta cui appartengono.

a. $A := (2, 4)$, $B := (-1, -2)$, $C := (4, 8)$;

b. $A := (1, 2)$, $B := (3, 4)$, $C := (1, -2)$;

c. $A := (1, 0)$, $B := (0, 3)$, $C := (2, 1)$;

d. $A := (1, 0)$, $B := (4, 2)$, $C := (7, 4)$.

E.23.11 Disegnare, per ciascuno dei seguenti sistemi di disequazioni l'insieme delle soluzioni:

a. $\begin{cases} 2x - y + 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x - y + 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - y - 1 > 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x - y + 3 < 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - y - 1 > 0 \end{cases}$

E.23.12 Disegnare l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - 2y - 5 > 0 \\ x + 2y - 8 < 0 \\ x + y - 1 > 0 \\ y - 3 < 0 \end{cases}$$

E.23.13 Sia dato il triangolo di vertici $A := (1, 1)$, $B := (3, 1)$, $C := (-2, 3)$. Disegnare il triangolo e determinare il sistema di disequazioni che definisce l'interno del triangolo.

23.10 Soluzioni degli esercizi

E.23.1 La retta s deve essere parallela a $\boldsymbol{v} := (1, 3)$, vettore parallelo alla retta r (le sue componenti sono infatti date dalle differenze delle coordinate dei punti A e B ad essa appartenenti). Applicando il teorema 23.28 otteniamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi:

$$s\colon 3x - y - 1 = 0.$$

E.23.2

a. Applicando il teorema 23.25 otteniamo: $r\colon 3x - y - 2 = 0$.

b. Applicando il teorema 23.25 otteniamo: $s\colon x + y - 3 = 0$.

c. I coefficienti delle variabili delle equazioni delle due rette non sono proporzionali, pertanto le due rette non sono parallele. Cerchiamo il loro punto di intersezione risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo il punto di intersezione

$$E := \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right).$$

E.23.3 Il punto C è il punto tale che il punto medio tra A e C coincida con il punto medio tra B e D. Il punto medio tra B e D è il punto $M := \left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$. Se $C := (\bar{x}, \bar{y}$, imponendo che M sia il punto medio tra A e C otteniamo la condizione $\left(\frac{1+\bar{x}}{2}, \frac{2+\bar{y}}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$, da cui ricaviamo $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = 5$, cioè $C = (3, 5)$.

Alternativamente possiamo considerare la retta r la retta passante per A e B. Quindi:

$$r\colon x - 1 = 0.$$

Sia poi s la retta passante per A e D. Quindi:

$$s\colon x - y + 1 = 0.$$

Il punto C è il punto di intersezione della retta r' parallela alla retta r e passante per D con la retta s' parallela a s e passante per B. Abbiamo quindi:

$$r'\colon x - 3 = 0 \quad \text{e} \quad s'\colon x - y + 2 = 0.$$

Il punto di intersezione è pertanto $C = (3, 5)$.

E.23.4 La mediana cercata è la retta r passante per il punto A e per il punto medio M dei punti B e C. Il punto medio M ha coordinate $(2, 0)$. Un'equazione cartesiana della mediana r è:

$$r\colon x + y - 2 = 0.$$

Lasciamo al lettore il compito di disegnare triangolo e mediana.

E.23.5 Consideriamo le rette contenenti i tre lati del triangolo. L'asse delle x contiene i vertici O e U_1. Esso ha equazione $y = 0$. L'asse delle y contiene i vertici O e U_1. Esso ha equazione $x = 0$. La retta r contenente i punti U_1 e U_2 ha equazione $x + y - 1 = 0$.

I punti del triangolo sono tutti e soli i punti di intersezione dei seguenti tre semipiani:

1. semipiano delimitato dall'asse delle x e contenente il punto U_2. I suoi punti sono caratterizzati dalla disequazione $y > 0$.

2. semipiano delimitato dall'asse delle y e contenente il punto U_1. I suoi punti sono caratterizzati dalla disequazione $x > 0$.

3. semipiano delimitato dalla retta r passante per i punti U_1 e U_2 e contenente il punto O. I suoi punti sono caratterizzati dalla disequazione $x + y - 1 < 0$.

Pertanto i punti interni al triangolo sono tutti e soli i punti $P := (x, y)$ che verificano le tre disequazioni:

$$\begin{cases} \quad y > 0 \\ x \qquad > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$$

E.23.6 Non è necessario determinare esplicitamente l'intersezione di r e s. Infatti le rette del fascio:

$$h(2x + 3y - 1) + k(x + 2y - 1) = 0$$

sono tutte e sole le rette passanti per l'intersezione di s e t. Riscriviamo ora l'equazione del fascio:

$$(2h + k)x + (3h + 2k)y - h - k = 0.$$

Per imporre il parallelismo con la retta u dobbiamo richiedere che i coefficienti $2h + k$ e $3h + 2k$ siano proporzionali a 3 e -1, cioè ai coefficienti di x e y nell'equazione di u. Dunque dobbiamo trovare h e k non entrambi nulli tali che

$$2h + k = -3(3h + 2k),$$

ovvero

$$11h = -7k.$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, la stessa retta. Scegliendo, ad esempio, $h := 7$ e $k := -11$ e sostituendo questi valori nell'equazione del fascio otteniamo l'equazione cartesiana della retta r cercata:

$$r\colon 3x - y + 4 = 0.$$

E.23.7 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo, se possibile, le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta cercata in maniera indipendente. Ovviamente determinata una forma per l'equazione della retta sarebbe possibile determinare da essa l'altra direttamente. Ad esempio se si hanno le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

è possibile ricavare $t = 3 - x$ dalla prima equazione e sostituire questa espressione nella seconda per ottenere $y = 1 + 4(3 - x)$ ovvero $4x + y - 13 = 0$.

Viceversa data un'equazione cartesiana, ad esempio $5x - 2y + 6 = 0$, è possibile esprimere una delle due incognite in funzione dell'altra, ad esempio $x = \frac{2y-6}{5}$ e ottenere così le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} + \dfrac{2}{5}t \\ y = \qquad\quad t \end{cases}$$

a. I parametri direttori della retta che passa per i punti $P := (3, 1)$ e $Q := (2, 5)$ sono $(2 - 3, 5 - 1) = (-1, 4)$. Dunque le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana possiamo considerare il fascio di rette passanti per P:

$$a(x-3)+b(y-1)=0.$$

Imponendo il passaggio per Q otteniamo:

$$a(2-3)+b(5-1)=0,$$

che risolto dà $a=4b$. Posto $b:=1$ e $a:=4$ troviamo allora l'equazione della retta cercata:

$$4x+y-13=0.$$

b. Conosciamo un punto e i parametri direttori della retta. Possiamo quindi facilmente scrivere le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=2+5t \end{cases}$$

Per trovare l'equazione cartesiana possiamo usare il teorema 23.28:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=0$$

ovvero $5x-2y-6=0$.

c. L'equazione cartesiana della generica retta parallela alla retta di equazione cartesiana $2x-y+5=0$ è $2x-y+c=0$: imponendo il passaggio per $(4,-2)$ troviamo la condizione $2\cdot 4-(-2)+c=0$, cioè $c=-10$. L'equazione cercata è, dunque, $2x-y-10=0$.

La retta cercata ha gli stessi parametri direttori della retta assegnata: poiché quest'ultima ha equazione $2x-y+5=0$, dalla proposizione 23.15 sappiamo che ha parametri direttori $(1,2)$. Dunque la retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+2t \end{cases}$$

d. La retta cercata ha gli stessi parametri direttori della retta assegnata. Dunque le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}$$

La retta cercata ha parametri direttori $(2,-1)$ e, dunque, dalla proposizione 23.15 ha equazione cartesiana del tipo $x+2y+c=0$. Imponendo il passaggio per il punto P otteniamo la condizione $-1+2\cdot 2+c=0$ da cui otteniamo $c=-3$. La retta cercata ha dunque equazione $x+2y-3=0$.

E.23.8

a. Le due rette sono parallele se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 & -k \\ k+1 & k \end{vmatrix}=0$$

ovvero se e solo se $3k+k^2=0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado troviamo che le due rette sono parallele se e solo se $k=0$ o $k=-3$.

b. Due rette coincidono se e solo se le loro equazioni sono una multipla dell'altra. In particolare due rette coincidenti sono fra loro parallele, quindi possiamo considerare solo i casi in cui k sia 0 o -3, determinati al punto precedente. Se $k=0$ si ha $r\colon 2x+1=0$, $s\colon x-1=0$, e quindi r e s sono distinte. Se $k=-3$ si ha $r\colon 2x+3y+1=0$, $s\colon -2x-3y-1=0$, e, dunque, le due rette coincidono. Pertanto $r=s$ se e solo se $k=-3$.

E.23.9 Le rette passanti per l'intersezione di s e t sono tutte e sole quelle del fascio di rette individuato da s e t:

$$h(2x+3y-1)+k(x+2y-1)=0,$$

al variare di h e k non entrambi nulli in $\mathbb{R}$. Dobbiamo trovare tra tali rette quella parallela alla retta di equazione $3x-y+2=0$. Riscriviamo l'equazione della generica retta del fascio:

$$(2h+k)x+(3h+2k)y+(-h-k)=0.$$

Imponendo il parallelismo con la retta di equazione $3x-y+2=0$ troviamo la condizione:

$$\begin{vmatrix} 2h+k & 3h+2k \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

cioè

$$-11h-7k=0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, la stessa retta. Scegliendo, ad esempio, i valori $h=7$, $k=-11$ e sostituendoli nell'equazione della generica retta del fascio troviamo l'equazione della retta cercata:

$$3x-y+4=0.$$

E.23.10 Dati tre punti (x_0,y_0), (x_1,y_1) e (x_2,y_2), essi sono allineati se e solo se:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}=0.$$

a. Si ha

$$\begin{vmatrix} -1-2 & 4-2 \\ -2-4 & 8-4 \end{vmatrix}=0.$$

Dunque i tre punti sono allineati. La retta cui essi appartengono è quella individuata ad esempio da A e B, e, quindi, ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 \\ -1-2 & -2-4 \end{vmatrix}=0,$$

ovvero $-6x+3y=0$.

b. Si ha

$$\begin{vmatrix} 3-1 & 1-1 \\ 4-2 & -2-2 \end{vmatrix}=-8.$$

Dunque i tre punti non sono allineati.

c. Si ha

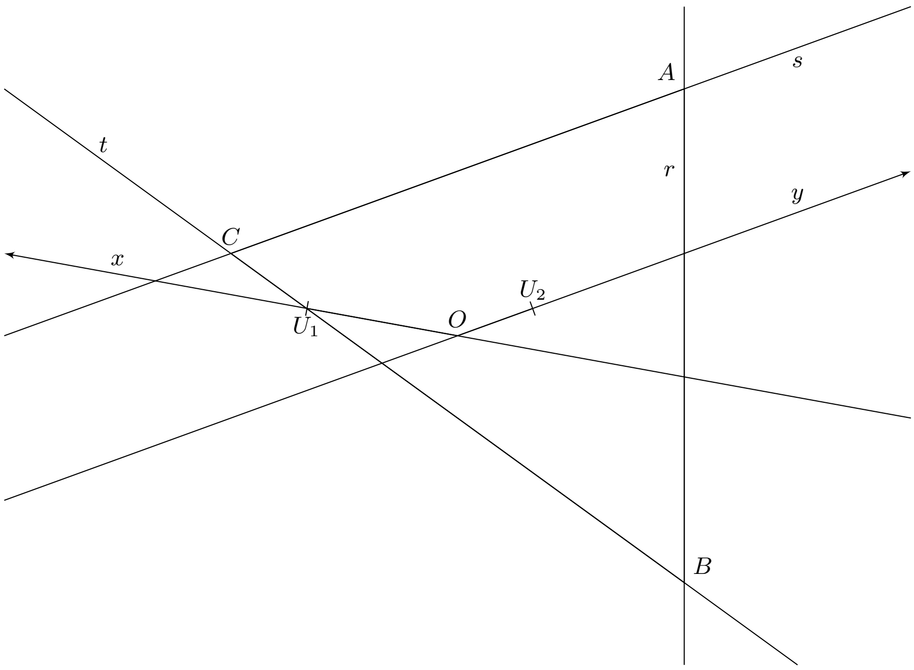
$$\begin{vmatrix} 0-1 & 2-1 \\ 3-0 & 1-0 \end{vmatrix}=-4.$$

Dunque i tre punti non sono allineati.

d. Si ha
$$\begin{vmatrix} 4-1 & 7-1 \\ 2-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0.$$
Dunque i tre punti sono allineati. La retta cui essi appartengono è quella individuata ad esempio da A e B, e, quindi, ha equazione cartesiana:
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 \\ 4-1 & 2-0 \end{vmatrix} = 0,$$
ovvero $2x - 3y - 2 = 0$.

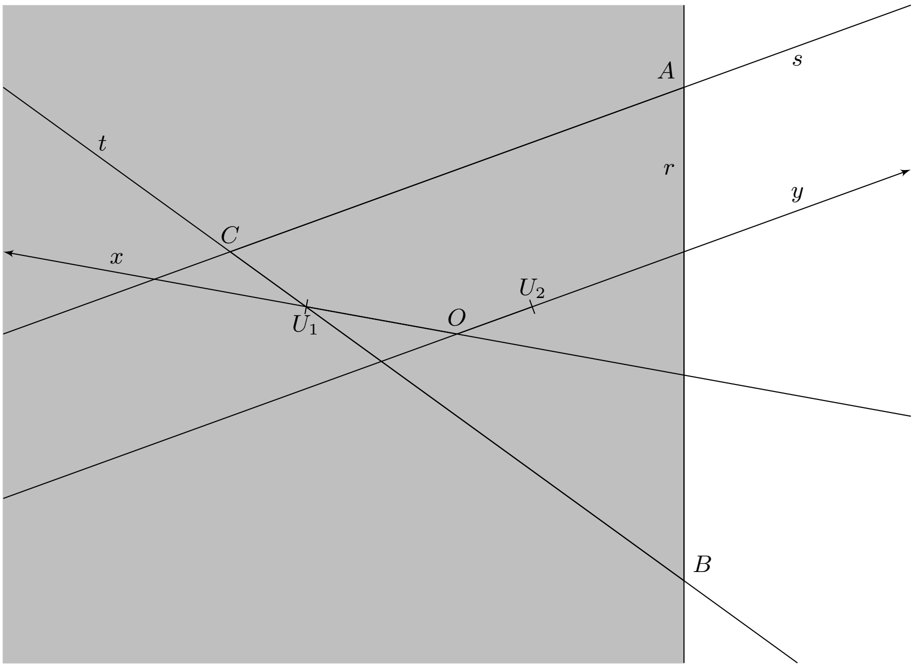
E.23.11 I sistemi di disequazioni sono tutti ottenuti a partire dai polinomi $2x - y + 3$, $x - 2$ e $x - y - 1$. Consideriamo allora le tre rette $r\colon 2x - y + 3 = 0$, $s\colon x - 2 = 0$, $t\colon x - y - 1 = 0$. Intersechiamo a due a due queste rette. Se intersechiamo r con s troviamo il punto $A \coloneqq (2, 7)$, se intersechiamo la retta r con la retta t troviamo il punto $B \coloneqq (-4, -5)$, se intersechiamo la retta s con la retta t troviamo il punto $C \coloneqq (2, 1)$.

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento affine e riportiamo tutte le informazioni così ottenute su un disegno (si noti che abbiamo indicato con U_1 e U_2 i punti unità):

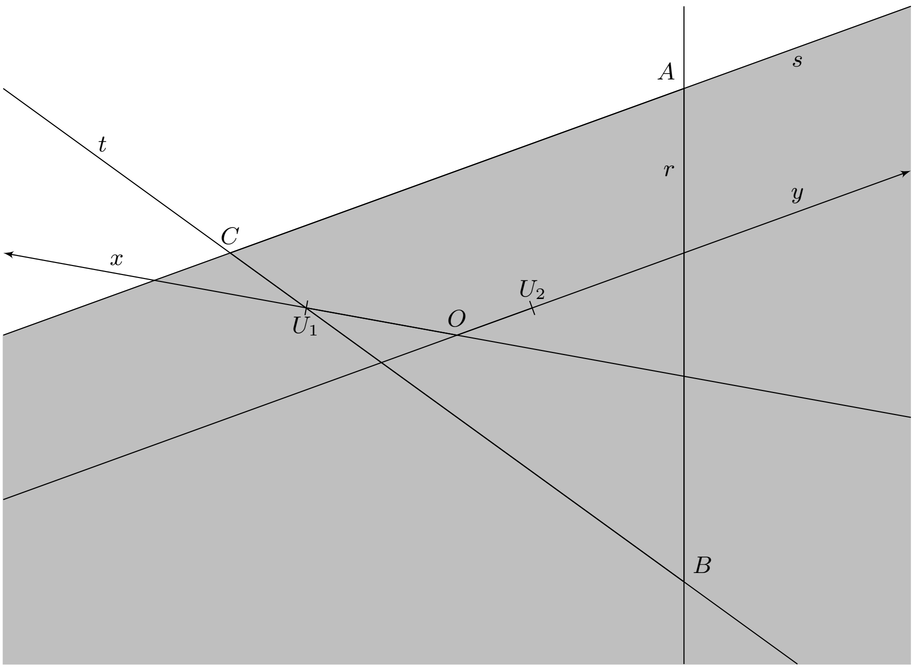


Per determinare l'insieme delle soluzioni di ciascuno dei sistemi proposti dobbiamo intersecare fra loro tre semipiani. Ad esempio la condizione $2x - y + 3 > 0$ descrive uno dei due semipiani delimitati dalla retta r. Per capire quale dei due semipiani dobbiamo considerare possiamo chiederci se il semipiano in questione contenga o meno il punto C (i punti A e B stanno sulla retta r). Sostituiamo allora le coordinate del punto C nel polinomio $2x - y + 3$: otteniamo $2 \cdot 2 - 1 + 3 = 6$. Abbiamo ottenuto un valore positivo, pertanto il punto C è contenuto nel semipiano di disequazione $2x - y + 3 > 0$. Utilizzando ripetutamente questo tipo di argomentazioni siamo in grado di disegnare gli insiemi delle soluzioni dei sistemi considerati.

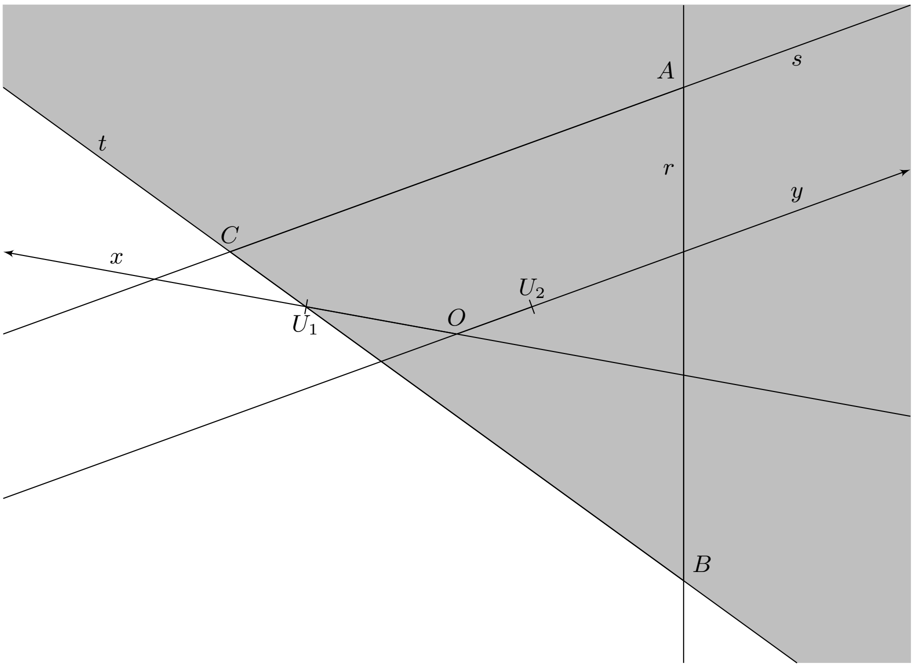
a. Il semipiano definito dalla disequazione $2x - y + 3 > 0$ è delimitato dalla retta r e contiene il punto C, come è evidenziato dal disegno qui sotto (in grigio è indicato il semipiano in questione):



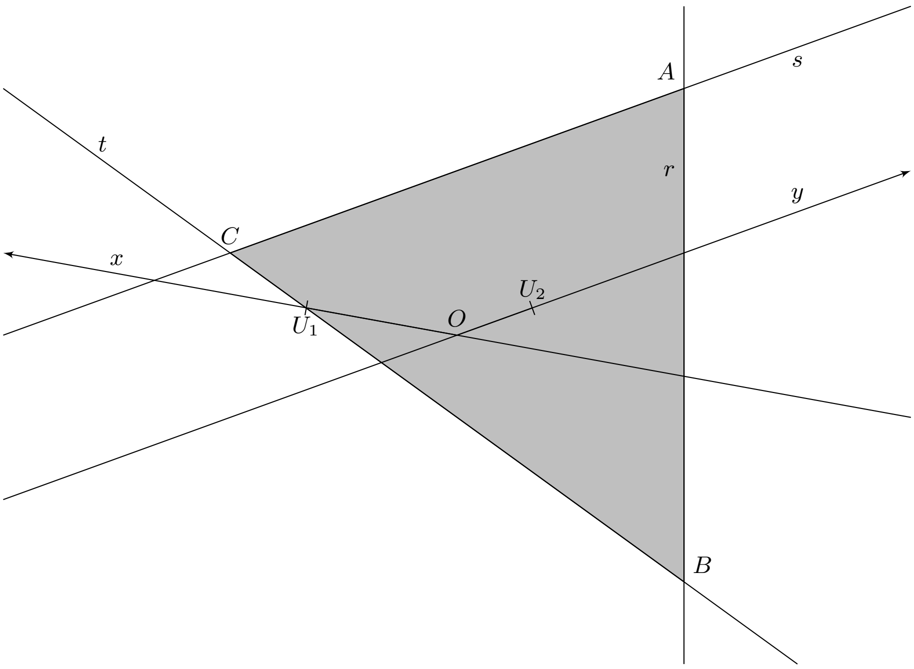
Allo stesso modo vediamo che il semipiano definito dalla disequazione $x - 2 < 0$ è delimitato dalla retta s e contiene il punto B (infatti $-4 - 2 < 0$). Ecco il semipiano evidenziato:



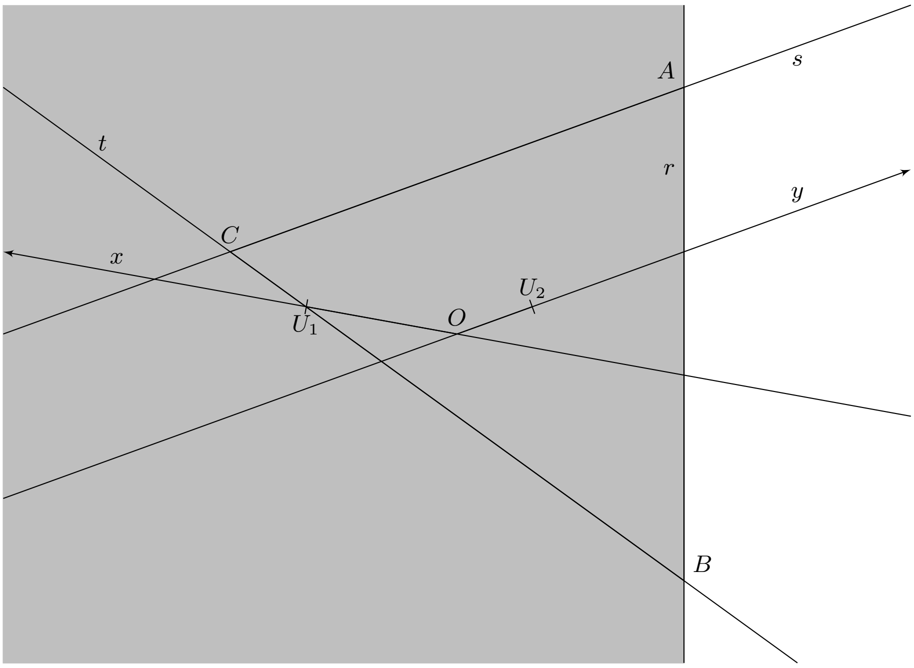
Infine il semipiano definito dalla disequazione $x - y - 1 < 0$ è delimitato dalla retta t e contiene il punto A (infatti $2 - 7 - 1 < 0$). Ecco il semipiano evidenziato:



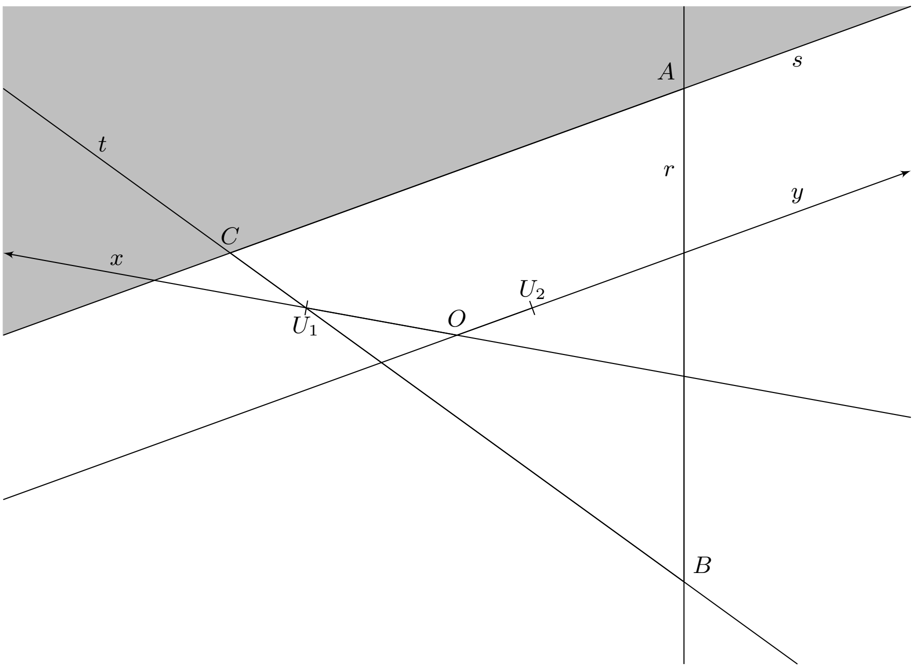
L'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni si ottiene intersecando i tre semipiani così determinati ed è dunque dato dai punti interni al triangolo di vertici A, B e C:



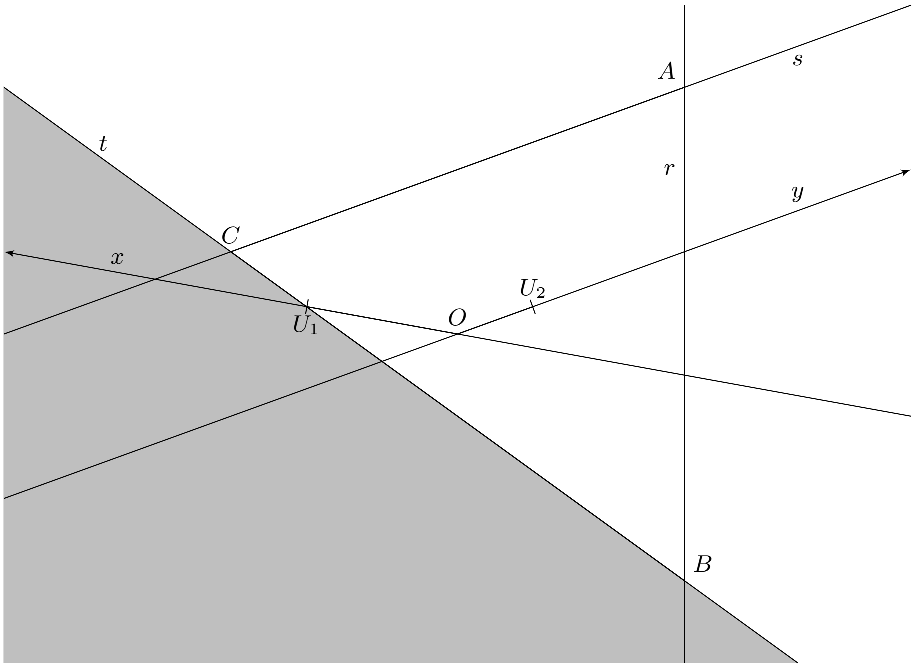
b. Dal punto precedente sappiamo già che il semipiano definito dalla disequazione $2x - y + 3 > 0$ è delimitato dalla retta r e contiene il punto C. Ecco il semipiano evidenziato:



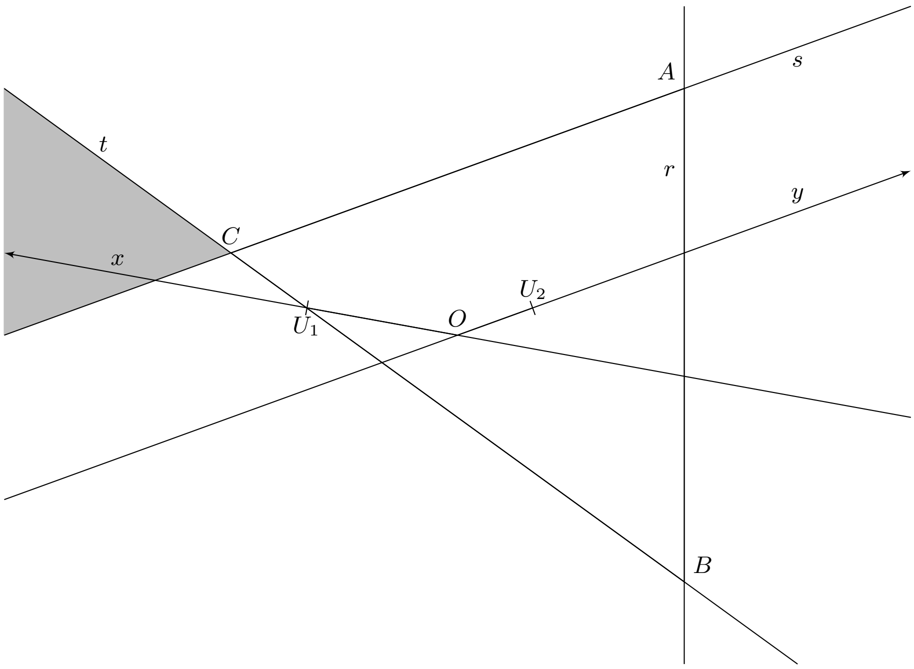
Allo stesso modo, dai risultati del punto precedente sappiamo che il semipiano definito dalla disequazione $x - 2 > 0$ è delimitato dalla retta s e non contiene il punto B. Ecco il semipiano evidenziato:



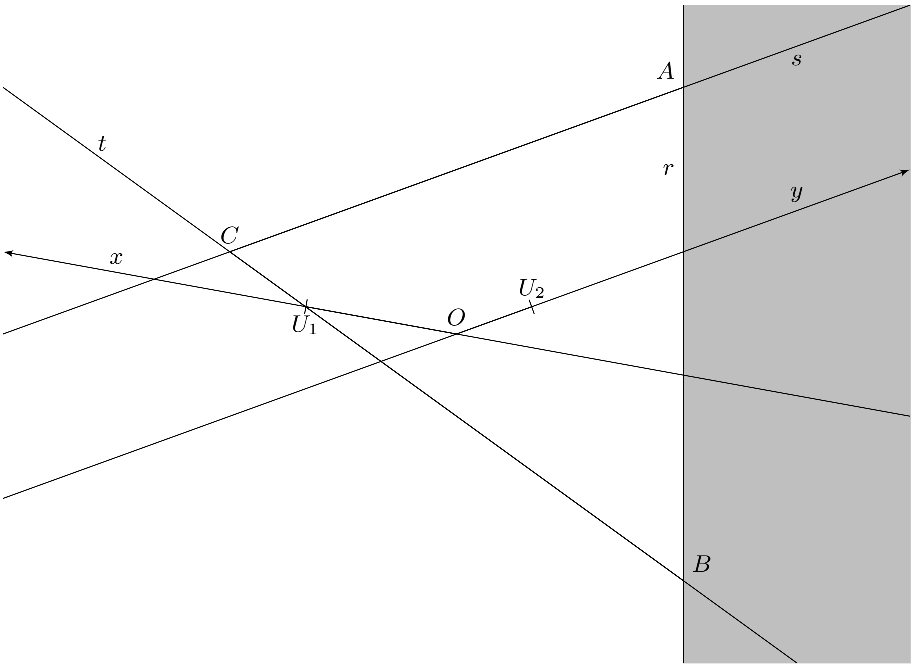
Infine, sempre utilizzando i risultati del punto precedente, vediamo che il semipiano definito dalla disequazione $x - y - 1 > 0$ è delimitato dalla retta t e non contiene il punto A. Ecco il semipiano evidenziato:



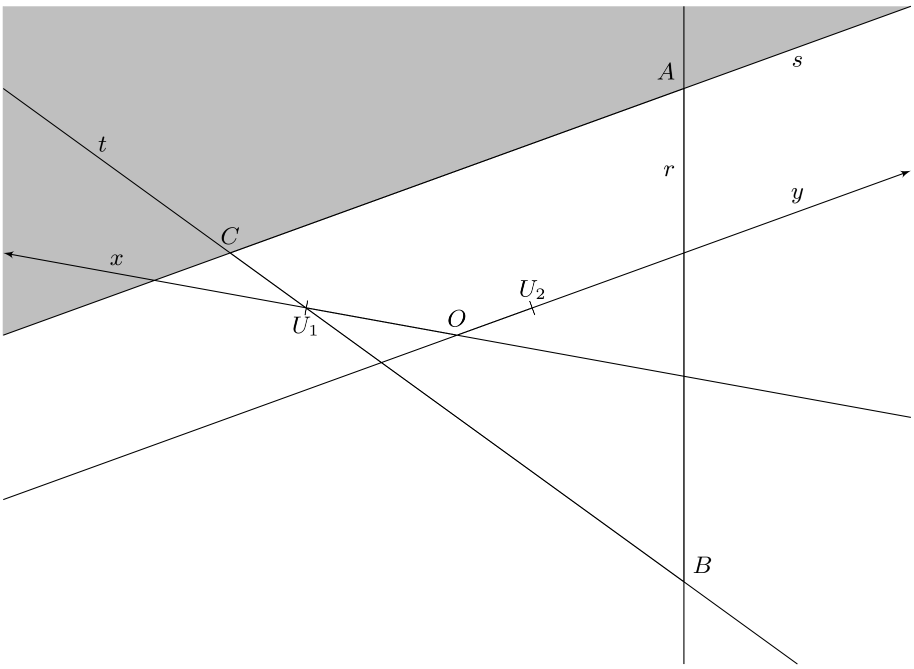
L'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni si ottiene intersecando i tre semipiani così determinati:



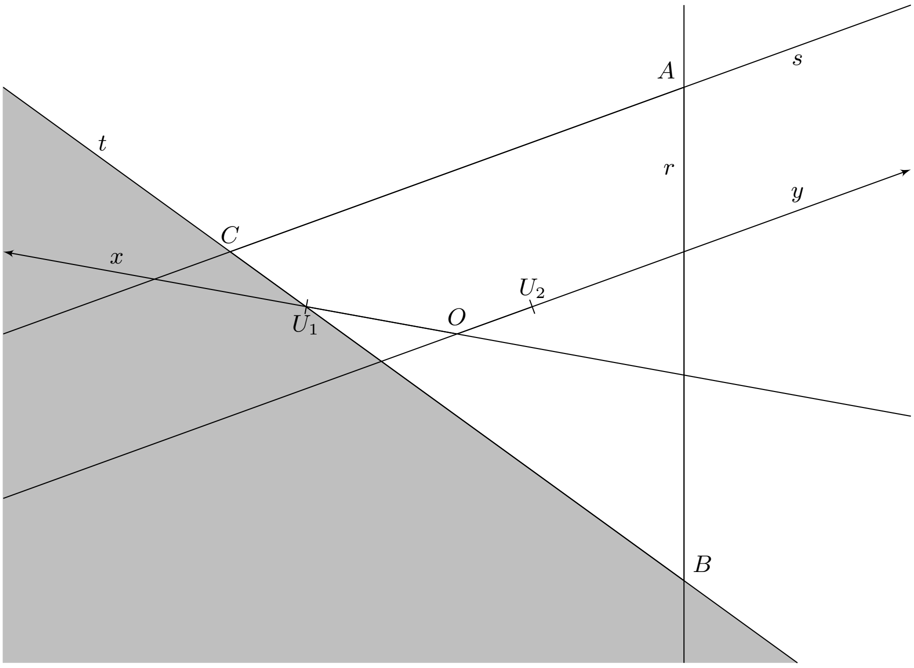
c. Usando i risultati ottenuti in precedenza sappiamo che il semipiano definito dalla disequazione $2x - y + 3 < 0$ è delimitato dalla retta r e non contiene il punto C. Ecco il semipiano evidenziato:



Allo stesso modo vediamo che il semipiano definito dalla disequazione $x - 2 > 0$ è delimitato dalla retta s e non contiene il punto B. Ecco il semipiano evidenziato:

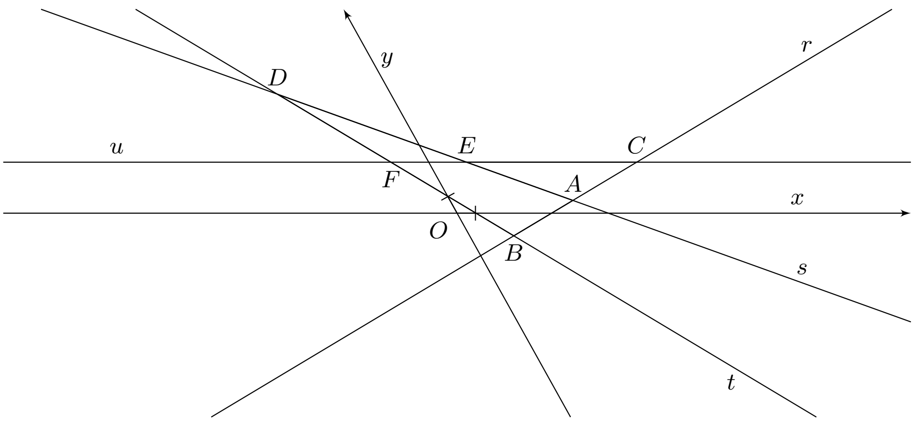


Infine il semipiano definito dalla disequazione $x - y - 1 > 0$ è delimitato dalla retta t e non contiene il punto A. Ecco il semipiano evidenziato:



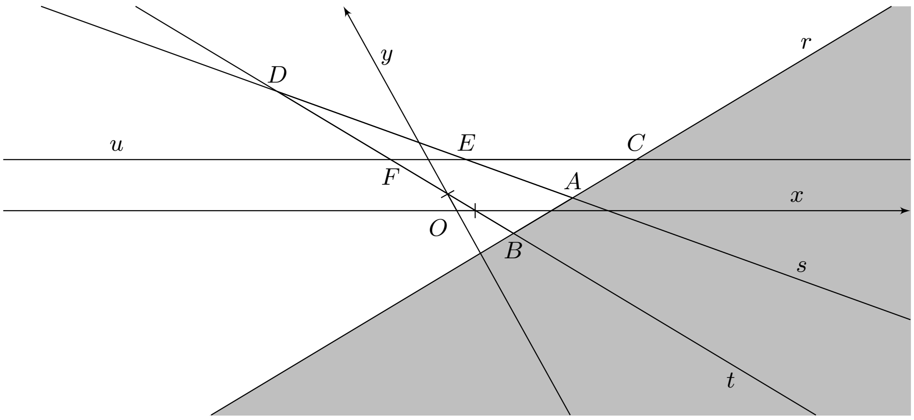
L'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni si ottiene intersecando i tre semipiani così determinati ed è dunque l'insieme vuoto.

E.23.12 Consideriamo le quattro rette $r\colon x-2y-5=0$, $s\colon x+2y-8=0$, $t\colon x+y-1=0$ e $u\colon y-3=0$. Intersechiamo a due a due queste rette. Se intersechiamo r con s troviamo il punto $A := \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{4}\right)$, se intersechiamo r con t troviamo il punto $B := \left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, se intersechiamo r con u troviamo il punto $C := (11, 3)$, se intersechiamo s con t troviamo il punto $D := (-6, 7)$, se intersechiamo s con u troviamo il punto $E := (2, 3)$, se intersechiamo t con u troviamo il punto $F := (-2, 3)$. Fissiamo un sistema di riferimento affine e riportiamo tutte le nostre informazioni su un disegno:

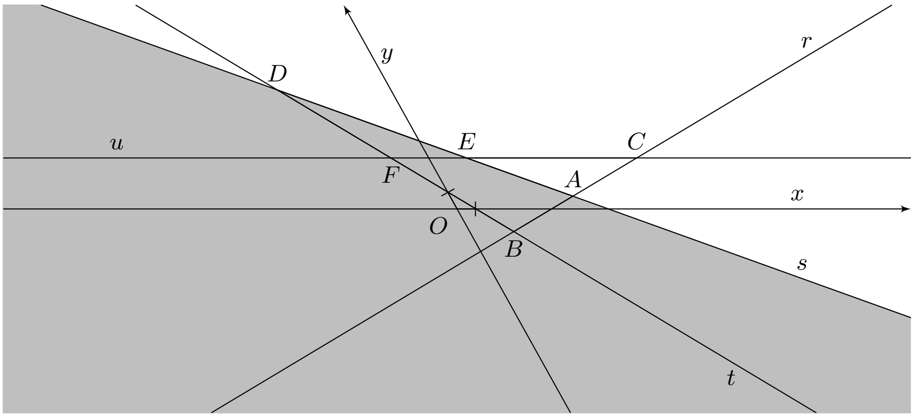


Per determinare l'insieme delle soluzioni di ciascuno dei sistemi proposti dobbiamo intersecare fra loro quattro semipiani.

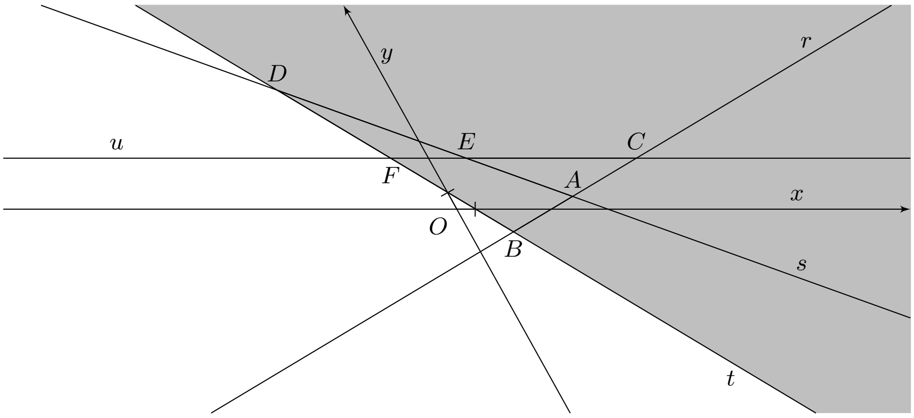
Il semipiano definito dalla disequazione $x - 2y - 5 > 0$ è delimitato dalla retta r e non contiene il punto D $(-6 - 2 \cdot 7 - 5 < 0)$. Ecco il semipiano evidenziato:



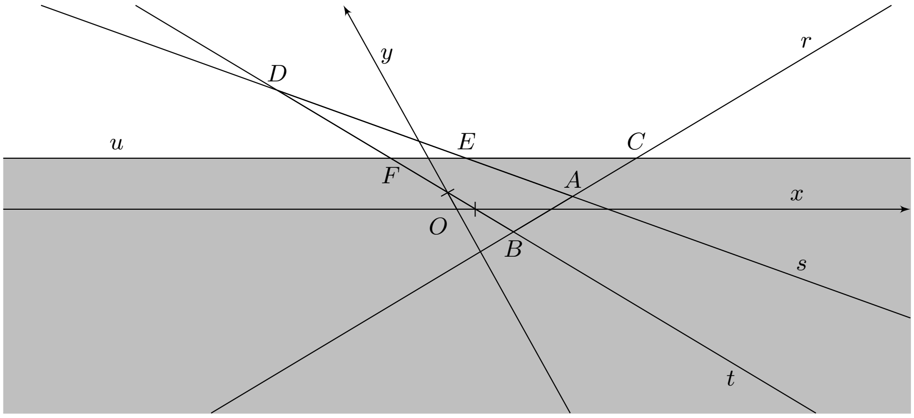
Il semipiano definito dalla disequazione $x + 2y - 8 < 0$ è delimitato dalla retta s e contiene il punto B $\left(\frac{7}{3} + 2\left(-\frac{4}{3}\right) - 8 < 0\right)$. Ecco il semipiano evidenziato:



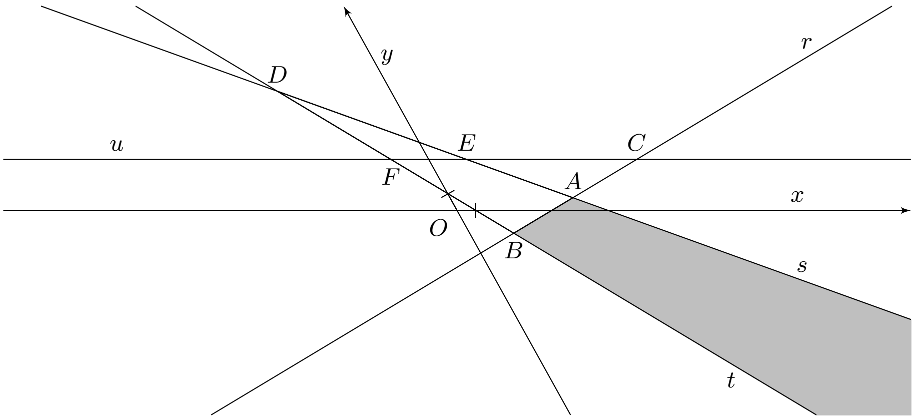
Il semipiano definito dalla disequazione $x + y - 1 > 0$ è delimitato dalla retta t e contiene il punto A $\left(\frac{13}{2} + \frac{3}{4} - 1 > 0\right)$. Ecco il semipiano evidenziato:



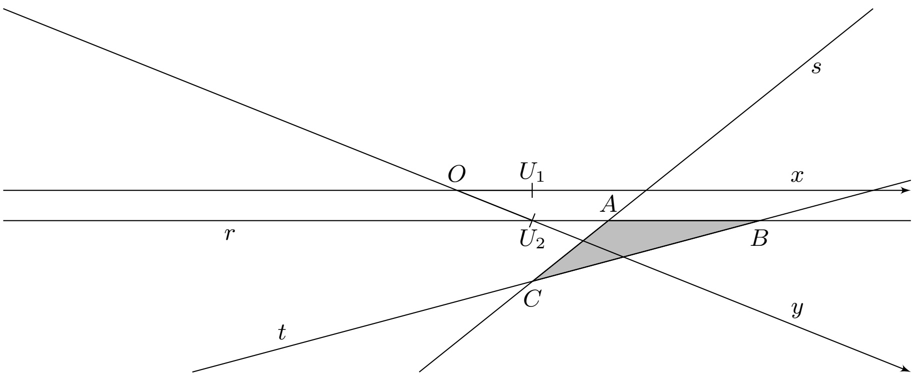
Il semipiano definito dalla disequazione $y - 3 < 0$ è delimitato dalla retta u e contiene il punto A $(\frac{3}{4} - 3 < 0)$. Ecco il semipiano evidenziato:



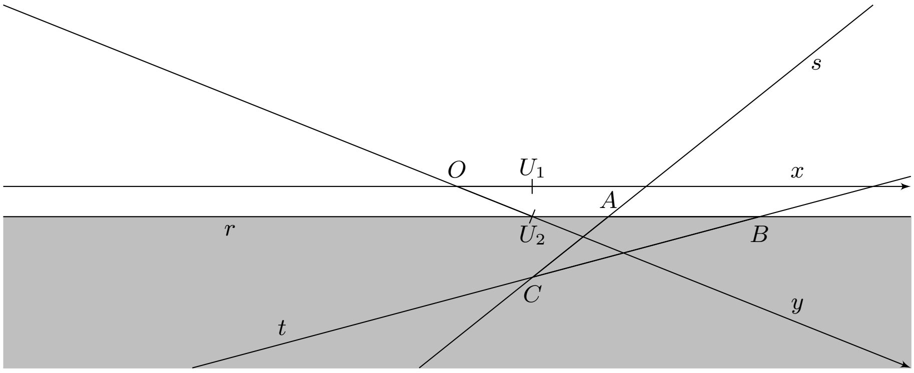
L'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni si ottiene intersecando i quattro semipiani ottenuti:



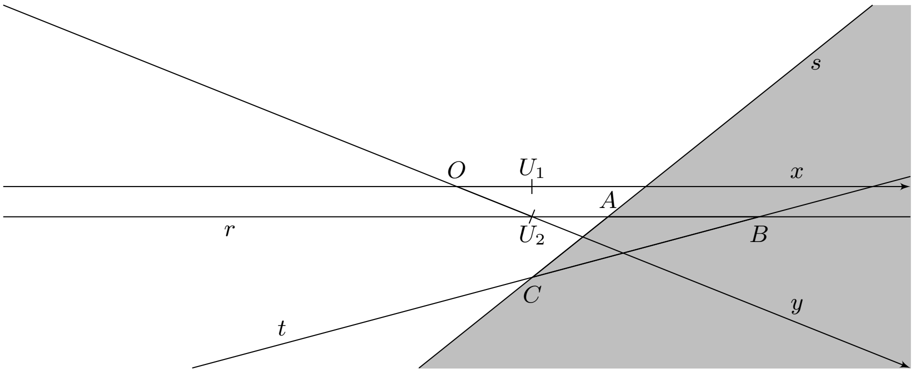
E.23.13 Ecco il disegno rispetto a un sistema di riferimento affine. Abbiamo indicato con r la retta passante per i punti A e B, con s la retta passante per i punti A e C e con t la retta passante per i punti B e C:



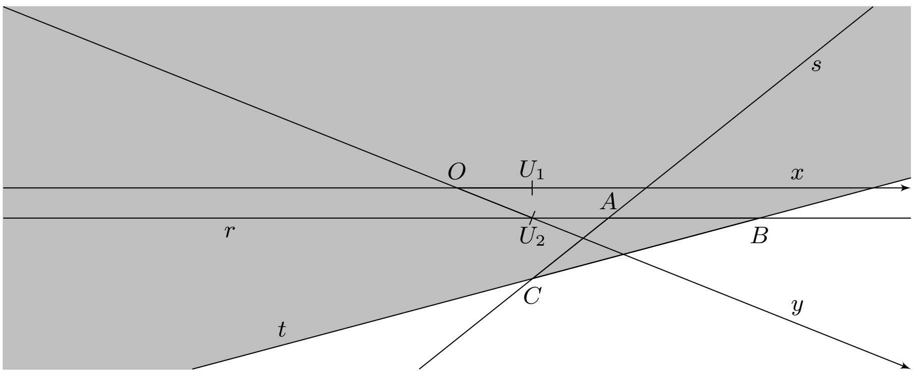
Il triangolo può essere determinato come intersezione di tre semipiani e precisamente: il semipiano delimitato da r e contenente il punto C:



il semipiano delimitato da s e contenente il punto B:



e il semipiano delimitato da t e contenente il punto A:



Per determinare le disequazioni di ciascuno di questi semipiani ci servono le equazioni delle rette da cui sono delimitati. Determiniamo allora l'equazione della retta r passante per i punti A e B. Otteniamo $r\colon y-1=0$. Poiché $3-1>0$, la disequazione del semipiano delimitato da r e contenente il punto C è $y-1>0$. Allo stesso modo vediamo che la retta s passante per A e C ha equazione $2x+3y-5=0$.

Poiché $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 5 > 0$, la disequazione del semipiano delimitato da s e contenente il punto B è $2x + 3y - 5 > 0$. Infine la retta t passante per i punti B e C ha equazione $2x+5y-11 = 0$. Poiché $2 \cdot 1+5 \cdot 1-11 < 0$, la disequazione del semipiano delimitato da t e contenente il punto A è $2x + 5y - 11 < 0$. In conclusione il sistema di disequazioni che definisce l'interno del triangolo è:

$$\begin{cases} y - 1 > 0 \\ 2x + 3y - 5 > 0 \\ 2x + 5y - 11 < 0 \end{cases}$$

CAPITOLO 24

Equazioni cartesiane nello spazio

In questo capitolo supporremo di aver fissato una volta per tutte nello spazio un sistema di riferimento affine con origine in un punto O. Introduciamo le equazioni cartesiane dei piani nello spazio. Queste equazioni giocano nella geometria analitica dello spazio un ruolo analogo a quello giocato dalle equazioni cartesiane delle rette nella geometria analitica del piano.

24.1 Equazioni cartesiane di piani

Consideriamo un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

con a, b e c non tutti nulli. Questa equazione forma un sistema lineare di un'equazione nelle tre incognite x, y e z, la cui matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ ha rango 1, dal momento che $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Anche la matrice completa del sistema ha ovviamente rango 1 e, pertanto, il sistema è risolubile e l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione $3 - 1 = 2$, cioè un piano. Abbiamo quindi mostrato la prima parte del teorema

Teorema 24.1 *L'insieme dei punti $P := (x, y, z)$ dello spazio le cui coordinate verificano un'equazione del tipo:*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

è formato da tutti e soli i punti di un piano.

*Viceversa, dato un piano π esiste un'equazione del tipo di cui sopra le cui soluzioni sono le coordinate di tutti e soli i punti del piano π. L'equazione viene detta **equazione cartesiana** del piano.*

Dimostrazione Abbiamo già mostrato che ogni equazione cartesiana rappresenta un piano.

Per mostrare che ogni piano π può essere rappresentato per mezzo di un'equazione cartesiana procediamo in maniera analoga a quanto visto nel teorema 23.1 per mostrare che ogni retta nel piano ha equazione cartesiana. Scegliamo allora su π tre punti non allineati $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$. Il nostro obiettivo è trovare un'equazione cartesiana del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con a, b e c non tutti nulli che sia soddisfatta dalle coordinate dei punti P_0, P_1 e P_2. Deve cioè essere:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$$

Poiché noi stiamo cercando di determinare a, b, c e d, possiamo pensare queste condizioni come un sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b, c e d. Dal momento che abbiamo 4 incognite e 3 equazioni esiste almeno una soluzione non banale a questo sistema. In una tale soluzione a, b e c non possono essere tutti nulli (altrimenti si avrebbe anche $d = 0$). Esiste allora almeno un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con a, b e c non tutti nulli che è soddisfatta dalle coordinate dei punti P_0, P_1 e P_2. Questa equazione cartesiana rappresenta un piano. Questo piano passa per i punti non allineati P_0, P_1 e P_2 di π, e, quindi, necessariamente coincide con π. ■

Osservazione 24.2 Ogni equazione equivalente all'equazione $ax+by+cz+d = 0$ ha le stesse soluzioni ed è quindi un'equazione cartesiana dello stesso piano. Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che le equazioni equivalenti all'equazione $ax + by + cz + d = 0$ sono tutte e sole le sue multiple per una costante non nulla, cioè le equazioni del tipo $kax+kby+kcz+kd = 0$ con $k \neq 0$. Dunque l'equazione cartesiana di un piano nello spazio può essere scelta in infiniti modi. △

Esempio 24.3

1. Il piano avente equazione cartesiana $z = 0$ è il piano xy. Infatti le coordinate dei punti $O := (0, 0, 0)$, $U_1 := (1, 0, 0)$ e $U_2 := (0, 1, 0)$ verificano l'equazione del piano. Anche $2z = 0$, $-3z = 0$ o, più in generale $kz = 0$ con $k \neq 0$ son equazioni cartesiane dello stesso piano.

2. Il piano avente equazione cartesiana $y = 0$ è il piano xz.

3. Il piano avente equazione cartesiana $x = 0$ è il piano yz. △

24.2 Equazioni cartesiane e parametriche di piani

Da un'equazione cartesiana di un piano π:

$$ax + by + cz + d = 0$$

si possono ottenere le sue equazioni parametriche "risolvendo" l'equazione cartesiana, ovvero esprimendo un'incognita in funzione delle altre due e poi ponendo quest'ultime uguali a due parametri t e u. Vediamo ciò più in dettaglio con un esempio.

Esempio 24.4 Sia dato il piano π di equazione cartesiana:

$$x + 2y + z - 1 = 0.$$

Ricaviamo z in funzione delle altre incognite:

$$z = -x - 2y + 1.$$

Poniamo $x \coloneqq t$ e $y \coloneqq u$. Otteniamo le equazioni parametriche del piano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = 1 - t - 2u \end{cases}$$

$\triangle$

Esercizio di base 24.5 Determinare le equazioni parametriche del piano di equazione cartesiana

$$x - 3z + 1 = 0.$$

$\triangle$

Esercizio di base 24.6 Determinare le equazioni parametriche del piano di equazione cartesiana

$$x + 1 = 0.$$

$\triangle$

Vogliamo ora determinare un'equazione cartesiana di un piano a partire da equazioni parametriche.

Esempio 24.7 Consideriamo il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + t + u \\ y = -1 - t + u \\ z = t + 2u \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ u = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Sostituendo nella terza equazione otteniamo

$$z = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) + 2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right),$$

da cui si ottiene, con semplici passaggi:

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z + 2 = 0,$$

o, equivalentemente:

$$3x + y - 2z + 4 = 0.$$

$\triangle$

Esercizio di base 24.8 Determinare un'equazione cartesiana del piano di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t + u \\ z = 2 + t - 2u \end{cases}$$

$\triangle$

24.3 Piano passante per tre punti

Siano dati tre punti non allineati $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$. Sappiamo che per essi passa uno e un solo piano π.

Vogliamo determinare un'equazione cartesiana del piano π. Possiamo utilizzare vari metodi. Ad esempio possiamo scriverne le equazioni parametriche del usando la formula descritta in 22.29 e da esse passiamo a un'equazione cartesiana eliminando i parametri.

In alternativa possiamo scrivere una generica equazione cartesiana di un piano $ax + by + cz + d = 0$ e determinare a, b, c e d imponendo il passaggio per i punti P_0, P_1 e P_2. Per far ciò dobbiamo determinare le soluzioni di un sistema omogeneo di tre equazioni in quattro incognite.

Esempio 24.9 I tre punti unità $U_1 := (1, 0, 0)$, $U_2 := (0, 1, 0)$ e $U_3 := (0, 0, 1)$ non sono allineati. Esiste quindi uno e un solo piano π passante per essi. Vogliamo determinarne un'equazione cartesiana. Consideriamo un'equazione cartesiana generica

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Imponendo il passaggio per i tre punti otteniamo il sistema di equazioni lineari omogeneo nelle variabili a, b, c e d:

$$\begin{cases} a \qquad\quad + d = 0 \\ \quad b \qquad + d = 0 \\ \qquad\quad c + d = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzioni $(k, k, k, -k)$. La soluzione corrispondente a $k = 0$ non ci interessa, perché in tal caso avremmo $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Ponendo $k = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Notiamo che, ponendo, ad esempio, $k = 3$, otteniamo un'altra equazione cartesiana del piano π

$$3x + 3y + 3z - 3 = 0$$

che è ovviamente equivalente alla precedente equazione cartesiana di π. $\triangle$

Esercizio di base 24.10 Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $A := (2, 3, 4)$, $B := (2, 3, 5)$ e $C := (1, 3, 5)$.

Vogliamo ora vedere una formula che ci dà più direttamente l'equazione cartesiana del piano passante per tre punti non allineati:

Teorema 24.11 *Dati tre punti non allineati $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$, il piano π passante per essi ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 23.25. Ovviamente useremo il corollario 21.20 che esprime un criterio di complanarità di quattro punti nello spazio invece del corollario 21.16 che esprime un criterio di allineamento di tre punti nello piano. ■

Osservazione 24.12 Notiamo che i due vettori aventi componenti uguali alla seconda e alla terza riga della matrice sono vettori linearmente indipendenti e paralleli al piano π. △

Esempio 24.13 Siano dati $A := (1,1,0)$, $B := (3,2,2)$ e $C := (1,2,1)$. Si verifica facilmente che i tre punti non sono allineati. Vogliamo determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per essi applicando il teorema precedente. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & 2-1 & 2-0 \\ 1-1 & 2-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Otteniamo:

$$-(x-1) - 2(y-1) + 2z = 0.$$

Il piano π ha quindi equazione cartesiana

$$\pi\colon \; -x - 2y + 2z + 3 = 0.$$ △

Esempio 24.14 Siano dati i punti $A := (1,1,0)$, $B := (3,2,2)$ e $C := (7,4,6)$. Si verifica facilmente che i tre punti sono allineati e, quindi, per essi passano infiniti piani. Ci chiediamo cosa sarebbe successo se non ci fossimo accorti che i tre punti sono allineati e avessimo applicato il teorema 24.11. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & 2-1 & 2-0 \\ 7-1 & 4-1 & 6-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli troviamo l'identità $0 = 0$, che, ovviamente, non è l'equazione di un piano. Quindi, se anche avessimo dimenticato preliminarmente di controllare l'allineamento o meno dei tre punti, l'applicazione della formula ci avrebbe mostrato l'allineamento dei tre punti. △

Teorema 24.15 *Siano dati un punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e due vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ e $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$. Il piano passante per P_0 e parallelo ai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostrazione Analoga a quella vista in 23.28. ■

Esempio 24.16 Il piano π passante per il punto $P_0 := (1,2,3)$ e parallelo ai vettori $\boldsymbol{v} := (2,3,4)$ e $\boldsymbol{w} := (1,0,0)$ ha equazione cartesiana:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\pi\colon 4y - 3z + 1 = 0.$$ △

Il teorema appena mostrato fornisce un metodo alternativo rispetto a quello visto per passare dalle equazioni parametriche all'equazione cartesiana di un piano:

Esempio 24.17 Sia dato il piano π di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + t + u \\ y = 3 - 2t + u \\ z = 1 + t + 3u \end{cases}$$

Il piano π passa per il punto $P := (2, 3, 1)$ ed è parallelo ai vettori $\boldsymbol{v} := (1, -2, 1)$ e $\boldsymbol{w} := (1, 1, 3)$. Dunque ha equazione cartesiana

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$-7x - 2y + 3z + 17 = 0.$$

△

Esempio 24.18 Sia dato il punto $A := (1, 2, 3)$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$$

Notiamo che le due rette hanno parametri direttori non proporzionali e quindi non sono parallele. Esiste quindi uno e un solo piano π passante per il punto A e parallelo ad entrambe le rette. Vogliamo determinarne un'equazione cartesiana. Consideriamo i vettori direttori delle due rette:

$$\boldsymbol{v} := (3, -1, -1) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{w} := (1, 2, -1).$$

Il piano π deve essere parallelo ai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e deve passare per il punto A. Pertanto esso ha equazione cartesiana:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi:

$$\pi\colon 3x + 2y + 7z - 28 = 0.$$

△

24.4 Intersezione di piani

Siano dati i due piani di equazione cartesiana:

$$\pi\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Vogliamo determinare gli eventuali punti di intersezione dei due piani. Essi sono dati dai punti le cui coordinate verificano entrambe le equazioni. Dobbiamo quindi determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 24.19 Cerchiamo i punti di intersezione dei piani:

$$\pi\colon x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon 2x + y + 3z - 2 = 0.$$

Abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema con il metodo che si preferisce troviamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}t \\ y = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Vediamo che le soluzioni danno esattamente le equazioni parametriche di una retta r. △

Esempio 24.20 Cerchiamo i punti di intersezione dei piani:

$$\pi\colon 2x + y - z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

Il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

non ha ovviamente alcuna soluzione. I due piani sono pertanto paralleli distinti. △

Esempio 24.21 Cerchiamo i punti di intersezione dei piani:

$$\pi\colon x + y - 3z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon 2x + 2y - 6z + 2 = 0.$$

Il sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

è formato da due equazioni equivalenti. Il sistema si riduce cioè alla singola equazione $x + y - 3z + 1 = 0$. Questo significa che l'intersezione dei due piani è formata dai punti del piano π. Ma allora i due piani π e σ coincidono. △

Osservazione 24.22 Riguardiamo i tre esempi precedenti. Nell'esempio 24.21 i due piani sono paralleli coincidenti; inoltre le quaterne date dai coefficienti delle variabili e dai termini noti sono proporzionali. Nell'esempio 24.20 i due piani sono paralleli distinti; le due quaterne di cui sopra non sono proporzionali; sono però proporzionali le terne dei coefficienti delle variabili. Nell'esempio 24.19 i due piani si intersecano in una retta; le terne dei coefficienti delle variabili non sono proporzionali. Tutto ciò può essere generalizzato nel seguente teorema. △

Teorema 24.23 *Siano π e σ due piani di equazioni cartesiane:*

$$\pi\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Posto:

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A' := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\operatorname{rk} A' = 1$ *se e solo se i due piani coincidono;*
- $\operatorname{rk} A = 1$, $\operatorname{rk} A' = 2$ *se e solo se i piani sono paralleli e non coincidenti;*
- $\operatorname{rk} A = 2$ *se e solo se i due piani sono incidenti in una retta.*

Dimostrazione È un'applicazione immediata del teorema di Rouché-Capelli. ■

Osservazione 24.24 Dal teorema precedente ricaviamo un'informazione che avevamo già visto in precedenza: ogni piano ha infinite equazioni cartesiane tutte tra loro proporzionali. △

Esercizio di base 24.25 Determinare tutti gli eventuali punti di intersezione dei piani

$$\pi\colon x + y + 2z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon 2x - y + z + 2 = 0.$$ △

24.5 Equazioni cartesiane di rette

Nel paragrafo 24.4 abbiamo visto come intersecando tra loro due piani non paralleli si trovi una retta. In alcuni casi siamo interessati a non risolvere esplicitamente il sistema che dà l'intersezione dei due piani ma a rappresentare la retta direttamente per mezzo di un sistema:

Definizione 24.26 Sia dato un sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

Le soluzioni del sistema sono tutti e soli i punti di una retta r (segue dal teorema 24.23). Le equazioni del sistema vengono dette **equazioni cartesiane** della retta r. △

Teorema 24.27 *Ogni retta r è dotata di equazioni cartesiane.*

Dimostrazione Siano A e B due punti distinti della retta r. Sia π un piano passante per essi. Sia σ un piano distinto da π passante per A e B. I due piani si intersecano in r. Il sistema dato dalle equazioni cartesiane dei due piani determina le equazioni cartesiane della retta cercata. ■

Osservazione 24.28 Notiamo che per una retta passano infiniti piani. Ogni retta è dotata quindi di infinite coppie di equazioni che sono le sue equazioni cartesiane. △

Esempio 24.29 Sia r la retta passante per i punti $A := (2, 1, 3)$ e $B = (1, 2, 2)$. Notiamo che il piano di equazione $x+y-3=0$ passa per A e B. Anche il piano di equazione $y+z-4=0$ passa per A e B. Dunque la retta r ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y \qquad - 3 = 0 \\ \qquad y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che anche i piani $2x - y - 3z + 6 = 0$ e $x + 2y + z - 7 = 0$ passano per i punti A e B. Dunque anche:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y - 3z + 6 = 0 \\ \ \ x + 2y + \ \ z - 7 = 0 \end{cases}$$

sono equazioni cartesiane della retta r. Ma anche:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0 \\ \qquad y + \ \ z - 4 = 0 \end{cases}$$

sono equazioni cartesiane di r. L'importante è prendere due piani distinti passanti per r. △

Esercizio di base 24.30 Data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + \ \ z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$ △

determinare le equazioni parametriche e altre equazioni cartesiane della retta r.

24.6 Fasci e stelle di piani

Fasci di piani paralleli

Nel capitolo 23 sulla geometria affine del piano abbiamo visto che, se nell'equazione cartesiana di una retta r si varia il termine noto, si ottengono rette parallele alla retta r. Nella geometria affine dello spazio si ha un teorema analogo, solo che in questo caso si parla di piani.

Teorema 24.31 *Dato un piano π di equazione cartesiana:*

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0,$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, il piano π_k avente equazione cartesiana

$$\pi_k\colon ax + by + cz + k = 0$$

è parallelo al piano π.

Viceversa, ogni piano parallelo al piano π ha equazione cartesiana del tipo

$$ax + by + cz + k = 0.$$

L'insieme di tutti i piani paralleli al piano π viene chiamato ***fascio*** *di piani paralleli.*

DIMOSTRAZIONE Il fatto che ogni piano π_k sia parallelo al piano π deriva dal teorema 24.23. Viceversa, sia π' un piano parallelo a π. Sia

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

una sua equazione cartesiana. Poiché π e π' sono paralleli, dal teorema 24.23 segue

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

il che implica che esiste un numero reale h tale che $a' = ha$, $b' = hb$ e $c' = hc$ Notiamo che si ha $h \neq 0$, perché $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. Nell'equazione cartesiana del piano π' dividiamo per h; otteniamo l'equazione cartesiana di π':

$$ax + by + cz + \frac{d'}{h} = 0$$

ponendo $k := \frac{d'}{h}$ otteniamo l'equazione cercata. ■

Esempio 24.32 Dato il piano π di equazione cartesiana

$$x - y + 2z + 5 = 0$$

vogliamo determinare il piano π' parallelo a π e passante per $A := (1, 2, 3)$.

Consideriamo il fascio di piani paralleli a π:

$$x - y + 2z + k = 0.$$

Tra tutti questi piani cerchiamo quello passante per A imponendo che le coordinate di A soddisfino l'equazione:

$$1 - 2 + 2 \cdot 3 + k = 0.$$

Otteniamo $k = -5$. Il piano π' ha quindi equazione cartesiana

$$x - y + 2z - 5 = 0. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 24.33 Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine e parallelo al piano

$$x - 2y + 5z - 7 = 0. \qquad \triangle$$

Esempio 24.34 Data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 4y + 2z - 2 = 0 \\ x - y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

vogliamo determinare le equazioni cartesiane della retta parallela a r e passante per il punto $A := (1, 3, -2)$.

La retta r è data come intersezione dei due piani $\pi\colon x + 4y + 2z - 2 = 0$ e $\sigma\colon x - y - 3z + 3 = 0$. Se ora consideriamo una coppia di piani paralleli rispettivamente a π e σ la loro intersezione è una retta parallela a r. In particolare se prendiamo il piano π' parallelo a π e passante per A e il piano σ' parallelo a σ e passante per A, la loro intersezione dà la retta cercata.

Consideriamo allora il fascio di piani paralleli a π:

$$x + 4y + 2z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo la condizione

$$1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + k = 0$$

da cui ricaviamo $k = -9$. Pertanto il piano π' parallelo a π e passante per A ha equazione cartesiana

$$x + 4y + 2z - 9 = 0.$$

Analogamente consideriamo il fascio di piani paralleli a σ:

$$x - y - 3z + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo la condizione

$$1 - 3 - 3 \cdot (-2) + h = 0$$

da cui ricaviamo $h = -4$. Pertanto il piano σ' parallelo a σ e passante per A ha equazione cartesiana

$$x - y - 3z - 4 = 0.$$

La retta parallela a r e passante per A ha allora equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 4y + 2z - 9 = 0 \\ x - y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

△

Possiamo anche determinare una condizione di parallelismo tra una retta e un piano:

Teorema 24.35 *La retta r di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

e il piano π di equazione cartesiana:

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0$$

sono paralleli se e solo se si ha:

$$al + bm + cn = 0.$$

DIMOSTRAZIONE Sappiamo che la retta e il piano sono paralleli se e solo se il vettore $\boldsymbol{v} := (l, m, n)$ (che è parallelo alla retta r) ha il punto finale che giace sul piano π' passante per O e parallelo al piano π. La tesi segue allora immediatamente dal fatto che il piano π' ha equazione cartesiana

$$\pi' \colon ax + by + cz = 0.$$

■

Esempio 24.36 Siano dati il piano

$$\pi \colon x - 2y + 3z - 5 = 0,$$

il punto $A := (1, 1, 1)$, il punto $B := (1, 2, 3)$ e il punto $C := (3, 2, 1)$. Sia r la retta passante per A e per B. Sia s la retta passante per A e per C. Vogliamo vedere se il piano π è parallelo alla retta r e alla retta s.

Notiamo che la retta r ha parametri direttori $(0, 1, 2)$ mentre la retta s ha parametri direttori $(2, 1, 0)$. Applicando la formula del teorema 24.35 troviamo che il piano π non è parallelo alla retta r mentre è parallelo alla retta s. △

Fasci di piani passanti per una retta

Analogamente al concetto di fascio di rette del piano incidenti in un punto, abbiamo il concetto di fascio di piani dello spazio passanti per una retta.

Teorema 24.37 *Siano dati due piani distinti π e σ passanti per una retta r:*

$$\pi \colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma \colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Allora, per ogni coppia di numeri reali $(h, k) \neq (0, 0)$, l'equazione cartesiana

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

rappresenta un piano $\pi_{h,k}$ che passa per la retta r. Viceversa, ogni piano che passa per la retta r ha equazione cartesiana del tipo

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

*L'insieme di tutti i piani passanti per la retta r viene chiamato **fascio** di piani passanti per r.*

DIMOSTRAZIONE Notiamo innanzitutto che l'equazione

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

può essere scritta nella forma

$$(ha_1 + ka_2)x + (hb_1 + kb_2)y + (hc_1 + kc_2)z + (hd_1 + kd_2) = 0.$$

Dobbiamo innanzitutto provare che, scegliendo h e k non entrambi nulli, essa rappresenta l'equazione cartesiana di un piano. Dobbiamo quindi dimostrare che almeno uno dei coefficienti delle variabili x, y e z è diverso da 0. Notiamo allora che, essendo i due piani non paralleli, si ha

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono linearmente indipendenti. Pertanto, qualsiasi loro combinazione lineare con coefficienti h e k non entrambi nulli:

$$(ha_1 + ka_2, hb_1 + kb_2, hc_1 + kc_2)$$

è non nulla.

Dobbiamo ora dimostrare che ogni piano $\pi_{h,k}$ passa per la retta r. Sia $A := (x_0, y_0, z_0)$ un qualsiasi punto di r. Dal momento che A appartiene sia a π che a σ, abbiamo:

$$a_1x_0 + b_1x_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x_0 + b_2x_0 + c_2z_0 + d_2 = 0,$$

ma allora, per ogni h e k abbiamo

$$h(a_1x_0 + b_1x_0 + c_1z_0 + d_1) + k(a_2x_0 + b_2x_0 + c_2z_0 + d_2) = h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0.$$

Pertanto ogni piano $\pi_{h,k}$ passa per il punto A. Poiché avevamo scelto A in maniera arbitraria sulla retta r, ogni piano $\pi_{h,k}$ passa per tutti i punti di r.

Non dimostriamo che ogni piano passante per la retta r ha equazione cartesiana del tipo

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0. \qquad \blacksquare$$

Esempio 24.38 Sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Vogliamo determinare il piano π passante per il punto $A = (1, 1, 1)$ e per la retta r.

Il piano cercato deve appartenere al fascio di piani passanti per la retta r. Esso ha equazioni:

$$\pi_{h,k}\colon h(x + y + 2z) + k(2x - y + 3z - 5) = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo:

$$h(1 + 1 + 2) + k(2 - 1 + 3 - 5) = 4h - k = 0.$$

Pertanto tutte le coppie $(h, 4h)$ verificano la condizione voluta. Queste coppie sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Prendendo, per esempio, la coppia $(1, 4)$ otteniamo il piano

$$\pi_{1,4}\colon 1(x + y + 2z) + 4(2x - y + 3z - 5) = 0.$$

Il piano cercato ha pertanto equazione cartesiana

$$9x - 3y + 14z - 20 = 0. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 24.39 Determinare, se esiste, un piano σ passante per la retta r dell'esempio 24.38 e parallelo al piano xy.

Stelle di piani

Si dimostra facilmente (esercizio) il:

Teorema 24.40 *Dato il punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, per ogni $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, il piano $\pi_{a,b,c}$ di equazione cartesiana*

$$\pi_{a,b,c} \colon a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

passa per il punto P_0. Viceversa, ogni piano passante per P_0 ha equazione cartesiana del tipo:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

L'insieme dei piani passanti per P_0 si chiama ***stella*** *di piani passanti per P_0.*

Esempio 24.41 Nell'esempio 24.32 abbiamo determinato un piano π' parallelo al piano π di equazione cartesiana

$$x - y + 2z + 5 = 0$$

e passante per $A = (1, 2, 3)$.

Per far ciò abbiamo considerato prima il fascio di piani paralleli a π e poi abbiamo imposto il passaggio per il punto A. Vogliamo ora risolvere l'esercizio imponendo prima il passaggio per il punto A e poi il parallelismo con il piano π.

Consideriamo la stella di piani passanti per A:

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0.$$

Vogliamo ora scegliere tra tutti questi piani quello parallelo al piano π. Dobbiamo quindi avere $(a, b, c) = k(1, -1, 2)$. Le possibili equazioni sono tutte proporzionali fra loro e individuano, pertanto, lo stesso piano. Possiamo scegliere, per esempio, $k = 1$. Otteniamo il piano

$$(x - 1) - (y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

cioè

$$x - y + 2z - 5 = 0. \qquad \triangle$$

24.7 Semispazi

Nel capitolo 23 sulla geometria affine del piano abbiamo visto che, se in un'equazione cartesiana di una retta r sostituiamo il segno di uguaglianza con un segno di disuguaglianza, otteniamo tutti i punti di uno dei due semipiani delimitati dalla retta r.

Nel caso della geometria dello spazio abbiamo un teorema analogo in cui il ruolo delle rette è svolto dai piani.

Teorema 24.42 *Sia dato un piano*

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0.$$

I punti di uno dei due semispazi delimitati dal piano π sono tutti e soli i punti $P := (x, y, z)$ tali che:

$$ax + by + cz + d > 0.$$

I punti dell'altro semispazio delimitato dalla retta r verificano invece la disequazione

$$ax + by + cz + d < 0.$$

Se invece di semispazi aperti (cioè non contenenti il piano che li delimita) avessimo considerato semispazi chiusi (cioè contenenti il piano che li delimita) avremmo dovuto considerare disuguaglianze con il simbolo $\geq$ o $\leq$.

Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 24.43 Consideriamo il piano π di equazione

$$\pi\colon x - 3y - z + 3 = 0.$$

Uno dei due semispazi delimitati da π è dato dai punti verificanti la disequazione

$$x - 3y - z + 3 > 0.$$

L'altro semispazio è dato dai punti verificanti la disequazione

$$x - 3y - z + 3 < 0.$$

Se vogliamo stabilire se un certo punto P che non sta sul piano π appartiene all'uno o all'altro dei due semispazi sostituiamo le coordinate di P nel polinomio $x - 3y - z + 3$ e controlliamo il segno del risultato. Ad esempio considerato il punto $P := (3, -1, 2)$ abbiamo $3 - 3(-1) - 2 + 3 > 0$. Dunque il punto P appartiene al semipiano di disequazione $x - 3y - z + 3 > 0$. △

Teorema 24.44 *Dati i piani non paralleli*

$$\pi\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

sia r la retta intersezione dei due piani. Allora un semipiano di π delimitato da r è dato da tutti e soli i punti verificanti il sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 > 0 \end{cases}$$

L'altro semipiano è caratterizzato dal sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 < 0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esempio 24.45 Consideriamo il piano xy:

$$\pi_{x,y}\colon z = 0$$

e il piano y, z:

$$\pi_{y,z}\colon x = 0.$$

L'intersezione dei due piani è ovviamente l'asse delle y. I due semipiani del piano xy delimitati dall'asse delle y sono caratterizzati dai due sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Se vogliamo stabilire quale dei due semipiani contiene il punto $U_1 := (1, 0, 0)$ (che, notiamo, è un punto del piano xy) sostituiamo le coordinate di U_1 nel polinomio x. Otteniamo come risultato 1 che è un numero positivo. Quindi il semipiano contenente U_1 è:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

△

24.8 Soluzioni degli esercizi di base

EB.24.5 Ricaviamo l'incognita x in funzione delle altre incognite:

$$x = -1 + 3z.$$

Ora assegnando valori parametrici a y e z si ottiene:

$$\begin{cases} x = -1 \quad + 3u \\ y = \quad t \\ z = \qquad u \end{cases}$$

Esplicitando rispetto a z avremmo ottenuto altre equazioni parametriche del piano.

EB.24.6 Abbiamo

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = u \end{cases}$$

EB.24.8 Dovremmo ricavare delle espressioni per i parametri t e u dalla seconda e terza espressione per poi sostituire queste espressioni nella prima equazione. Ma è inutile ricavare esplicitamente le espressioni per t e u perché nella prima equazione i parametri non compaiono (o, se si preferisce, compaiono con coefficiente 0).

Il piano ha, dunque, equazione cartesiana

$$x - 1 = 0.$$

EB.24.10 Si verifica facilmente che i tre punti non sono allineati ed esiste quindi un solo piano passante per essi. Vogliamo determinarne un'equazione cartesiana. Consideriamo un'equazione cartesiana generica

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Imponendo il passaggio per i tre punti otteniamo il sistema di equazioni lineari omogeneo nelle variabili a, b, c e d:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c + d = 0 \\ 2a + 3b + 5c + d = 0 \\ a + 3b + 5c + d = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzioni $(0, k, 0, -3k)$. La soluzione corrispondente a $k = 0$ non ci interessa, perché in tal caso avremmo $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Ponendo $k = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana

$$y - 3 = 0.$$

EB.24.25 L'intersezione dei due piani è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Esse sono:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - t \\ y = \dfrac{4}{3} - t \\ z = t \end{cases}$$

Si tratta di una retta.

EB.24.30 Risolvendo il sistema che dà la retta r si ottiene:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

Per ottenere ora delle equazioni cartesiane della retta r dobbiamo trovare due piani distinti passanti per r. È sufficiente trovare due piani distinti passanti per due punti della retta r. Ponendo $t := 0$ e $t := 1$ troviamo due punti della retta: $A := (0, 0, -1)$ e $B := (-1, 1, -1)$. Cerchiamo ora un piano che li contenga entrambi. Un piano generico ha equazione $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo il passaggio per A e B troviamo le condizioni $-c + d = 0$ e $-a + b - c + d = 0$. Possiamo scegliere a, b, c e d (con a, b e c non tutti nulli) in modo tale che queste condizioni siano soddisfatte. Ad esempio possiamo scegliere $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = 1$ e ottenere così il piano $\pi\colon z + 1 = 0$. Scegliendo poi $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 0$ otteniamo il piano $\pi'\colon x + y = 0$. Abbiamo quindi le equazioni cartesiane della retta r

$$\begin{cases} z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

EB.24.33 Il piano cercato ha ovviamente equazione cartesiana

$$x - 2y + 5z = 0.$$

EB.24.39 Il piano cercato dovrà appartenere al fascio di piani passanti per r:

$$\pi_{h,k}\colon h(x + y + 2z) + k(2x - y + 3z - 5) = 0$$

cioè:

$$(h + 2k)x + (h - k)y + (2h + 3k)z - 5k = 0.$$

D'altra parte, dovendo essere parallelo al piano xy, la sua equazione cartesiana è del tipo $z + a = 0$, cioè i coefficienti di x e y sono entrambi nulli.

Dobbiamo quindi trovare le coppie (h, k) non nulle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} h + 2k = 0 \\ h - k = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come unica soluzione la coppia $(0, 0)$. Non esistono quindi piani verificanti le condizioni richieste.

24.9 Sunto

Equazioni cartesiane di piani

Teorema *L'insieme dei punti $P := (x, y, z)$ dello spazio le cui coordinate verificano un'equazione del tipo:*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

è formato da tutti e soli i punti di un piano.

*Viceversa, dato un piano π esiste un'equazione del tipo di cui sopra le cui soluzioni sono le coordinate di tutti e soli i punti del piano π. L'equazione viene detta **equazione cartesiana** del piano.*

Osservazione Ogni equazione del tipo $kax + kby + kcz + kd = 0$ con $k \neq 0$ è equivalente all'equazione $ax + by + cz + d = 0$ ed è quindi un'equazione cartesiana dello stesso piano. △

Teorema *Dati tre punti non allineati $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$, il piano π passante per essi ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema *Siano dati un punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e due vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ e $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$. Il piano passante per P_0 e parallelo ai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ ha equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema *La retta r di equazioni parametriche:*

$$r \colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ nt \end{cases}$$

e il piano π di equazione cartesiana:

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0$$

sono paralleli se e solo se si ha:

$$al + bm + cn = 0.$$

Intersezione di piani

Teorema *Siano π e σ due piani di equazioni cartesiane:*

$$\pi \colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma \colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Posto:

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A' := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\operatorname{rk} A' = 1$ *se e solo se i due piani coincidono;*
- $\operatorname{rk} A = 1$, $\operatorname{rk} A' = 2$ *se e solo se i piani sono paralleli e non coincidenti;*
- $\operatorname{rk} A = 2$ *se e solo se i due piani sono incidenti in una retta.*

Equazioni cartesiane di rette

Definizione Sia dato un sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

Le soluzioni del sistema sono tutti e soli i punti di una retta r. Le equazioni del sistema vengono dette **equazioni cartesiane** della retta r. $\triangle$

Teorema *Ogni retta r è dotata di equazioni cartesiane.*

Osservazione Notiamo che per una retta passano infiniti piani. Ogni retta è dotata quindi di infinite coppie di equazioni che sono le sue equazioni cartesiane. $\triangle$

Fasci e stelle di piani

Teorema *Dato un piano π di equazione cartesiana:*

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0,$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, il piano π_k avente equazione cartesiana

$$\pi_k\colon ax + by + cz + k = 0$$

è parallelo al piano π.

Viceversa, ogni piano parallelo al piano π ha equazione cartesiana del tipo

$$ax + by + cz + k = 0.$$

L'insieme di tutti i piani paralleli al piano π viene chiamato ***fascio*** *di piani paralleli.*

Teorema *Siano dati due piani distinti π e σ passanti per una retta r:*

$$\pi\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Allora, per ogni coppia di numeri reali $(h, k) \neq (0, 0)$, l'equazione cartesiana

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

rappresenta un piano $\pi_{h,k}$ che passa per la retta r. Viceversa, ogni piano che passa per la retta r ha equazione cartesiana del tipo

$$h(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

L'insieme di tutti i piani passanti per la retta r viene chiamato ***fascio*** *di piani passanti per r.*

Teorema *Dato il punto* $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$*, per ogni* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*, il piano* $\pi_{a,b,c}$ *di equazione cartesiana*

$$\pi_{a,b,c} \colon a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

passa per il punto P_0*. Viceversa, ogni piano passante per* P_0 *ha equazione cartesiana del tipo:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

L'insieme dei piani passanti per P_0 *si chiama* ***stella*** *di piani passanti per* P_0*.*

Semispazi

Teorema *Sia dato un piano*

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0.$$

I punti di uno dei due semispazi delimitati dal piano π *sono tutti e soli i punti* $P := (x, y, z)$ *tali che:*

$$ax + by + cz + d > 0.$$

I punti dell'altro semispazio delimitato dalla retta r *verificano invece la disequazione*

$$ax + by + cz + d < 0.$$

Teorema *Dati i piani non paralleli*

$$\pi \colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma \colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

sia r *la retta intersezione dei due piani. Allora un semipiano di* π *delimitato da* r *è dato da tutti e soli i punti verificanti il sistema:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 > 0 \end{cases}$$

L'altro semipiano è caratterizzato dal sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 < 0 \end{cases}$$

24.10 Esercizi

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento affine..

E.24.1 Determinare le equazioni parametriche del piano di equazione cartesiana:

$$2x - 5y + 2z - 4 = 0.$$

E.24.2 a. Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per i tre punti $A := (1, 1, 1)$, $B := (2, 3, 5)$ e $C := (1, 0, 0)$.

b. Determinare un'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e passante per il punto $D := (0, 0, 1)$.

E.24.3 Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $A := (1, 2, -3)$ e parallelo alle rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -7 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -9 + 2t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$$

E.24.4 Data la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

e il punto $A := (1, 1, 0)$, determinare tutti i piani contenenti sia la retta r che il punto A.

E.24.5 Determinare se le seguenti quaterne di punti sono complanari o no. Nel caso siano complanari determinare se sono allineati o meno. Infine se sono complanari ma non allineati determinare l'equazione del piano che essi individuano, nel caso siano allineati determinare la retta che essi individuano.

a. $P := (1, 3, 2)$, $Q := (1, 1, 4)$, $R := (2, 1, 3)$, $S := (1, 3, 5)$.

b. $P := (1, 3, 2)$, $Q := (1, 1, 4)$, $R := (2, 1, 3)$, $S := (3, 3, 0)$.

c. $P := (1, 3, 2)$, $Q := (1, 1, 4)$, $R := (1, 4, 1)$, $S := (1, 0, 5)$.

E.24.6 Determinare se le seguenti quaterne di punti sono complanari o no. Nel caso siano complanari determinare se sono allineati o meno. Infine se sono complanari ma non allineati determinare l'equazione del piano che essi individuano, nel caso siano allineati determinare la retta che essi individuano.

a. $P := (3, 1, 1)$, $Q := (2, -1, 5)$, $R := (3, 2, 1)$, $S := (-2, 1, 0)$.

b. $P := (1, 2, 1)$, $Q := (2, 1, 3)$, $R := (4, -1, 7)$, $S := (1, 3, 5)$.

c. $P := (1, 0, 5)$, $Q := (2, 1, 6)$, $R := (4, 3, 8)$, $S := (0, -1, 4)$.

E.24.7 Siano dati il piano $\pi_{h,k}\colon x - y + kz + h = 0$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare (se esistono) i valori dei parametri h e k tali che:

a. $\pi_{h,k}$ e r siano incidenti;

b. $\pi_{h,k}$ e r siano paralleli;

c. r giaccia su $\pi_{h,k}$.

E.24.8 Siano dati la retta

$$s\colon \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

il piano $\pi\colon x - y + z - 1 = 0$ e il punto $P \coloneqq (2, 3, 1)$.

Si determinino le equazioni della retta r passante per il punto P, incidente la retta s e parallela al piano π.

E.24.9 Determinare le equazioni della retta che passa per il punto $P \coloneqq (1, 2, -1)$ ed è incidente le rette

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 3x + 3y - z + 2 = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

E.24.10 Determinare le equazioni cartesiane e parametriche delle rette dello spazio determinate dalle condizioni:

a. passante per i punti $P \coloneqq (3, 1, 1)$, $Q \coloneqq (1, -2, 1)$;

b. passante per il punto $P \coloneqq (2, 1, 0)$ e parallela al vettore $\boldsymbol{u} \coloneqq (1, -1, 1)$;

c. passante per il punto $P \coloneqq (1, -2, 1)$ e parallela alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

d. passante per il punto $P \coloneqq (1, 2, 5)$ e parallela alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

E.24.11 Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani dello spazio determinate dalle condizioni:

a. passante per i punti $P \coloneqq (1, 2, 1)$, $Q \coloneqq (1, -2, 1)$, $R \coloneqq (1, 1, 0)$;

b. passante per il punto $P \coloneqq (1, 0, -2)$ e parallelo ai vettori $\boldsymbol{u} \coloneqq (1, 0, 1)$ e $\boldsymbol{v} \coloneqq (-2, 1, 1)$;

c. passante per il punto $P \coloneqq (1, -2, 1)$ e parallelo al piano $\pi\colon 3x + y - z + 3 = 0$;

d. passante per il punto $P \coloneqq (1, 2, 5)$ e parallelo al piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t + u \\ y = 2 + 3t - 2u \\ z = 1 - t \end{cases}$$

E.24.12 Siano dati la retta

$$r\colon \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

e i punti $P \coloneqq (2, 3, 1)$ e $Q \coloneqq (1, -1, 0)$. Determinare l'equazione del piano π passante per i punti P e Q e parallelo alla retta r.

E.24.13 Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P \coloneqq (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

e

$$s\colon \begin{cases} 3x + 3y - z + 2 = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

24.11 Soluzioni degli esercizi

E.24.1 Poiché il coefficiente della x è diverso da 0, possiamo scrivere:

$$x = 2 + \frac{5}{2}y - z.$$

Posto $y \coloneqq t$ e $z \coloneqq u$, abbiamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{5}{2}t - u \\ y = \phantom{2 + \frac{5}{2}} t \\ z = \phantom{2 + \frac{5}{2}t -} u \end{cases}$$

E.24.2

a. Applicando il teorema 24.11 otteniamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi:

$$\pi\colon 2x + y - z - 2 = 0.$$

b. Un'equazione cartesiana del piano σ è data da:

$$2(x - 0) + (y - 0) - (z - 1) = 0$$

e quindi:

$$\pi'\colon 2x + y - z + 1 = 0.$$

E.24.3 Il piano π deve essere parallelo ai vettori direttori delle rette r e s. Applicando il teorema 24.15 otteniamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui:

$$\pi\colon 2y + z - 1 = 0.$$

E.24.4 Notiamo che il punto A non appartiene alla retta r. Infatti le coordinate di A non soddisfano la prima delle due equazioni di r. Esiste quindi un solo piano verificante le condizioni richieste.

Si consideri allora il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(x - y + z + 2) = 0. \tag{*}$$

Per ogni $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ abbiamo un piano contenente la retta r. Cerchiamo le coppie (λ, μ) per le quali si ottiene un piano contenente A. Imponendo nell'equazione ((*)) il passaggio per A otteniamo:

$$\lambda(1 + 1 - 1) + \mu(1 - 1 + 0 + 2) = \lambda + 2\mu = 0.$$

Pertanto le coppie $(\lambda, \mu) = (-2k, k)$ con k numero reale non nullo soddisfano la condizione richiesta. Per ogni $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, il piano:

$$-2k(x + y - 1) + k(x - y + z + 2) = 0$$

verifica le condizioni richieste. A prima vista appare che abbiamo trovato infiniti piani. In effetti le infinite equazioni cartesiane, essendo tutte proporzionali, determinano uno stesso piano. Possiamo quindi scegliere un qualsiasi k non nullo. Ponendo, per esempio, $k = -1$ abbiamo l'equazione cartesiana del piano cercato:

$$x + 3y - z - 4 = 0.$$

E.24.5 Dati 4 punti P, Q, R, S si possono considerare i vettori $\boldsymbol{u} := \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}$. La dimensione dello spazio generato da $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ permette di stabilire se i punti sono complanari o allineati.

a. I vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ hanno componenti rispettivamente $(0, -2, 2)$, $(1, -2, 1)$, $(0, 0, 3)$. La dimensione dello spazio da essi generati è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché questa matrice ha determinante 6, il suo rango è 3. Pertanto i 4 punti non sono complanari.

b. I vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono rispettivamente $(0, -2, 2)$, $(1, -2, 1)$, $(2, 0, -2)$. La dimensione dello spazio da essi generati è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è 0, quindi, il suo rango è minore di 3. Pertanto i 4 punti sono complanari. Poiché la prima e seconda colonna sono linearmente indipendenti, il rango della matrice è 2 e, quindi, i 4 punti non sono allineati. Abbiamo già notato che le prime due colonne della matrice sono indipendenti: questo significa che i primi 3 punti non sono allineati e, quindi, per trovare il piano passante per essi è il piano passante per tutti e 4 i punti. Utilizziamo la formula che dà il piano passante per 3 punti:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1-1 & 1-3 & 4-2 \\ 2-1 & 1-3 & 3-2 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante, troviamo l'equazione del piano:

$$2x + 2y + 2z - 12 = 0.$$

c. I vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono rispettivamente $(0, -2, 2)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -3, 3)$. Tutti questi vettori sono multipli di $\boldsymbol{u}$, dunque, lo spazio da essi generati ha dimensione 1: ciò significa che i 4 punti sono allineati. La retta passante per essi ha parametri direttori $(0, -2, 2)$ e ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane di questa retta dobbiamo trovare due piani distinti che la contengono. Vediamo subito che uno di questi piani ha equazione $x - 1 = 0$. Per trovare un altro piano, ricaviamo un'espressione per t dalla seconda equazione: $t = \frac{3-y}{2}$. Sostituendo questa espressione nella terza equazione troviamo $z = 5 - y$. La retta ha allora equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x \qquad\quad - 1 = 0 \\ \quad y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Si può verificare che effettivamente questa retta passa per i punti assegnati sostituendone le coordinate nel sistema così ottenuto.

E.24.6 Utilizzeremo per determinare la complanarità delle vari quaterne il corollario 21.20.

a. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 2-3 & 3-3 & -2-3 \\ -1-1 & 2-1 & 1-1 \\ 5-1 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 21.$$

Pertanto i 4 punti non sono complanari.

b. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 4-1 & 1-1 \\ 1-2 & -1-2 & 3-2 \\ 3-1 & 7-1 & 5-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque i quattro punti sono complanari.

Dobbiamo ora stabilire se sono allineati oppure no: per il teorema 21.18 notiamo che sono allineati se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

è minore di 2. Poiché questa matrice ha rango 2, i quattro punti non sono allineati. Determiniamo allora il piano passante per essi: basta scegliere tre punti tra essi non allineati. Non possiamo scegliere P, Q e R perché sono allineati (si può verificarlo facilmente). Possiamo invece scegliere come punti P, Q e S. Il piano cercato ha allora equazione:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2-1 & 1-2 & 3-1 \\ 1-1 & 3-2 & 5-1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero $-6x - 4y + z + 13 = 0$.

c. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 4-1 & 0-1 \\ 1-0 & 3-0 & -1-0 \\ 6-5 & 8-5 & 4-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque i quattro punti sono allineati. Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 1, i quattro punti sono allineati. Per determinare la retta passante per essi basta prendere la retta che passa, ad esempio, per P e Q. Essa ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + (2-1)t \\ y = \phantom{1 + {}} (1-0)t \\ z = 5 + (6-5)t \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \phantom{1 + {}} t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Se volessimo determinarne le equazioni cartesiane, potremmo ricavare t dalle 3 equazioni $t = x - 1$, $t = y$, $t = z - 5$ ed eguagliando a due a due queste espressioni troveremmo $x - 1 = y$, $x - 1 = z - 5$. Pertanto le equazioni cartesiane della retta sono

$$\begin{cases} x - y \phantom{{}- z} - 1 = 0 \\ x \phantom{{}- y} - z + 4 = 0 \end{cases}$$

E.24.7 Per determinare l'intersezione di $\pi_{h,k}$ e r occorre discutere (ed eventualmente risolvere) il sistema:

$$\begin{cases} x - y + kz + h = 0 \\ x + y - z \phantom{{}+1} = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa del sistema è

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & h \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. $\pi_{h,k}$ e r sono incidenti se e solo se il sistema è risolubile e ha un'unica soluzione, ovvero se e solo se A ha rango 3, cioè $\det A \neq 0$. Imponendo questa condizione si ha $3 - 3k \neq 0$. Dunque $\pi_{h,k}$ e r sono incidenti se e solo se $k \neq 1$.

b. Ovviamente $\pi_{h,k}$ e r sono paralleli se e solo non sono incidenti, ovvero se e solo se $k = 1$.

c. Affinché r giaccia su $\pi_{h,k}$ è necessario che r sia parallela a $\pi_{h,k}$ dunque che $k = 1$. Una volta imposta questa condizione, per imporre che r giaccia su $\pi_{h,k}$ è sufficiente imporre che un punto qualunque di r (ad esempio $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$) appartenga a $\pi_{h,k}$.

Dunque si ha $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 + h = 0$, cioè $h = \frac{2}{3}$. Dunque r giace su $\pi_{h,k}$ se e solo se $k = 1$ e $h = \frac{2}{3}$.

Alternativamente si può dire che r giace su $\pi_{h,k}$ se e solo se il sistema che dà le intersezioni tra r e $\pi_{h,k}$ è risolubile e le soluzioni dipendono da un parametro, ovvero se e solo se A e A' hanno rango 2. Imponendo queste condizioni si trovano ovviamente la stessa condizione già determinata.

E.24.8 Possiamo cercare due piani che contengono la retta r e determinare r come intersezione di questi due piani.

La retta r deve incidere la retta s. Quindi deve esistere un piano σ che contiene entrambe le rette. In particolare σ contiene s e il punto P (che deve appartenere a r). Il fascio di piani passanti per s ha equazione:

$$h(x - 2y + z - 1) + k(y - z - 1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo l'equazione $-4h + k = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Scegliendo ad esempio $h = 1$ e $k = 4$ troviamo l'equazione di σ:

$$x + 2y - 3z - 5 = 0.$$

Sappiamo inoltre che la retta r deve essere parallela al piano π. Quindi deve essere contenuta in un piano parallelo a π, precisamente al piano ρ parallelo a π e passante per P. Il generico piano parallelo a π ha equazione del tipo $x - y + z + k = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $k = 0$. Dunque ρ ha equazione

$$x - y + z = 0.$$

Ora r è intersezione di σ con ρ, dunque le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

E.24.9 La retta cercata t, dovendo incidere r e passare per P deve essere contenuta nel piano π contenente r e passante per P. Analogamente t deve essere contenuta nel piano σ contenente s e passante per P. Pertanto t sarà data dall'intersezione di π e σ. Determiniamo questi due piani. Il fascio di piani passanti per r ha equazione:

$$h(2x - y + 3z) + k(x - y - 3) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo l'equazione $-3h - 4k = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Scegliendo ad esempio $h = 4$ e $k = -3$ troviamo l'equazione di π:

$$5x - y + 12z + 9 = 0.$$

Il fascio di piani passanti per s ha equazione:

$$h(3x + 3y - z + 2) + k(2y + 3z) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo l'equazione $12h + k = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Scegliendo ad esempio $h = 1$ e $k = -12$ troviamo l'equazione di σ:

$$3x - 21y - 37z + 2 = 0.$$

Dunque le equazioni cartesiane di t sono:

$$\begin{cases} 5x - y + 12z + 9 = 0 \\ 3x - 21y - 37z + 2 = 0 \end{cases}$$

E.24.10 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo, se possibile, in maniera indipendente le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta cercata. Ovviamente determinata una forma per le equazioni della retta sarebbe possibile determinare da essa l'altra.

a. La retta passante per i punti $P = (3, 1, 1)$, $Q = (1, -2, 1)$ ha parametri direttori

$$(1 - 3, -2 - 1, 1 - 1) = (-2, -3, 0).$$

Dunque le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane dobbiamo trovare due piani distinti contenenti i punti P e Q. Consideriamo allora la stella di piani passanti per P:

$$a(x - 3) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto Q troviamo la condizione:

$$a(1 - 3) + b(-2 - 1) + c(1 - 1) = 0,$$

ovvero

$$-2a - 3b = 0.$$

Dunque i piani passanti per P e Q sono quelli la cui equazione è del tipo

$$-\frac{3}{2}b(x - 3) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0.$$

Si noti che questi piani formano il fascio di piani passanti per la retta congiungente i punti P e Q. Per determinare le equazioni cartesiane della retta cercata dobbiamo allora scegliere due piani distinti in questo fascio. Prendiamo per semplicità il piano corrispondente alla coppia di valori $(b, c) = (1, 0)$:

$$-\frac{3}{2}(x - 3) + (y - 1) = 0,$$

ovvero

$$3x - 2y - 7 = 0.$$

Prendiamo ora un altro piano del fascio (dobbiamo scegliere una coppia di valori (b, c) non proporzionali alla coppia $(1, 0)$). Per semplicità scegliamo $(b, c) = (0, 1)$. Otteniamo così il piano di equazione

$$z - 1 = 0.$$

La retta ha dunque equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 3x - 2y \quad - 7 = 0 \\ \qquad\qquad z - 1 = 0 \end{cases}$$

b. Conosciamo un punto e i parametri direttori della retta. Possiamo quindi facilmente scrivere le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = \quad\ \ t \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane di questa retta dobbiamo trovare due piani distinti che la contengono. Ricaviamo un'espressione per t dalla terza equazione: $t = z$. Sostituendo questa espressione nella prima equazione troviamo $x = 2 + z$, sostituendo nella seconda equazione troviamo $y = 1 - z$. La retta ha allora equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + \phantom{y +{}} z - 2 = 0 \\ \phantom{x +{}} y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

c. La retta r è contenuta nei piani $\pi\colon 2x - y + z - 5 = 0$ e $\sigma\colon 3x - 2y + z = 0$. La retta cercata è contenuta nel piano π', parallelo a π e passante per P. Allo stesso modo la retta è contenuta nel piano σ', parallelo a σ e passante per P. La retta cercata è allora l'intersezione dei piani π' e σ'. Determiniamo l'equazione di π'. Il fascio di piani paralleli a π è dato dalle equazioni:

$$2x - y + z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo $k = -5$. Dunque il piano π' ha equazione:

$$\pi'\colon 2x - y + z - 5 = 0.$$

Il fascio di piani paralleli a σ è dato dalle equazioni:

$$3x - 2y + z + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo $h = -8$. Dunque il piano s' ha equazione:

$$\sigma'\colon 3x - 2y + z - 8 = 0.$$

La retta cercata ha allora equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ 3x - 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo le equazioni parametriche della retta cercata:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - t \\ z = \phantom{-1 - {}} t \end{cases}$$

d. La retta cercata ha gli stessi parametri direttori della retta assegnata, vale a dire $(-2, -1, 2)$. Dunque la retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Ricaviamo t dalla seconda equazione: $t = 2 - y$. Sostituendo questa espressione nella prima e nella seconda equazione determiniamo le equazioni di due piani contenenti la retta. Otteniamo dunque $x = 1 - (2 - y)$ e $z = 5 + 2(2 - y)$. Dunque la retta cercata ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y \phantom{{}+z} + 1 = 0 \\ \phantom{x -{}} 2y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

E.24.11 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo, se possibile, in maniera indipendente le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano cercato. Ovviamente determinata una forma per le equazioni del piano sarebbe possibile determinare da essa l'altra direttamente.

a. Il piano è parallelo al vettore $\boldsymbol{u} := \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ vale a dire a $(0, -4, 0)$ e $(0, -1, -1)$. Dunque il piano ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 4t - u \\ z = 1 \qquad\ - u \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana del piano consideriamo la stella di piani passanti per P:

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q troviamo la condizione

$$a(1-1) + b(-2-2) + c(1-1) = 0,$$

che dà $b = 0$. Il generico piano passante per P e Q ha allora equazione:

$$a(x-1) + c(z-1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per R troviamo la condizione:

$$a(1-1) + c(0-1) = 0,$$

che dà $c = 0$. Assegnato ora ad a un valore arbitrario diverso da 0, ad esempio $a = 1$, determiniamo l'equazione cartesiana del piano cercato:

$$x - 1 = 0.$$

b. Le equazioni parametriche si possono scrivere immediatamente:

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2u \\ y = \qquad\qquad u \\ z = -2 + t + u \end{cases}$$

Per scrivere l'equazione cartesiana possiamo ricavare u dalla seconda equazione e sostituire l'espressione trovata nella prima e nella terza equazione:

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2y \\ z = -2 + t + y \end{cases}$$

Ricaviamo ora t dalla prima equazione ($t = x + 2y - 1$), e sostituiamo l'espressione così trovata nella seconda equazione:

$$z = -2 + (x + 2y - 1) + y.$$

Otteniamo così l'equazione cartesiana del piano cercato:

$$x + 3y - z - 3 = 0.$$

c. Il generico piano parallelo al piano dato ha equazione cartesiana $3x + y - z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = 0$, da cui otteniamo l'equazione del piano cercato $3x + y - z = 0$. Per determinare le equazioni parametriche risolviamo l'equazione del piano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t + u \\ z = \qquad\ u \end{cases}$$

d. Le equazioni parametriche si possono scrivere immediatamente:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + \ \ u \\ y = 2 + 3t - 2u \\ z = 5 - \ \ t \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana del piano possiamo ricavare t dalla terza equazione ($t = 5 - z$) e sostituire l'espressione trovata nella prima e nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = 1 - 2(5 - z) + \ \ u \\ y = 2 + 3(5 - z) - 2u \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x = -\ \ 9 \ + 2z + \ u \\ y = \quad 17 - 3z - 2u \end{cases}$$

Ricaviamo ora u dalla prima equazione ($u = x - 2z + 9$), e sostituiamo l'espressione così trovata nella seconda equazione:

$$y = 17 - 3z - 2(x - 2z + 9).$$

Otteniamo così l'equazione cartesiana del piano cercato:

$$2x + y - z + 1 = 0.$$

E.24.12 Un piano ha equazione generica $ax + by + cz + d$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione:

$$2a + 3b + c + d = 0,$$

da cui ricaviamo

$$d = -2a - 3b - c.$$

L'equazione del piano può quindi scriversi così:

$$ax + by + cz - 2a - 3b - c = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q troviamo

$$a - b - 2a - 3b - c = 0,$$

da cui otteniamo:

$$c = -a - 4b.$$

L'equazione del piano passante per P e Q può allora scriversi così:

$$ax + by - (a + 4b)z - a + b = 0.$$

Ora dobbiamo solo imporre il parallelismo di questo piano con la retta r. L'intersezione di questo piano con r si può ottenere come soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ ax + by - (a + 4b)z - a + b = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema di 3 equazioni nelle tre incognite x, y, z. Esso ha quindi un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice del sistema è diverso da 0. Ma il sistema ha un'unica soluzione se e solo il piano e la retta sono incidenti. Un piano e una retta sono paralleli se e solo se non sono incidenti, quindi possiamo imporre la condizione di parallelismo tra la retta e il piano richiedendo che la matrice del sistema

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & -(a+4b) \end{pmatrix}$$

abbia determinante nullo, cioè

$$-3b = 0.$$

Possiamo allora scrivere l'equazione del piano così:

$$ax - az - a = 0.$$

Queste equazioni sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Assegnando ad a un qualsiasi valore non nullo, ad esempio 1, troviamo allora l'equazione:

$$x - z - 1 = 0.$$

E.24.13 Sia dato un piano generico di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$. Consideriamo il sistema che dà l'intersezione di questo piano con la retta r

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

È un sistema di tre equazioni in tre incognite la cui matrice dei coefficienti è:

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se A ha determinante diverso da 0, allora il sistema ha un'unica soluzione, cioè il piano e la retta r sono incidenti in un punto. Il piano e la retta r sono allora paralleli se e solo se $\det A = 0$. Imponendo questa condizione troviamo:

$$3a + 3b - c = 0.$$

Analogamente per imporre il parallelismo con la retta s consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ 3x + 3y - z + 2 = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è:

$$B := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il piano è parallelo a s se e solo se $\det B = 0$, cioè se e solo se:

$$11a - 9b + 6c = 0.$$

Abbiamo così ottenuto delle condizioni su a, b e c che esprimono il parallelismo del piano sia con r che con s:

$$\begin{cases} 3a + 3b - c = 0 \\ 11a - 9b + 6c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo: $a = -\frac{3}{20}c$, $b = \frac{29}{60}c$. Posto, ad esempio, $c := 60$, abbiamo allora che l'equazione del generico piano parallelo sia a r sia a s è:

$$-9x + 29y + 60z + d = 0.$$

Imponiamo ora il passaggio per il punto P:

$$-9 \cdot 1 + 29 \cdot 2 + 60(-1) + d = 0,$$

da cui troviamo $d = 11$. Il piano π ha quindi equazione:

$$-9x + 29y + 60z + 11 = 0.$$

CAPITOLO 25

Funzioni tra insiemi

In questo capitolo studieremo le funzioni tra insiemi. Definiremo innanzitutto il concetto di funzione e i concetti di immagine e controimmagine. Introdurremo poi il concetto di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Questo ci permetterà di definire la funzione inversa.

25.1 Funzioni. Immagini e controimmagini

Definizione 25.1 Siano A e B due insiemi. Una **funzione** (o **applicazione**) $f\colon A \to B$ è una legge che associa a ogni elemento a di A un elemento b di B. Quest'ultimo elemento b viene indicato con il simbolo $f(a)$ e viene chiamato **immagine** di a. L'insieme A si dice **insieme di partenza** o **dominio** di f e l'insieme B si dice **insieme di arrivo** o **codominio**[1] di f. △

Definizione 25.2 L'insieme delle immagini degli elementi di A viene chiamato **immagine** di A attraverso la funzione f (o anche **immagine** della funzione f) e viene indicato con il simbolo $f(A)$.

Possiamo anche dare una definizione dell'immagine di f in simboli:

$$f(A) \coloneqq \{f(a) \mid a \in A\}$$

o equivalentemente, dato $b \in B$, si ha:

$$b \in f(A) \text{ se e solo se esiste } a \in A \text{ tale che } f(a) = b.$$ △

Esempio 25.3 Sia A l'insieme dei cittadini italiani e sia B l'insieme formato dal numero 0 e dai naturali, cioè $B \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$. La legge f che associa a ogni cittadino italiano la sua età è una funzione $f\colon A \to B$.

Se, per esempio, il signor Giovanni Rossi, cittadino italiano, ha 32 anni, abbiamo $f(\text{Giovanni Rossi}) = 32$. Giovanni Rossi ha dato il nome Vittoria alla figlia appena nata. Quindi $f(\text{Vittoria}) = 0$. △

[1] In alcuni testi il termine codominio indica l'immagine di f.

Esempio 25.4 Sia $B := \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $C := \{0, 1\}$. Consideriamo la legge g che associa a ogni numero intero il numero 1 se esso è maggiore o uguale di 18 e il numero 0 altrimenti. La legge g è una funzione $g\colon B \to C$. Si ha, per esempio: $g(32) = 1$, $g(13) = 0$, $g(0) = 0$. △

Esempio 25.5 Consideriamo la legge che associa a ogni numero reale a il numero reale a^2. Abbiamo una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si ha, per esempio:

$$f(2) = 4, \quad f(-3) = 9, \quad f(0) = 0.$$

I numeri reali che sono quadrati di numeri reali sono positivi o nulli. Abbiamo quindi

$$f(\mathbb{R}) = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq 0\}.$$ △

Esercizio di base 25.6 Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la legge che associa a ogni numero reale il suo valore assoluto. Determinare $f(1)$, $f(-2)$ e $f(0)$. Determinare $f(\mathbb{R})$.

Definizione 25.7 Data una funzione $f\colon A \to B$ e un elemento $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** di b attraverso f il sottoinsieme di A formato dagli elementi a tali che $f(a) = b$. Indichiamo questo sottoinsieme di A con il simbolo $f^{-1}(b)$. Possiamo esprimere tutto ciò in simboli:

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$ △

Chiaramente, dato $b \in B$, si ha:

$$f^{-1}(b) \neq \varnothing \text{ se e solo se } b \in f(A).$$

Esempio 25.8 Consideriamo la funzione data nell'esempio 25.3. Dato il numero 32, si ha che $f^{-1}(32)$ è formato da tutti i cittadini italiani che hanno 32 anni. Si ha che $f^{-1}(32) \neq \varnothing$. Sappiamo infatti che il signor Giovanni Rossi ha 32 anni. Egli appartiene quindi a $f^{-1}(32)$. Anche $f^{-1}(0) \neq \varnothing$. La figlia Vittoria di Giovanni Rossi appartiene infatti a $f^{-1}(0)$. Abbiamo inoltre $f^{-1}(391) = \varnothing$. Non esiste infatti alcun cittadino italiano che ha 391 anni. △

Esempio 25.9 Consideriamo la funzione g data nell'esempio 25.4. Si ha:

$$g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x < 18\},$$
$$g^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \geq 18\}.$$ △

Esempio 25.10 Consideriamo la funzione data nell'esempio 25.5. Essa associa a ogni numero il suo quadrato. Si ha:

$$f^{-1}(0) = \{0\}, \quad f^{-1}(4) = \{2, -2\}, \quad f^{-1}(-4) = \varnothing.$$ △

Esempio 25.11 Consideriamo la funzione trunc: $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ che associa a ogni numero reale positivo r il massimo numero intero minore o uguale di r. Ad esempio si ha:

$$\operatorname{trunc}(3) = 3, \quad \operatorname{trunc}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{trunc}\left(\sqrt{2}\right) = 1.$$

Dato $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha $\operatorname{trunc}^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid a \leq x < a+1\}$. △

Esempio 25.12 Consideriamo la funzione $m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che associa a ogni numero intero a il numero $2a$. Fissato $b \in \mathbb{N}$ si ha $m^{-1}(b) = \varnothing$ se e solo se b è dispari e $m^{-1}(b) = \left\{\frac{b}{2}\right\}$ se e solo se b è pari. △

Esercizio di base 25.13 Considerata la funzione f dell'esercizio di base 25.6, determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(4)$ e $f^{-1}(-4)$.

Definizione 25.14 Siano date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to B$. Esse si dicono **uguali** se per ogni $a \in A$ si ha $f(a) = g(a)$. △

Notiamo che per verificare se due funzioni f e g siano uguali dobbiamo innanzitutto verificare che esse abbiano gli stessi insieme di partenza e gli stessi insiemi di arrivo; poi controlliamo se per ogni $a \in A$ si ha $f(a) = g(a)$.

Ad esempio le due funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ (dove $\mathbb{R}^{\geq 0}$ indica l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali di 0) definite da $f(x) := x^2$ e $g(x) := x^2$ non sono uguali perché hanno diversi insiemi di arrivo.

Esempio 25.15 Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(a) := a^2$ e la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(a) := |a|$. Si ha $f(2) = 4 \neq 2 = g(2)$. Pertanto le due funzioni non sono uguali.

Facciamo notare che, date due funzioni aventi gli stessi insiemi di partenza e gli stessi insiemi di arrivo, per mostrare che le due funzioni **non** sono uguali, bisogna determinare **un** elemento su cui esse non coincidano. Due funzioni non uguali possono coincidere su alcuni elementi, ma non su tutti gli elementi.

Nel nostro caso si ha, per esempio $f(1) = 1 = g(1)$. △

25.2 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Definizione 25.16 Una funzione $f\colon A \to B$ è detta **suriettiva** se la sua immagine $f(A)$ coincide con l'insieme di arrivo B, vale a dire $f(A) = B$. In altri termini, f è suriettiva se per ogni elemento $b \in B$ esiste (almeno) un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. △

Definizione 25.17 Una funzione $f\colon A \to B$ è detta **iniettiva** se, comunque si scelgano a_1 e a_2 distinti in A, si ha $f(a_1 \neq f(a_2)$. In altri termini, f è iniettiva se, ogni qual volta si ha $f(a_1) = f(a_2)$, risulta necessariamente $a_1 = a_2$. △

Definizione 25.18 Una funzione $f\colon A \to B$ è detta **biiettiva** o **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva. △

Esempio 25.19 La funzione $f\colon A \to B$ data nell'esempio 25.3 non è suriettiva. Abbiamo visto infatti che $391 \notin f(A)$. Quindi $f(A) \neq B$. La funzione f non è neanche iniettiva. Infatti, oltre al signor Giovanni Rossi, esistono altri cittadini italiani che hanno 32 anni. △

Esempio 25.20 La funzione $g\colon B \to C$ definita nell'esempio 25.4 è suriettiva. Essa non è iniettiva. △

Esempio 25.21 La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data nell'esempio 25.5, che associa a ogni numero reale a il proprio quadrato a^2 non è suriettiva. Abbiamo infatti visto che $-4 \notin f(\mathbb{R})$. Inoltre la funzione f non è iniettiva. Notiamo infatti che $f(2) = f(-2)$. △

Esempio 25.22 La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ che associa a ogni numero reale a il proprio quadrato a^2 è suriettiva ma non iniettiva. Notiamo che la funzione appena data e la funzione data nell'esempio precedente non sono uguali perché hanno diversi insiemi di arrivo. △

Esempio 25.23 La funzione $f\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ che associa a ogni numero reale non negativo a il proprio quadrato a^2 è biiettiva. La funzione appena data e la funzione data nell'esempio precedente non sono uguali perché hanno diversi insiemi di partenza. △

Esempio 25.24 La funzione $\log\colon \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ che associa a ogni numero reale positivo a il suo logaritmo $\log a$ è una funzione biiettiva. △

Il fatto che una funzione sia iniettiva, suriettiva o biiettiva può essere espresso in termini delle controimmagini degli elementi dell'insieme di arrivo. Abbiamo infatti la:

Proposizione 25.25 *Sia $f\colon A \to B$ una funzione. Allora:*

- *f è suriettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b) \neq \varnothing$;*
- *f è iniettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da al massimo un elemento;*
- *f è biiettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da esattamente un elemento.*

Esercizio di base 25.26 Dimostrare la proposizione precedente.

Esempio 25.27 La funzione trunc definita nell'esempio 25.11 è suriettiva. Abbiamo infatti visto che ogni elemento di $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ha una controimmagine non vuota. La funzione non è iniettiva. Abbiamo infatti visto che ci sono elementi di $\mathbb{N} \cup \{0\}$ la cui controimmagine è formata da più di un elemento (anzi ogni elemento di $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ha la controimmagine formata da più di un elemento). △

Esempio 25.28 La funzione m definita nell'esempio 25.12 non è suriettiva. Abbiamo infatti visto che ogni numero dispari non è immagine di alcun numero intero. La funzione è iniettiva. Lasciamo la verifica per esercizio. △

Esercizio di base 25.29 Stabilire se la funzione $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa a ogni numero reale x il numero e^x è iniettiva e suriettiva. Rispondere poi alle stesse domanda per la funzione $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ definita da $t(x) := e^x$.

Esercizio di base 25.30 Stabilire se la funzione $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa a ogni numero reale il proprio seno è iniettiva e suriettiva.

Esercizio di base 25.31 Stabilire se la funzione $\det\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che associa a ogni matrice il suo determinante è suriettiva e iniettiva.

Esercizio di base 25.32 Sia data la funzione $f\colon \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$ che associa a ogni matrice la sua trasposta. Stabilire se f è iniettiva e suriettiva.

Diamo ora l'esempio di una importante classe di funzioni iniettive.

Esempio 25.33 Sia A un sottoinsieme di un insieme B. Chiamiamo **funzione inclusione** la funzione $i\colon A \to B$ che associa ad $a \in A$ l'elemento a stesso. Un esempio di funzione inclusione è la funzione $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. △

Esempio 25.34 Dato un insieme A, consideriamo la funzione $1_A\colon A \to A$ che associa a ogni elemento di A l'elemento stesso. Cioè:

$$1_A(a) := a.$$

Essa viene chiamata **funzione identica** di A. Chiaramente è una funzione biiettiva. △

Osservazione 25.35 Abbiamo dato esempi di funzioni:

- suriettive e iniettive (cioè biunivoche);
- non suriettive e iniettive;
- non suriettive e non iniettive.

Da tutto ciò dovrebbe essere ben chiaro che è un grave errore dire che, se una funzione non è suriettiva, allora essa è iniettiva. △

25.3 Funzione inversa

Definizione 25.36 Sia $f\colon A \to B$ una funzione biiettiva. Definiamo una funzione $g\colon B \to A$ nel seguente modo. Dato $b \in B$, sappiamo che la controimmagine di b contiene esattamente un elemento, vale a dire che esiste uno e un solo elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Poniamo allora, per definizione, $g(b) := a$. La funzione g appena definita viene chiamata **funzione inversa** della funzione f, e viene indicata con il simbolo f^{-1}. Utilizzando questo simbolismo possiamo dire che se $f(a) = b$, allora $f^{-1}(b) = a$. △

Nota 25.37 Sia $f\colon A \to B$ una funzione e sia $b \in f(a)$. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ abbiamo indicato la controimmagine di b attraverso la funzione f. Nel caso in cui la funzione sia iniettiva allora $f^{-1}(b) = \{a\}$. Se poi la funzione f è biiettiva, con lo stesso simbolo $f^{-1}(b)$ abbiamo indicato anche l'immagine di b, attraverso la funzione f^{-1}, vale a dire $f^{-1}(b) = a$. Abbiamo dunque una possibile ambiguità: il simbolo $f^{-1}(b)$ può indicare tanto un sottoinsieme di A quanto un suo elemento. △

Esempio 25.38 Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(a) := a + 1$. Si verifica facilmente che la funzione f è biiettiva. Si verifica altrettanto facilmente che la funzione f^{-1} è definita da $f^{-1}(b) := b - 1$. △

Esempio 25.39 Sia t la legge che associa a ogni macchina la sua targa. Possiamo considerare questa legge come una funzione biiettiva $t\colon M \to T$ dove M è l'insieme delle macchine targate e T è l'insieme delle targhe. L'inversa della funzione t è la funzione t^{-1} che associa a ogni targa la sua macchina. △

Esercizio di base 25.40 Abbiamo visto nell'esercizio di base 25.32 che la funzione $f\colon\ \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$ che associa a ogni matrice la sua trasposta è biiettiva. Determinare la funzione f^{-1}.

Esercizio di base 25.41 Verificare che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(a) := 2a - 1$ è una funzione biiettiva. Determinare la funzione f^{-1}.

25.4 Composizione di funzioni

Esempio 25.42 Supponiamo di voler sapere quali siano i cittadini italiani che sono maggiorenni. Per far ciò per ogni cittadino consideriamo la sua età e poi vediamo se essa è maggiore o uguale a 18. Se, per esempio, vogliamo sapere se il signor Giovanni Rossi (vedi esempio 25.3) è maggiorenne, andiamo a vedere la sua età (32). Quindi poiché $32 \geq 18$, abbiamo che Giovanni Rossi è maggiorenne. Sua figlia Vittoria, che ha 0 anni, non è maggiorenne.

Vogliamo formalizzare il metodo da noi usato per determinare quali siano i cittadini italiani maggiorenni. Abbiamo innanzitutto considerato la funzione f che associa a ogni cittadino italiano a la sua età $f(a)$ (abbiamo introdotto questa funzione nell'esempio 25.3). Abbiamo poi considerato la funzione g (vedere esempio 25.4) che associa al numero b il numero $g(b) = 1$ se $b \geq 18$ e il numero $g(b) = 0$ altrimenti. Possiamo quindi dire che il cittadino italiano a è maggiorenne se e solo se si ha $g(f(a)) = 1$.

Date quindi le funzioni f e g, abbiamo definito una nuova funzione h che associa a ogni cittadino italiano il numero 1 se esso è maggiorenne e il numero 0 altrimenti. Questa funzione h viene detta composizione delle funzioni f e g. △

Vogliamo ora generalizzare ciò che abbiamo appena visto.

Definizione 25.43 Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Definiamo la **funzione composizione** $h\colon A \to C$ nel seguente modo:

$$h(a) := g(f(a)).$$

La funzione h, composizione di f e g, viene indicata con il simbolo $g \circ f$. Utilizzando questo simbolismo abbiamo quindi:

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)). \qquad \triangle$$

Nota 25.44 Fare ben attenzione: se noi applichiamo prima la funzione f e poi la funzione g, utilizziamo per la funzione composta il simbolo $g \circ f$. In questo simbolo **prima** si scrive la **seconda** funzione e **poi** la **prima** funzione. La ragione di questo simbolismo, che a prima vista può sembrare strano, deriva dalla formula che definisce $g \circ f$. $\triangle$

Esempio 25.45 Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) := x^2$ e $g(x) := 2x$. Consideriamo la funzione $g \circ f$. Si ha:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2.$$

Consideriamo ora la funzione $f \circ g$. Abbiamo:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2.$$

Abbiamo quindi $g \circ f \neq f \circ g$. Infatti $(g \circ f)(1) = 2$ mentre $(f \circ g)(1) = 4$ $\triangle$

Esercizio di base 25.46 Nell'esempio 25.42 abbiamo considerato la funzione composizione $g \circ f$. Possiamo considerare la funzione $f \circ g$?

Esempio 25.47 Consideriamo una funzione biiettiva $f\colon A \to B$ e la sua funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$. Consideriamo $f^{-1} \circ f\colon A \to A$. Si ha:

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Abbiamo perciò:

$$f^{-1} \circ f = 1_A.$$

Ricordiamo che con il simbolo 1_A abbiamo indicato la funzione identica di A.$\triangle$

Esercizio di base 25.48 Data la funzione biiettiva $f\colon A \to B$, verificare che si ha:

$$f \circ f^{-1} = 1_B. \qquad \triangle$$

Teorema 25.49 *Date le funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, si ha:*

1. *se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva;*
2. *se f e g sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva.*

Dimostrazione Dimostriamo innanzitutto la 1. Dobbiamo provare che, dati due elementi distinti a e a' di A, allora $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$. Poiché la funzione f è iniettiva sappiamo che $f(a) \neq f(a')$. Poiché la funzione g è iniettiva si ha $g(f(a)) \neq g(f(a'))$. Abbiamo pertanto mostrato la nostra tesi: $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$.

Dimostriamo ora la 2. Dobbiamo provare che, per ogni $c \in C$, esiste $a \in A$ tale che $(g \circ f)(a) = c$. Poiché la funzione g è suriettiva, esiste $b \in B$ tale che $g(b) = c$. Poiché la funzione f è suriettiva, esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Ma allora $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo. ■

Esercizio di base 25.50 Verificare se le funzioni f e g assegnate nell'esempio 25.45 sono iniettive, suriettive, biunivoche. Verificare poi se le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono iniettive, suriettive, biunivoche.

25.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.25.6 Per definizione abbiamo che $f(1) = 1$, $f(-2) = 2$ e $f(0) = 0$. Per determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$ dobbiamo trovare i numeri reali y per cui esiste un numero reale x tale che $|x| = y$. Se $y < 0$ allora non esiste alcun x tale che $|x| = y$, se invece $y \geq 0$ allora $y = |y|$, cioè $y = f(y)$, e, dunque, $y \in f(\mathbb{R})$. Pertanto $f(\mathbb{R}) = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq 0\}$.

EB.25.13 Per definizione di controimmagine abbiamo che $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 0\}$. Dunque $f^{-1}(0) = \{0\}$. Analogamente si trova che $f^{-1}(4) = \{4, -4\}$ e $f^{-1}(-4) = \varnothing$.

EB.25.26 Sappiamo che f è suriettiva se e solo se per ogni $b \in B$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $b = f(a)$, vale a dire un elemento a nella controimmagine di b. Dunque, f è suriettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è non vuota.

Vogliamo ora mostrare che f è iniettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da al massimo un elemento. Per far questo possiamo mostrare che f **non** è iniettiva se e solo se esiste un elemento $b \in B$ la cui controimmagine contiene più di un elemento. Supponiamo allora che esista un elemento $b \in B$ nella cui controimmagine c'è più di un elemento. Possiamo quindi scegliere a e a' in $f^{-1}(b)$ diversi fra loro: ma allora $f(a) = f(a')$, cioè f non è iniettiva. Viceversa se f non è iniettiva esistono due elementi a e a' diversi fra loro tali che $f(a) = f(a')$: ma allora, posto $b = f(a)$, abbiamo che la controimmagine di b contiene (almeno) i due elementi a e a'.

Combinando i due casi precedenti si ottiene poi immediatamente che f è biiettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da esattamente un elemento.

EB.25.29 Sappiamo che qualunque sia x il numero reale e^x è positivo. Dunque l'immagine di exp non è uguale a tutto $\mathbb{R}$ e, pertanto, exp non è suriettiva. Per stabilire se exp è iniettiva dobbiamo considerare due numeri reali x e y tali che $e^x = e^y$: dalle proprietà dell'esponenziale, sappiamo che questo implica che $x = y$, cioè exp è iniettiva.

In maniera analoga si vede che t è iniettiva. Inoltre, dalle proprietà dell'esponenziale, sappiamo che dato un numero reale positivo b, esiste un numero reale a tale che $e^a = b$. Dunque t è suriettiva. In conclusione t è biiettiva.

EB.25.30 Per mostrare che la funzione sin non è iniettiva, dobbiamo trovare due numeri reali distinti x e y tali che $\sin x = \sin y$. Possiamo ad esempio scegliere $x = 0$ e $y = \pi$. Per mostrare che la funzione sin non è suriettiva, basta che notiamo che i valori assunti dal seno sono compresi tra -1 e 1.

EB.25.31 Per mostrare che det è suriettiva, occorre trovare, per ogni numero reale x una matrice di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ il cui determinante sia x. Consideriamo una generica matrice di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$:
$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Sappiamo che $\det A = ad - bc$. Allora se scegliamo $a := x$, $d := 1$, $b = c = 0$, abbiamo una matrice con determinante uguale a x. Per mostrare che det non è iniettiva dobbiamo trovare due matrici differenti aventi lo stesso determinante. È facile vedere che se prendiamo due matrici aventi entrambe la prima riga nulla e aventi la seconda riga differente, queste matrici hanno entrambe determinante nullo.

EB.25.32 Per dimostrare che f è iniettiva dobbiamo mostrare che, se A e B sono due matrici di $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ tali che $f(A) = f(B)$ allora $A = B$. Ma $f(A) = {}^tA$ e $f(B) = {}^tB$. Dobbiamo quindi dimostrare che se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$. A tal proposito, ricordiamo che, per ogni matrice A in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, abbiamo ${}^t({}^tA) = A$. Ma allora, da ${}^tA = {}^tB$ segue ${}^t({}^tA) = {}^t({}^tB)$, vale a dire $A = B$.

Per mostrare che f è suriettiva dobbiamo trovare, per ogni matrice B in $\mathrm{M}(q, p, \mathbb{R})$, una matrice A in $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ tale che $B = {}^tA$. Possiamo allora scegliere come matrice A la matrice ${}^tB$: infatti

$$f(A) = {}^tA = {}^t({}^tB) = B.$$

EB.25.40 L'inversa di f è semplicemente la funzione

$$f^{-1} \colon \mathrm{M}(q, p, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$$

che associa a una matrice la sua trasposta.

EB.25.41 Dobbiamo mostrare che per ogni numero reale b esiste uno e un solo numero reale a tale che $f(a) = b$, vale a dire $2a - 1 = b$. Ma allora l'unico numero reale che soddisfa questa relazione è $\frac{b+1}{2}$. Dunque f è biiettiva e f^{-1} è definita da $f^{-1}(b) = \frac{b+1}{2}$.

EB.25.46 No, perché dovremmo prima applicare la funzione g che associa numeri interi a numeri interi, e poi applicare al risultato la funzione f, che è definita sull'insieme dei cittadini italiani e non sull'insieme dei numeri interi.

EB.25.48 Dobbiamo mostrare che per ogni elemento b in B si ha $(f \circ f^{-1})(b) = b$, vale a dire $f(f^{-1}(b)) = b$. Per definizione $f^{-1}(b)$ è uguale all'unico elemento a di A tale che $f(a) = b$. Ma allora

$$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

EB.25.50 Verifichiamo innanzitutto se la funzione f è iniettiva. Ci chiediamo cioè se dati due numeri x e y tali che $f(x) = f(y)$ deve necessariamente essere $x = y$. Dire $f(x) = f(y)$ significa che $x^2 = y^2$: questo non implica $x = y$. Basta ad esempio prendere $x = 1$ e $y = -1$. Dunque f non è iniettiva. Stabiliamo ora se f è suriettiva. Dato un qualunque x in $\mathbb{R}$ dobbiamo vedere se esiste y in $\mathbb{R}$ tale che $f(y) = x$, vale a dire $y^2 = x$. Un tale y esiste solo se $x \geq 0$, dunque, f non è suriettiva.

Consideriamo ora la funzione g. Per stabilire se g è iniettiva prendiamo due numeri x e y tali che $g(x) = g(y)$: ciò significa che $2x = 2y$. Dunque $x = y$: questo significa che g è iniettiva. Per verificare se g è suriettiva, prendiamo un qualunque x in $\mathbb{R}$: dobbiamo vedere se esiste y in $\mathbb{R}$ tale che $g(y) = x$, vale a dire $2y = x$. Un tale y esiste: basta prendere $y = \frac{x}{2}$. Dunque g è suriettiva. Possiamo allora affermare che g è biiettiva.

Passiamo ora ad analizzare la funzione composta $f \circ g$. Determiniamo esplicitamente tale funzione:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

Con ragionamenti simili ai precedenti si vede che $f \circ g$ non è né iniettiva (perché, ad esempio, $(f \circ g)(1) = (f \circ g)(-1)$), né suriettiva (perché l'immagine di $f \circ g$ non contiene numeri negativi).

Determiniamo infine esplicitamente $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2.$$

Possiamo ancora dire che la funzione $g \circ f$ non è né iniettiva (perché, ad esempio, $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(-1)$), né suriettiva (perché l'immagine di $g \circ f$ non contiene numeri negativi).

25.6 Sunto

Funzioni. Immagini e controimmagini

Definizione Siano dati due insiemi A e B. Una **funzione** (o **applicazione**) $f: A \to B$ è una legge che associa a ogni elemento a di A un elemento b di B. Quest'ultimo elemento b viene indicato con il simbolo $f(a)$ e viene chiamato **immagine** di a. L'insieme A si dice **insieme di partenza** di f e l'insieme B si dice **insieme di arrivo** di f. △

Definizione L'insieme delle immagini degli elementi di A viene chiamato **immagine** di A attraverso la funzione f (o anche **immagine** della funzione f) e viene indicato con il simbolo $f(A)$. Possiamo anche dare una definizione dell'immagine di f in simboli:

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

o equivalentemente, dato $b \in B$, si ha:

$$b \in f(A) \text{ se e solo se esiste } a \in A \text{ tale che } f(a) = b. \qquad \triangle$$

Definizione Data una funzione $f: A \to B$ e un elemento $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** di b attraverso f il sottoinsieme di A formato dagli elementi a tali che $f(a) = b$. Indichiamo questo sottoinsieme di A con il simbolo $f^{-1}(b)$. Possiamo esprimere tutto ciò in simboli:

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}. \qquad \triangle$$

Chiaramente, dato $b \in B$, si ha:

$$f^{-1}(b) \neq \varnothing \text{ se e solo se } b \in f(A).$$

Definizione Siano date due funzioni $f: A \to B$ e $g: A \to B$. Esse si dicono **uguali** se per ogni $a \in A$ si ha $f(a) = g(a)$. △

Notiamo che per verificare se due funzioni f e g siano uguali dobbiamo innanzitutto verificare che esse abbiano gli stessi insieme di partenza e gli stessi insiemi di arrivo; poi controlliamo se per ogni $a \in A$ si ha $f(a) = g(a)$.

Ad esempio le due funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ (dove $\mathbb{R}^{\geq 0}$ indica l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali di 0) definite da $f(x) := x^2$ e $g(x) := x^2$ non sono uguali perché hanno diversi insiemi di arrivo.

Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Definizione Una funzione $f: A \to B$ è detta **suriettiva** se la sua immagine $f(A)$ coincide con l'insieme di arrivo B, vale a dire $f(A) = B$. In altri termini, f è suriettiva se per ogni elemento $b \in B$ esiste (almeno) un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. △

Definizione Una funzione $f\colon A \to B$ è detta **iniettiva** se, comunque si scelgano a_1 e a_2 distinti in A, si ha $f(a_1 \neq f(a_2)$. In altri termini, f è iniettiva se, ogni qual volta si ha $f(a_1) = f(a_2)$, risulta necessariamente $a_1 = a_2$. △

Definizione Una funzione $f\colon A \to B$ è detta **biiettiva** o **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva. △

Proposizione *Sia $f\colon A \to B$ una funzione. Allora:*

- *f è suriettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b) \neq \varnothing$;*
- *f è iniettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da al massimo un elemento;*
- *f è biiettiva se e solo se per ogni $b \in B$ si ha che $f^{-1}(b)$ è formato da esattamente un elemento.*

Esempio Sia A un sottoinsieme di un insieme B. Chiamiamo **funzione inclusione** la funzione $i\colon A \to B$ che associa ad $a \in A$ l'elemento a stesso. △

Esempio Dato un insieme A, consideriamo la funzione $1_A\colon A \to A$ che associa a ogni elemento di A l'elemento stesso. Cioè:

$$1_A(a) \coloneqq a.$$

Essa viene chiamata **funzione identica** di A. Chiaramente è una funzione biiettiva. △

Funzione inversa

Definizione Sia $f\colon A \to B$ una funzione biiettiva. Definiamo una funzione $g\colon B \to A$ nel seguente modo. Dato $b \in B$, sappiamo che la controimmagine di b contiene esattamente un elemento, vale a dire che esiste uno e un solo elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Poniamo allora, per definizione, $g(b) \coloneqq a$. La funzione g appena definita viene chiamata **funzione inversa** della funzione f, e viene indicata con il simbolo f^{-1}. Utilizzando questo simbolismo possiamo dire che se $f(a) = b$, allora $f^{-1}(b) = a$. △

Nota Sia $f\colon A \to B$ una funzione e sia $b \in f(a)$. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ abbiamo indicato la controimmagine di b attraverso la funzione f. Nel caso in cui la funzione sia iniettiva allora $f^{-1}(b) = \{a\}$. Se poi la funzione f è biiettiva, con lo stesso simbolo $f^{-1}(b)$ abbiamo indicato anche l'immagine di b, attraverso la funzione f^{-1}, vale a dire $f^{-1}(b) = a$. Abbiamo dunque una possibile ambiguità: il simbolo $f^{-1}(b)$ può indicare tanto un sottoinsieme di A quanto un suo elemento. △

Composizione di funzioni

Definizione Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Definiamo la **funzione composizione** $h\colon A \to C$ nel seguente modo:

$$h(a) \coloneqq g(f(a)).$$

La funzione h, composizione di f e g, viene indicata con il simbolo $g \circ f$. Utilizzando questo simbolismo abbiamo quindi:

$$(g \circ f)(a) \coloneqq g(f(a)). \qquad \triangle$$

Esempio Data una funzione biiettiva $f\colon A \to B$ e la sua funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$. Si ha allora:

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ e } f \circ f^{-1} = 1_B. \qquad \triangle$$

Teorema *Date le funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, si ha:*

1. *se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva;*
2. *se f e g sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva.*

25.7 Esercizi

E.25.1 Verificare se la funzione $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ che associa a ogni matrice il suo rango è suriettiva e se è iniettiva.

E.25.2 Sia $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che associa a ogni numero reale il suo opposto. Verificare che m è una funzione biiettiva e determinarne l'inversa.

E.25.3 Sia $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ la funzione definita da $f(A) \coloneqq A + I$ dove I è la matrice identica di ordine 2. Verificare che f è una funzione biiettiva e determinarne l'inversa.

E.25.4 Indichiamo con $\mathbb{R}^*$ l'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ la funzione che associa a ogni numero reale il suo inverso. Verificare che f è una funzione biiettiva e determinarne l'inversa.

E.25.5 Ricordiamo che abbiamo indicato con $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine 2. Sia $f\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ la funzione che associa a ogni matrice la sua inversa. Dimostrare che f è una funzione biiettiva e determinarne l'inversa.

E.25.6 Sia $s\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ la funzione che in ogni matrice scambia la prima riga con la seconda. Verificare che f è una funzione biiettiva e determinarne l'inversa.

25.8 Soluzioni degli esercizi

E.25.1 La funzione f non è iniettiva perché esistono matrici diverse con lo stesso rango (ad esempio tutte le matrici invertibili hanno rango 2). La funzione f non è nemmeno suriettiva perché il rango delle matrici di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ è al massimo 2.

E.25.2 La funzione m è iniettiva: se $x \neq y$ si ha $-x \neq -y$, cioè $m(x) \neq m(y)$. La funzione m è suriettiva: infatti se x è un numero reale, esiste (esattamente) un numero reale y tale che $m(y) = x$: basta infatti scegliere $y = -x$. La funzione inversa di m è allora m stessa.

E.25.3 Si verifica facilmente che l'inversa di f è la funzione che associa alla matrice A la matrice $A - I$.

E.25.4 Si verifica facilmente che l'inversa di f è la funzione f stessa.

E.25.5 Si verifica facilmente che l'inversa di f è la funzione f stessa.

E.25.6 Si verifica facilmente che l'inversa di s è la funzione s stessa.

CAPITOLO 26

Omomorfismi

Tra le applicazioni $f\colon V \to W$ tra due spazi vettoriali particolare interesse rivestono i cosiddetti omomorfismi. Studieremo le principali proprietà di questi omomorfismi e vedremo poi come associare una matrice a un omomorfismo e viceversa.

26.1 Omomorfismi tra spazi vettoriali

Cominciamo dando la:

Definizione 26.1 Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione tra due spazi vettoriali V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$.
2. $f(k\boldsymbol{u}) = kf(\boldsymbol{u})$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$. △

Per stabilire se una certa applicazione tra spazi vettoriali è un omomorfismo o meno, dovremo verificare se valgono entrambe le proprietà date nella definizione. Sarà allora utile avere una terminologia che ci permetta di riferirci a ciascuna di esse: diremo che un'applicazione f **rispetta l'addizione** se soddisfa la proprietà 1, diremo che un'applicazione f **rispetta la moltiplicazione** se soddisfa la proprietà 2.

Esempio 26.2 Se V e W sono due spazi vettoriali, è facile vedere che l'applicazione $f\colon V \to W$ che associa a ogni vettore di V il vettore nullo di W è un omomorfismo di spazi vettoriali. Questo omomorfismo è detto omomorfismo **nullo**. △

Esempio 26.3 Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x, y, z) := (x + y, y + z).$$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali. Per verificare se f rispetta la somma consideriamo due vettori $\boldsymbol{u} := (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{v} := (x_2, y_2, z_2)$ di $\mathbb{R}^3$. Si ha:

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) =$$

per la definizione di somma in $\mathbb{R}^3$

$$= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$$

per la definizione di f

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$

e

$$f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) =$$

per la definizione di f

$$= (x_1 + y_1, y_1 + z_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2) =$$

per la definizione di somma in $\mathbb{R}^2$

$$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, y_1 + z_1 + y_2 + z_2).$$

Dunque f rispetta la somma. Per verificare se f rispetta il prodotto consideriamo un vettore $\boldsymbol{u} := (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ e uno scalare k di $\mathbb{R}$. Si ha:

$$f(k\boldsymbol{u}) = f(k(x, y, z)) =$$

per la definizione di prodotto in $\mathbb{R}^3$

$$= f(kx, ky, kz) =$$

per la definizione di f

$$= (kx + ky, ky + kz)$$

e

$$kf(\boldsymbol{u}) = kf(x, y, z) =$$

per la definizione di f

$$= k(x + y, y + z) =$$

per la definizione di prodotto in $\mathbb{R}^2$

$$= (kx + ky, ky + kz).$$

L'applicazione f rispetta anche il prodotto e, dunque, f è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. △

Esempio 26.4 Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definita da:

$$f(A) := A + {}^tA.$$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali. Per verificare se f rispetta la somma consideriamo due matrici A e B di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(A+B) &= A + B + {}^t(A+B) \\ &= A + B + {}^tA + {}^tB, \\ f(A) + f(B) &= A + {}^tA + B + {}^tB. \end{aligned}$$

Dunque f rispetta la somma. Per verificare se f rispetta il prodotto consideriamo una matrice A di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ e uno scalare k di $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(kA) &= kA + {}^t(kA) \\ &= kA + k{}^tA, \\ kf(A) &= k(A + {}^tA) \\ &= kA + k{}^tA. \end{aligned}$$

L'applicazione f rispetta anche il prodotto e, dunque, f è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. △

Esempio 26.5 Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x,y) = (x^2, x+y).$$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali. Per verificare se f rispetta la somma consideriamo due vettori $\boldsymbol{u} := (x_1,y_1)$ e $\boldsymbol{v} := (x_2,y_2)$ di $\mathbb{R}^2$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \\ &= f(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= ((x_1+x_2)^2, x_1+x_2+y_1+y_2) \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, x_1+x_2+y_1+y_2), \\ f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) &= f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) \\ &= (x_1^2, x_1+y_1) + (x_2^2, x_2+y_2) \\ &= (x_1^2 + x_2^2, x_1+x_2+y_1+y_2). \end{aligned}$$

Notiamo allora che si ha $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ se e solo se $x_1x_2 = 0$. Questa relazione non è sempre verificata, basta ad esempio considerare i vettori $\boldsymbol{u} := (1,0)$ e $\boldsymbol{v} := (1,0)$. Dunque f non è un omomorfismo di spazi vettoriali. △

Esercizio di base 26.6 Nell'esempio precedente abbiamo mostrato che l'applicazione f non rispetta la somma: questo è stato sufficiente ad affermare che f non è un omomorfismo. Stabilire se f rispetta il prodotto.

Esercizio di base 26.7 Determinare quali fra le applicazioni seguenti sono omomorfismi di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$:

a. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) \coloneqq (x + y, x - y, 0)$.

b. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \coloneqq (a_0, a_1)$.

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y, z) \coloneqq (xyz, x - y)$.

d. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(x, y) \coloneqq (x + y, x - y - 1, 0, x)$.

e. $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ definita da $f(A) \coloneqq A - I$. △

26.2 Matrice associata a un omomorfismo

Supponiamo di avere un omomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali. Se conosciamo l'immagine di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ tramite f allora conosciamo anche l'immagine di $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Inoltre possiamo determinare anche l'immagine di vettori del tipo $k\boldsymbol{u}$. Ovviamente, se f fosse stata un'applicazione non lineare, la conoscenza di $f(\boldsymbol{u})$ e $f(\boldsymbol{v})$ non ci avrebbe dato alcuna informazione su $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ e $f(k\boldsymbol{u})$.

Più in generale possiamo chiederci: se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se conosciamo l'immagine tramite f dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ di V, di quali altri vettori di V possiamo determinare l'immagine? La risposta è data dalla proposizione seguente, la cui dimostrazione è un'immediata conseguenza della definizione di omomorfismo di spazi vettoriali:

Proposizione 26.8 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ vettori di V e k_1, k_2, ..., k_n scalari. Si ha:*

$$f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1f(\boldsymbol{v}_1) + k_2f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_nf(\boldsymbol{v}_n).$$

Dunque la conoscenza di $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$ ci permette di determinare l'immagine tramite f di tutte le combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$. Questo può essere reso più esplicito dalla:

Proposizione 26.9 *Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon V \to W$ due omomorfismi di spazi vettoriali. Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ generano V e $f(\boldsymbol{v}_j) = g(\boldsymbol{v}_j)$ per $1 \le j \le n$ allora $f = g$.*

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che $f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})$ per ogni vettore $\boldsymbol{v}$ in V. Sappiamo che $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$

Allora per la proposizione 26.8 abbiamo che

$$f(\boldsymbol{v}) = f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1f(\boldsymbol{v}_1) + k_2f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_nf(\boldsymbol{v}_n)$$

e

$$g(\boldsymbol{v}) = g(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1g(\boldsymbol{v}_1) + k_2g(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_ng(\boldsymbol{v}_n).$$

Poiché $f(\boldsymbol{v}_1) = g(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2) = g(\boldsymbol{v}_2)$ e così via, abbiamo che $f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})$. ■

Se $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ sono dei generatori di V, un omomorfismo $f \colon V \to W$ è allora completamente descritto se elenchiamo $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$. Viene naturale chiedersi se comunque si assegnino tali vettori si trova un'applicazione lineare. La risposta, negativa, è fornita dal seguente:

Esempio 26.10 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è generato dai vettori $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Non esiste nessun omomorfismo $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0) = (0,0,0)$, $f(0,1) = (0,0,0)$, $f(1,1) = (1,0,0)$. Infatti se un tale omomorfismo esistesse dovremmo avere:

$$f(1,1) = f((1,0) + (0,1)) = f(1,0) + f(0,1) = (0,0,0) + (0,0,0) = (0,0,0).$$

$\triangle$

Nel caso in cui i generatori considerati siano però una base abbiamo il:

Teorema 26.11 *Siano V e W due spazi vettoriali. Sia data una base dello spazio V costituita dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n$ di W. Allora esiste un unico omomorfismo $f \colon V \to W$ tale che:*

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j \text{ per } 1 \leq j \leq n.$$

Dimostrazione Sappiamo già che se esiste un omomorfismo che soddisfa le condizioni assegnate questo deve essere unico.

Vediamo ora che esiste un omomorfismo f che soddisfa le condizioni date. Dobbiamo innanzitutto definire un'applicazione $f \colon V \to W$ tale che $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j$ per $1 \leq j \leq n$. Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di V possiamo scrivere $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ in maniera unica:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n.$$

Dal momento che gli scalari k_i sono, come già notato, determinati univocamente dal vettore $\boldsymbol{v}$ possiamo porre:

$$f(\boldsymbol{v}) := k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{w}_n.$$

Notiamo che il vettore $\boldsymbol{e}_j$ si decompone come:

$$\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{e}_{j-1} + 1\boldsymbol{e}_j + 0\boldsymbol{e}_{j+1} + \cdots + 0\boldsymbol{e}_n,$$

e, dunque, per definizione abbiamo:

$$f(\boldsymbol{e}_j) = 0\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{w}_{j-1} + 1\boldsymbol{w}_j + 0\boldsymbol{w}_{j+1} + \cdots + 0\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}_j.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo ora dimostrare che f è un omomorfismo. Verifichiamo che f rispetta la somma. Consideriamo allora un vettore $\boldsymbol{u}$ di V la cui espressione come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ sia:

$$\boldsymbol{u} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n.$$

Allora abbiamo:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (h_1 + k_1)\boldsymbol{e}_1 + (h_2 + k_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (h_n + k_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Per definizione di f abbiamo allora

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}) &= h_1\boldsymbol{w}_1 + h_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{w}_n, \\ f(\boldsymbol{v}) &= k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{w}_n, \\ f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= (h_1+k_1)\boldsymbol{w}_1 + (h_2+k_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (h_n+k_n)\boldsymbol{w}_n. \end{aligned}$$

Si vede allora immediatamente che $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$. Verifichiamo ora che f rispetta il prodotto. Sia k uno scalare. Abbiamo allora:

$$k\boldsymbol{v} = kk_1\boldsymbol{e}_1 + kk_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + kk_n\boldsymbol{e}_n.$$

Per definizione di f abbiamo:

$$f(k\boldsymbol{v}) = kk_1\boldsymbol{w}_1 + kk_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + kk_n\boldsymbol{w}_n.$$

Si vede allora immediatamente che $kf(\boldsymbol{v}) = f(k\boldsymbol{v})$. ■

Notiamo che nel teorema precedente non abbiamo fatto alcuna richiesta sui vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_n$ di W: né che siano linearmente indipendenti né che generino W.

I risultati fin qui dati ci permettono di dare la:

Definizione 26.12 Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissate una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ e una base di W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$, possiamo esprimere ciascun vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m. \end{aligned}$$

La matrice di $\mathrm{M}(m,n,\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

viene detta matrice **associata** all'omomorfismo (o matrice **rappresentativa** di) f rispetto alle basi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ e $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. △

Esempio 26.13 Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito nell'esempio 26.3. Ricordiamo che

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z).$$

Si verifica facilmente che i vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (1,1,0)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (1,1,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$ e che i vettori $\boldsymbol{f}_1 := (1,1)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (2,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^2$. Vogliamo determinare la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi. Dobbiamo allora calcolare le immagini dei vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= f(1,0,0) = (1,0), \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= f(1,1,0) = (2,1), \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= f(1,1,1) = (2,2). \end{aligned}$$

Decomponiamo ora queste immagini rispetto alla base dai vettori $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= (1,0) = -(1,1) + (2,1) = -1\boldsymbol{f}_1 + 1\boldsymbol{f}_2, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= (2,1) = 0(1,1) + (2,1) = 0\boldsymbol{f}_1 + 1\boldsymbol{f}_2, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= (2,2) = 2(1,1) + 0(2,1) = 2\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2. \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate è allora:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prendiamo ora due basi differenti per $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Ad esempio consideriamo la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1 := (0,1,1)$, $\boldsymbol{e}'_2 := (1,0,1)$ e $\boldsymbol{e}'_3 := (1,1,0)$ e la base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}'_1 := (0,2)$, $\boldsymbol{f}'_2 := (1,1)$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}'_1) &= f(0,1,1) = (1,2) = \frac{1}{2}(0,2) + (1,1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}'_1 + 1\boldsymbol{f}'_2, \\ f(\boldsymbol{e}'_2) &= f(1,0,1) = (1,1) = 0(0,2) + (1,1) = 0\boldsymbol{f}'_1 + 1\boldsymbol{f}'_2, \\ f(\boldsymbol{e}'_3) &= f(1,1,0) = (2,1) = -\frac{1}{2}(0,2) + 2(1,1) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{f}'_1 + 2\boldsymbol{f}'_2. \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto a queste basi è allora:

$$A' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

Vediamo dunque che lo stesso omomorfismo si può rappresentare in genere con matrici differenti: non ha dunque senso parlare di matrice di un omomorfismo se non specifichiamo rispetto a quali basi.

Esercizio di base 26.14 Determinare la matrice rappresentativa dell'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x,y) := (x+y, x-y, 0)$ rispetto alle seguenti basi:

a. Rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai due vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1,0)$ e $\boldsymbol{e}_2 := (1,1)$ e alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai tre vettori $\boldsymbol{f}_1 := (1,0,0)$, $\boldsymbol{f}_2 := (1,1,0)$ e $\boldsymbol{f}_3 := (1,1,1)$.

b. Rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai due vettori $\boldsymbol{e}'_1 := (1,1)$ e $\boldsymbol{e}'_2 := (2,3)$ e alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai tre vettori $\boldsymbol{f}'_1 := (1,1,1)$, $\boldsymbol{f}'_2 := (0,1,1)$ e $\boldsymbol{f}'_3 := (0,0,1)$. △

Esempio 26.15 Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ data nell'esempio 26.4. Ricordiamo che

$$f(A) := A + {}^tA.$$

Per rappresentare f con una matrice dobbiamo fissare una base per $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ (pensato come "spazio di partenza") e una base per $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ (pensato come "spazio di arrivo"). Non è necessario usare in entrambi i casi la stessa base. In questo esempio prendiamo in entrambi i casi la base canonica cioè quella formata dalle matrici:

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22} \\
f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22} \\
f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 2E_{22}
\end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\triangle$

Esempio 26.16 Abbiamo visto nell'esempio 26.2 che l'applicazione $f\colon V \to W$ che associa a ogni vettore di V il vettore nullo di W è un omomorfismo di spazi vettoriali detto omomorfismo nullo. Se V e W hanno entrambi dimensione finita, possiamo fissare una base per V, una base per W e determinare la matrice rappresentativa dell'omomorfismo nullo rispetto a tali basi. Si vede facilmente che questa matrice è la matrice nulla qualsiasi siano le basi scelte. $\triangle$

Nel caso in cui abbiamo un omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche si può determinare in maniera particolarmente semplice. Vediamo il seguente:

Esempio 26.17 Consideriamo ancora l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$f(x,y,z) := (x+y, y+z).$$

Per rappresentare f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ dobbiamo determinare le immagini dei vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (0,1,0)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (0,0,1)$

ed esprimerle come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{f}_1 := (1,0)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (0,1)$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = \boldsymbol{f}_1 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= f(0,1,0) = (1,1) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= f(0,0,1) = (0,1) = \boldsymbol{f}_2. \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è allora:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo allora che le colonne di A danno esattamente $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ e $f(\boldsymbol{e}_3)$. Osserviamo inoltre che le righe della matrice A corrispondono ai coefficienti di x, y e z nelle espressioni $x+y$ e $y+z$. Questo tipo di rappresentazione vale **unicamente** quando rappresentiamo f rispetto alle basi canoniche. Infatti determiniamo la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}'_1 := (1,1)$ e $\boldsymbol{f}'_2 := (2,-1)$. Decomponiamo allora le immagini dei vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ rispetto ai vettori $\boldsymbol{f}'_1$ e $\boldsymbol{f}'_2$. Otteniamo così:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= (1,0) = \frac{1}{3}(1,1) + \frac{1}{3}(2,-1) \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= (1,1) = 1(1,1) + 0(2,-1) \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= (0,1) = \frac{2}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(2,-1). \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto a queste basi è allora:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

△

La matrice rappresentativa A di un omomorfismo $f\colon V \to W$ rispetto a delle basi per V e W contiene tutte le informazioni su f: infatti se conosciamo A possiamo immediatamente ricavare le immagini tramite f dei vettori della base fissata per V (basta guardare le colonne di A). Ma allora possiamo anche ottenere l'immagine di un qualsiasi vettore $\boldsymbol{v}$ di V (grazie alla proposizione 26.8). In particolare notiamo che se $f\colon V \to W$ e $g\colon V \to W$ sono due omomorfismi diversi, le loro matrici rappresentative, rispetto alle medesime basi, sono differenti. Dunque a partire dalla matrice A possiamo ricavare f. Vediamo di precisare meglio tutto ciò:

Teorema 26.18 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Siano fissate una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alla basi fissate. Dato un vettore $\boldsymbol{v}$ di V possiamo determinare $f(\boldsymbol{v})$ nel modo seguente:*

1. per prima cosa esprimiamo $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n.$$

2. Calcoliamo poi il prodotto matriciale:

$$A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Come risultato otteniamo una matrice colonna

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

3. Per ottenere $f(\boldsymbol{v})$ basta ora calcolare la combinazione lineare:

$$f(\boldsymbol{v}) = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{f}_m.$$

Per brevità non diamo la dimostrazione di questo teorema che è comunque molto facile.

Esempio 26.19 Consideriamo ancora l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$f(x, y, z) := (x + y, y + z).$$

Nell'esempio 26.13 abbiamo visto che la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (1, 1, 0)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (1, 1, 1)$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1 := (1, 1)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (2, 1)$ è:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo il vettore $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, per determinare $f(\boldsymbol{v})$ calcoliamo innanzitutto il prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque abbiamo $f(\boldsymbol{v}) = -4\boldsymbol{f}_1 + 5\boldsymbol{f}_2$. Questo può essere verificato anche direttamente. Infatti:

$$\boldsymbol{v} = 2(1, 0, 0) + 3(1, 1, 0) - (1, 1, 1) = (4, 2, -1).$$

Per definizione di f abbiamo che:

$$f(\boldsymbol{v}) = f(4, 2, -1) = (6, 1).$$

D'altra parte:

$$-4\boldsymbol{f}_1 + 5\boldsymbol{f}_2 = -4(1, 1) + 5(2, 1) = (6, 1).$$

△

26.3 Omomorfismo associato a una matrice

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la conoscenza della matrice rappresentativa A di un omomorfismo $f\colon V \to W$ rispetto a delle basi per V e W ci permette di ricavare f. Viene allora spontaneo chiedersi se, data una qualsiasi matrice A (delle dimensioni giuste), esista effettivamente un omomorfismo $f\colon V \to W$ che si rappresenta, rispetto alle basi scelte di V e W, proprio con la matrice A. La risposta è positiva, grazie al

Teorema 26.20 *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. Se A è una matrice di $\mathrm{M}(m, n, \mathbb{R})$, allora esiste un unico omomorfismo $f\colon V \to W$, la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi fissate è A.*

Dimostrazione Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Questa è associata, rispetto alle basi scelte, a un omomorfismo, se esiste un omomorfismo f che soddisfa le relazioni:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m. \end{aligned}$$

Ma allora possiamo utilizzare queste relazioni per definire l'omomorfismo f: grazie al teorema 26.11, comunque assegniamo le immagini dei vettori di una base di V, otteniamo un omomorfismo f che soddisfa le condizioni date. ■

Questo teorema permette di dare la:

Definizione 26.21 Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. Se

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è una matrice di $\mathrm{M}(m, n, \mathbb{R})$ chiamiamo omomorfismo **associato** alla matrice A rispetto alle basi fissate l'omomorfismo f definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m, \end{aligned}$$

vale a dire l'omomorfismo f la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi assegnate è esattamente A. △

Esercizio di base 26.22 Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo associato alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

△

rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 := (1,1,0)$ e $\boldsymbol{e}_3 := (1,0,0)$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1 := (1,1)$ e $\boldsymbol{f}_2 := (1,-1)$. Determinare $f(x,y,z)$ per ogni (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$.

Vogliamo ora stabilire se c'è un modo per verificare in maniera veloce che una certa applicazione è lineare. Ci limitiamo a considerare applicazioni tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Esempio 26.23 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$f(x,y) := (xy, x-y, 0).$$

Vogliamo stabilire se f è lineare. Invece di verificare se f rispetta la somma e il prodotto possiamo ragionare in questo modo. Calcoliamo le immagini tramite f dei vettori di una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio la base canonica. Otteniamo allora $f(1,0) = (0,1,0)$ e $f(0,1) = (0,-1,0)$. Grazie al teorema 26.11 sappiamo che esiste un'unica applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni $g(1,0) = (0,1,0)$ e $g(0,1) = (0,-1,0)$. Dunque, se f è lineare, allora f coincide con g. Viceversa se $f = g$ allora f è ovviamente lineare. Determiniamo allora esplicitamente $g(x,y)$ per un generico vettore (x,y). Notiamo che la matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede allora facilmente che:

$$g(x,y) = (0, x-y, 0).$$

Dunque le espressioni che definiscono le applicazioni f e g sono diverse: per mostrare che f e g sono applicazioni diverse dobbiamo però mostrare esplicitamente un vettore su cui le due funzioni assumono valori diversi. Si ha allora $f(1,1) = (1,0,0)$ e $g(1,1) = (0,0,0)$. dunque $f \neq g$ e, pertanto, f non è lineare. △

Esempio 26.24 Consideriamo ora l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x,y) := (x+y, x-1, 2x-y).$$

Calcoliamo $f(1,0) = (1,0,2)$ e $f(0,1) = (1,-1,-1)$. Consideriamo l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle condizioni $g(1,0) = (1,0,2)$ e $g(0,1) = (1,-1,-1)$. La matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque
$$g(x,y) = (x+y, -y, 2x-y).$$
Osserviamo che, ad esempio, $f(2,0) = (2,1,4)$ e $g(2,0) = (2,0,4)$. Come nell'esempio precedente possiamo concludere che f non è lineare. $\triangle$

Esempio 26.25 Consideriamo ora l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da:
$$f(x,y) := (0, -x, 2x-y).$$
Calcoliamo $f(1,0) = (0,-1,2)$ e $f(0,1) = (0,0,-1)$. Consideriamo l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle condizioni $g(1,0) = (0,-1,2)$ e $g(0,1) = (0,0,-1)$. La matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è:
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dunque
$$g(x,y) = (0, -x, 2x-y).$$
Ma allora $f = g$: pertanto f è lineare. $\triangle$

L'esempio precedente ha in realtà validità generale: l'unica cosa che abbiamo sfruttato è stato il fatto che ciascuna delle espressioni 0, $-x$ e $2x-y$ è un polinomio omogeneo di primo grado in x e y oppure il polinomio nullo (ricordiamo che un polinomio omogeneo di primo grado è un polinomio in cui tutti gli addendi sono monomi di grado 1: ad esempio $2x-y+1$ è un polinomio di primo grado non omogeneo perché tra i suoi addendi c'è 1, mentre xy è un polinomio omogeneo di secondo grado).

26.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.26.6 Per verificare se f rispetta il prodotto consideriamo un vettore $\boldsymbol{u} := (x,y)$ di $\mathbb{R}^2$ e uno scalare k di $\mathbb{R}$. Si ha:
$$f(k\boldsymbol{u}) = f(k(x,y)) = f(kx,ky) = ((kx)^2, kx+ky) = (k^2x^2, kx+ky)$$
e
$$kf(\boldsymbol{u}) = kf(x,y) = k(x^2, x+y) = (kx^2, kx+ky).$$
Se prendiamo, ad esempio, $k=2$ e $\boldsymbol{u} := (1,0)$, vediamo che $f(k\boldsymbol{u}) \neq kf(\boldsymbol{u})$. Dunque, l'applicazione f non rispetta il prodotto.

EB.26.7

a. Verifichiamo se f rispetta la somma. Siano $\boldsymbol{u} := (x_1,y_1)$ e $\boldsymbol{v} := (x_2,y_2)$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Si ha:
$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \\ &= f(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2, 0), \\ f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v}) &= f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) \\ &= (x_1+y_1, x_1-y_1, 0) + (x_2+y_2, x_2-y_2, 0) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1-y_1+x_2-y_2, 0). \end{aligned}$$

Dunque f rispetta la somma. Per verificare se f rispetta il prodotto consideriamo un vettore $\boldsymbol{u} \coloneqq (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ e uno scalare k di $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{u}) &= f(k(x, y)) \\ &= f(kx, ky) \\ &= (kx + ky, kx - ky, 0), \\ kf(\boldsymbol{u}) &= kf(x, y) \\ &= k(x + y, x - y, 0) \\ &= (kx + ky, kx - ky, 0). \end{aligned}$$

L'applicazione f rispetta anche il prodotto e, dunque, f è un omomorfismo di spazi vettoriali.

b. Verifichiamo se f rispetta la somma. Siano

$$g(x) \coloneqq a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$h(x) \coloneqq b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

due vettori di $\mathbb{R}[x]$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(g(x) + h(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots) \\ &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(g(x)) + f(h(x)) &= (a_0, a_1) + (b_0, b_1) \\ &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1). \end{aligned}$$

Dunque f rispetta la somma. Per verificare se f rispetta il prodotto consideriamo un vettore

$$g(x) \coloneqq a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

di $\mathbb{R}[x]$ e uno scalare k di $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(kg(x)) &= f(ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots + ka_nx^n) \\ &= (ka_0, ka_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} kf(g(x)) &= kf(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= k(a_0, a_1) = (ka_0, ka_1). \end{aligned}$$

L'applicazione f rispetta anche il prodotto e, dunque, f è un omomorfismo di spazi vettoriali.

c. L'applicazione f non rispetta il prodotto. Se ad esempio prendiamo il vettore $\boldsymbol{u} \coloneqq (1, 1, 1)$ e lo scalare 2 si ha:

$$2f(1, 1, 1) = 2(1, 0) = (2, 0)$$

e

$$f(2(1, 1, 1)) = f(2, 2, 2) = (8, 0).$$

Dunque f non è un omomorfismo.

d. L'applicazione f non rispetta la somma. Se ad esempio consideriamo i vettori $\boldsymbol{u} := (0,0,0)$ e $\boldsymbol{v} := (0,0,0)$ si ha:

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(0,0,0) = (0,-1,0,0)$$

e

$$f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = (0,-1,0,0) + (0,-1,0,0) = (0,-2,0,0).$$

Dunque f non è un omomorfismo.

e. Per verificare se f rispetta la somma consideriamo due matrici generiche A e B di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Si ha:

$$f(A+B) = A+B-I$$

e

$$f(A)+f(B) = A-I+B-I.$$

Poiché $A+B-I \neq A-I+B-I$ l'applicazione f non è un omomorfismo.

EB.26.14

a. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= f(1,0) = (1,1,0) = \boldsymbol{f}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= f(1,1) = (2,0,0) = 2\boldsymbol{f}_1. \end{aligned}$$

Dunque l'omomorfismo f si rappresenta rispetto alle basi assegnate con la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}'_1) &= f(1,1) = (2,0,0) = 2\boldsymbol{f}'_1 - 2\boldsymbol{f}'_2 \\ f(\boldsymbol{e}'_2) &= f(2,3) = (5,-1,0) = 5\boldsymbol{f}'_1 - 6\boldsymbol{f}'_2 + \boldsymbol{f}'_3. \end{aligned}$$

Dunque l'omomorfismo f si rappresenta rispetto alle basi assegnate con la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EB.26.22 Dobbiamo innanzitutto determinare le componenti del vettore (x,y,z) rispetto alla base assegnate di $\mathbb{R}^3$. Si vede facilmente che si ha

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0).$$

Per ottenere le componenti di $f(x,y,z)$ rispetto alla base assegnata di $\mathbb{R}^2$ basta allora calcolare il prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+x-y \\ y \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$f(x,y,z) = (z+x-y)(1,1) + y(1,-1) = (z+x, z+x-2y).$$

26.5 Sunto

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione tra due spazi vettoriali V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$.

2. $f(k\boldsymbol{u}) = kf(\boldsymbol{u})$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$. $\triangle$

Matrice associata a un omomorfismo

Proposizione *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Siano dati i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n$ di V e gli scalari k_1, k_2, …, k_n. Si ha:*

$$f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n).$$

Proposizione *Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon V \to W$ due omomorfismi di spazi vettoriali. Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n$ generano V e $f(\boldsymbol{v}_j) = g(\boldsymbol{v}_j)$ per $1 \leq j \leq n$ allora $f = g$.*

Se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n$ sono dei generatori di V, un omomorfismo $f\colon V \to W$ è allora completamente descritto se elenchiamo $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, …, $f(\boldsymbol{v}_n)$. Nel caso in cui i generatori considerati siano però una base abbiamo il:

Teorema *Siano V e W due spazi vettoriali. Sia data una base dello spazio V costituita dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, …, $\boldsymbol{w}_n$ di W. Allora esiste un unico omomorfismo $f\colon V \to W$ tale che:*

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j \text{ per } 1 \leq j \leq n.$$

Notiamo che nel teorema precedente non abbiamo fatto alcuna richiesta sui vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, …, $\boldsymbol{w}_n$ di W: né che siano linearmente indipendenti né che generino W.

Il teorema precedente ci permette di dare la:

Definizione Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissate una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ e una base di W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_m$, possiamo esprimere ciascun vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_m$:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m,\\
f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m,\\
&\vdots\\
f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m.
\end{aligned}$$

La matrice di $\mathrm{M}(m, n, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

viene detta matrice **associata** all'omomorfismo (o matrice **rappresentativa** di) f rispetto alle basi $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ e $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$. La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$. △

Lo stesso omomorfismo si può rappresentare, rispetto a basi differenti, con matrici differenti: non ha dunque senso parlare di matrice di un omomorfismo se non specifichiamo rispetto a quali basi.

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Siano fissate una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alla basi fissate. Dato un vettore $\boldsymbol{v}$ di V possiamo determinare $f(\boldsymbol{v})$ nel modo seguente:*

1. per prima cosa esprimiamo $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_n\boldsymbol{e}_n.$$

2. Calcoliamo poi il prodotto matriciale:

$$A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Come risultato otteniamo una matrice colonna

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

3. Per ottenere $f(\boldsymbol{v})$ basta ora calcolare la combinazione lineare:

$$f(\boldsymbol{v}) = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + \dots + c_m\boldsymbol{f}_m.$$

Omomorfismo associato a una matrice

Teorema *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$. Se A è una matrice di* $\mathrm{M}(m, n, \mathbb{R})$*, allora esiste un unico omomorfismo $f\colon V \to W$, la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi fissate è A.*

Questo teorema permette di dare la:

Definizione Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ e una base per W formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_m$. Se

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è una matrice di $\mathrm{M}(m, n, \mathbb{R})$ chiamiamo omomorfismo **associato** alla matrice A rispetto alle basi fissate l'omomorfismo f definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \dots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m, \end{aligned}$$

vale a dire l'omomorfismo f la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi assegnate è esattamente A. $\triangle$

26.6 Esercizi

E.26.1 Stabilire se l'applicazione $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x, y, z, w) := (2x + y + 3z - 2w, y - w)$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.2 Stabilire se l'applicazione $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x, y, z) := \left(2x + \sqrt{2}z, 0, y + \left(2\sqrt{2} + 1\right) z, x\right)$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.3 Stabilire se l'applicazione $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x, y, z) := (2x + y + 3z - 1, y + z)$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

E.26.4 Stabilire se l'applicazione $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}(3, 2, \mathbb{R})$ definita da:

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x - y & z \\ 0 & x + y \\ 0 & x - y + z \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.5 Stabilire se l'applicazione $D \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ che associa a ogni polinomio la sua derivata è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.6 Stabilire se l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x, y, z) \coloneqq (2x^2 + y + 3z, y + z)$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.7 Stabilire se l'applicazione $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ definita da:

$$f(A) \coloneqq A^t A$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali.

E.26.8 Stabilire se le seguenti applicazioni sono omomorfismi di spazi vettoriali:

a. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(x, y, z) \coloneqq (2x + y, x - y + z, z, 0)$;

b. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) \coloneqq (2x + y, x - 1, x)$;

c. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y, z, w) \coloneqq (2xy + z + w, x + y - w)$;

d. $V\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definita da $V(p(x)) \coloneqq p(2)$;

e. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita da $f(p(x)) \coloneqq xp(x)$;

f. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita da $f(p(x)) \coloneqq x + p(x)$.

E.26.9 Stabilire se esistono omomorfismi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ di spazi vettoriali tali che:

$$\begin{aligned} f(1, 2, 1) &= (0, 1) \\ f(1, 0, 2) &= (0, 1) \\ f(2, 2, 1) &= (2, 1) \end{aligned}$$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi o più di uno.

E.26.10 Stabilire se esistono omomorfismi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ di spazi vettoriali tali che:

$$\begin{aligned} f(1, 3, 0) &= x \\ f\left(0, \frac{1}{2}, 2\right) &= x^2 \\ f(1, 3, 1) &= x + x^2 \end{aligned}$$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi o più di uno.

E.26.11 Stabilire se esistono omomorfismi $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ di spazi vettoriali tale che:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi o più di uno.

E.26.12 Stabilire se esistono omomorfismi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ di spazi vettoriali tali che:

$$\begin{aligned} f(1,3,0) &= x \\ f(0,1,1) &= x^2 \\ f(1,5,2) &= x + x^2 \end{aligned}$$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi o più di uno.

E.26.13 Stabilire se esistono omomorfismi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ di spazi vettoriali tali che:

$$\begin{aligned} f(1,3,0) &= x \\ f(0,1,1) &= x^2 \\ f(1,5,2) &= x + 2x^2 \end{aligned}$$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi o più di uno.

E.26.14 Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito dalle condizioni $f(1,0,1) \coloneqq (3,1)$, $f(1,1,1) \coloneqq (1,2)$, $f(0,0,1) \coloneqq (0,1)$. Determinare:

a. la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$;

b. la matrice rappresentativa di f rispetto alle base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 \coloneqq (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 \coloneqq (1,1,1)$ e $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq (0,0,1)$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1 \coloneqq (1,1)$ e $\boldsymbol{w}_2 \coloneqq (1,2)$.

E.26.15 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un omomorfismo che soddisfa le condizioni $f(2,-1) = (0,4)$ e $f(2,3) = (0,-2)$. Allora:

- ☐ $f(2,1) = (0,0)$;
- ☐ $f(2,1) = (0,1)$;
- ☐ $f(2,1) = (1,1)$;
- ☐ $f(2,1) = (0,6)$;
- ☐ $f(2,1)$ non è determinato univocamente dalle condizioni.
- ☐ non esiste nessun omomorfismo che soddisfa le condizioni.

E.26.16 Stabilire per quali dei seguenti blocchi di condizioni esiste un omomorfismo che le verifica e, in caso affermativo, dire se questo omomorfismo è unico.

a. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ tale che

$$\begin{aligned} f(1,1,2) &= 1 + x^2, \\ f(1,0,1) &= 1 + x^2, \\ f(1,0,2) &= 0; \end{aligned}$$

b. $f\colon \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ tale che

$$\begin{aligned} f(1+x) &= 1 - 2x, \\ f(2+x) &= 3 + x, \\ f(1+2x) &= -5x; \end{aligned}$$

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned} f(0,1,1) &= (1,0),\\ f(1,0,1) &= (2,1),\\ f(2,1,3) &= (5,2); \end{aligned}$$

d. $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned} f(1+x^2) &= (1,-2),\\ f(2+x+x^2) &= (1,0); \end{aligned}$$

e. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ tale che

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= 2x,\\ f(2,1,1) &= 1-3x^2,\\ f(0,0,2) &= 0. \end{aligned}$$

E.26.17 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(x,y,z) \coloneqq (2x+y+z, x-y),$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 \coloneqq (1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2 \coloneqq (1,0,1)$, $\boldsymbol{e}_3 \coloneqq (1,3,0)$, e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1 \coloneqq (1,2)$, $\boldsymbol{f}_2 \coloneqq (1,0)$.

E.26.18 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(x,y,z) \coloneqq (2x+y+z, x-y),$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 \coloneqq (1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2 \coloneqq (1,0,1)$, $\boldsymbol{e}_3 \coloneqq (1,3,0)$, e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

E.26.19 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(x,y,z) \coloneqq (2x+y+z, x-y),$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1 \coloneqq (1,2)$, $\boldsymbol{f}_2 \coloneqq (1,0)$.

E.26.20 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(x,y,z) \coloneqq (2x+y+z, x-y),$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla basi canoniche.

E.26.21 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2) \coloneqq (a_0+a_1+a_2, 2a_0-3a_2)$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla basi canoniche.

E.26.22 Dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) := (a_0 + a_1 + a_2, 2a_0 - 3a_2)$$

determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata dai polinomi $p_1(x) := 1$, $p_2(x) := 1 + x$, $p_3(x) := 1 + x + x^2$ e alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 2)$, $\boldsymbol{v}_2 := (0, 1)$.

E.26.23 Per ciascuna delle applicazioni lineari seguenti determinare la matrice rappresentativa rispetto alle basi indicate.

a. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z, w) := (x - y + z, x + w, y - z + w)$ rispetto alle basi canoniche;

b. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) := (x - y, x + y, 2x)$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (3, 1)$ e alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1 := (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{w}_2 := (1, 1, 2)$ e $\boldsymbol{w}_3 := (1, 3, 1)$;

c. $D\colon \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$ definita da $D(p(x)) = p'(x)$ rispetto alla base formata dai polinomi 1, x, x^2, x^3 (base di $\mathbb{R}^4[x]$ pensato sia come spazio di partenza che come spazio di arrivo);

d. $D\colon \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$ uguale a quella del punto precedente ma rispetto alla base formata dai polinomi 1, x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{6}$ (base di $\mathbb{R}^4[x]$ pensato sia come spazio di partenza che come spazio di arrivo).

E.26.24 Determinare l'immagine del vettore (x, y, z, w) tramite l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 2, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 := (1, 0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 := (1, 3, 0, 0), \boldsymbol{e}_4 := (0, 0, 0, 1)$$

e alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$\boldsymbol{f}_1 := (1, 2, 1), \boldsymbol{f}_2 := (1, 0, 2), \boldsymbol{f}_3 := (2, 2, 1).$$

26.7 Soluzioni degli esercizi

E.26.1 Sì, infatti ciascuna delle espressioni $2x + y + 3z - 2w$ e $y - w$ è un polinomio omogeneo di primo grado in x, y, z, w.

E.26.2 Sì, infatti ciascuna delle espressioni

$$2x + \sqrt{2}z, 0, y + \left(2\sqrt{2} + 1\right) z, x$$

è un polinomio omogeneo di primo grado in x, y, z oppure il polinomio nullo.

E.26.3 No, ad esempio,

$$f(0,0,0) + f(0,0,0) = (-1,0) + (-1,0) = (-2,0)$$

e

$$f((0,0,0) + (0,0,0)) = f(0,0,0) = (-1,0).$$

E.26.4 Sì, infatti ciascuna delle espressioni $x-y$, z, 0, $x+y$ e $x-y+z$ è un polinomio omogeneo di primo grado in x, y, z oppure il polinomio nullo.

E.26.5 Sì, infatti $D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$ per tutti i polinomi $f(x)$ e $g(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ e $D(kf(x)) = kD(f(x))$ per ogni k in $\mathbb{R}$ e per ogni $f(x)$ in $\mathbb{R}[x]$.

E.26.6 No, ad esempio

$$f(1,0,0) + f(1,0,0) = (2,0) + (2,0) = (4,0)$$

e

$$f((1,0,0) + (1,0,0)) = f(2,0,0) = (8,0).$$

E.26.7 No. Infatti

$$f(kA) = (kA)^t(kA) = k^2 A^t A$$

e

$$kf(A) = kA^tA.$$

Se scegliamo A tale che $A^tA \neq 0$ (ad esempio $A = I$) e k tale $k^2 \neq k$ (ad esempio $k = 2$), vediamo che $f(kA) \neq kf(A)$.

E.26.8

a. L'applicazione f è lineare: infatti ciascuna delle espressioni $2x+y$, $x-y+z$, z, 0 è un polinomio omogeneo di primo grado in x, y, z oppure 0.

b. L'applicazione f non è lineare. Ad esempio si ha:

$$f(0,0) + f(1,0) = (0,-1,0) + (2,0,1) = (2,-1,1),$$

e

$$f((0,0) + (1,0)) = f(1,0) = (2,0,1).$$

c. Se (x_1, y_1, z_1, w_1) e (x_2, y_2, z_2, w_2) sono elementi di $\mathbb{R}^4$ si ha:

$$\begin{aligned}
&f((x_1,y_1,z_1,w_1) + (x_2,y_2,z_2,w_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2)\\
&= (2(x_1+x_2)(y_1+y_2) + (z_1+z_2) + (w_1+w_2), (x_1+x_2) + (y_1+y_2) - (w_1+w_2))\\
&= (2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + z_1 + z_2 + w_1 + w_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - w_1 - w_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&f(x_1,y_1,z_1,w_1) + f(x_2,y_2,z_2,w_2)\\
&= (2x_1y_1 + z_1 + w_1, x_1 + y_1 - w_1) + (2x_2y_2 + z_2 + w_2, x_2 + y_2 - w_2)\\
&= (2x_1y_1 + 2x_2y_2 + z_1 + z_2 + w_1 + w_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - w_1 - w_2).
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$f((x_1,y_1,z_1,w_1) + (x_2,y_2,z_2,w_2)) = f(x_1,y_1,z_1,w_1) + f(x_2,y_2,z_2,w_2)$$

se e solo se $2x_1y_2 + 2x_2y_1 = 0$. Poiché ciò non è sempre vero (ad esempio scegliamo $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 1$) abbiamo che f non è lineare.

d. Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi e se k è un numero reale si ha

$$V(p(x)+q(x)) = p(2)+q(2) = V(p(x))+V(q(x))$$

e

$$V(kp(x)) = kp(2) = kV(p(x))$$

cioè V è lineare.

e. Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi e se k è un numero reale si ha

$$f(p(x)+q(x)) = x(p(x)+q(x)) = xp(x)+xq(x) = f(p(x))+f(q(x))$$

e

$$f(kp(x)) = xkp(x) = kf(p(x))$$

cioè f è lineare.

f. Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi si ha

$$f(p(x)+q(x)) = x+p(x)+q(x)$$

e

$$f(p(x))+f(q(x)) = x+p(x)+x+q(x) = 2x+p(x)+q(x)$$

cioè f non è lineare.

E.26.9 Dal momento che i tre vettori $(1,2,1)$, $(1,0,2)$ e $(2,2,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$ (infatti $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$) grazie al teorema 26.11 esiste uno e un solo omomorfismo f che soddisfa le condizioni date.

E.26.10 Dal momento che i tre vettori $(1,3,0)$, $\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ e $(1,3,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$ (infatti $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$) grazie al teorema 26.11 esiste uno e un solo omomorfismo f che soddisfa le condizioni date.

E.26.11 Le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non formano una base per $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ (infatti $\dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) = 4$). Le matrici A_1, A_2, A_3 sono però linearmente indipendenti. Possiamo allora scegliere una matrice A_4 tale che A_1, A_2, A_3 e A_4 formino una base per $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Se allora B_4 è una qualsiasi matrice di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$, grazie al teorema 26.11 esiste uno e un solo omomorfismo f che soddisfa le condizioni date e la condizione supplementare $f(A_4) = B_4$. Dunque esistono omomorfismi che soddisfano le condizioni assegnate: per l'arbitrarietà della scelta di B_4 di tali omomorfismi ne esiste più di uno.

E.26.12 I vettori $(1,3,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,5,2)$ non formano una base per $\mathbb{R}^3$ (infatti $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$). Si vede facilmente che

$$(1,5,2) = (1,3,0)+2(0,1,1).$$

Se esistesse un omomorfismo come quello cercato dovrebbe essere allora

$$f(1,5,2) = f(1,3,0)+2f(0,1,1).$$

Le condizioni su f dicono che:

$$f(1,5,2) = x+x^2$$

e

$$f(1,3,0)+2f(0,1,1) = x+2x^2.$$

Dunque non esistono omomorfismi che soddisfano le condizioni assegnate.

E.26.13 Ripetendo i calcoli fatti nell'esercizio precedente vediamo che questa volta le condizioni imposte sono compatibili con la condizione

$$f(1,5,2) = f(1,3,0) + 2f(0,1,1).$$

Infatti

$$f(1,5,2) = x + 2x^2$$

e

$$f(1,3,0) + 2f(0,1,1) = x + 2x^2.$$

Se allora esiste un omomorfismo f tale che $f(1,3,0) = x$ e $f(0,1,1) = x^2$, certamente questo omomorfismo soddisferà anche la condizione $f(1,5,2) = x + 2x^2$. Ora i vettori $(1,3,0)$ e $(0,1,1)$ sono linearmente indipendenti. Se scelgo un vettore $\boldsymbol{e}$ che insieme ad essi costituisce una base per $\mathbb{R}^3$, e se scegliamo un qualsiasi polinomio $g(x)$ in $\mathbb{R}[x]$, allora, grazie al teorema 26.11, esiste uno e un solo omomorfismo f che soddisfa le condizioni date e la condizione supplementare $f(\boldsymbol{e}) = g(x)$. Dunque esistono omomorfismi che soddisfano le condizioni assegnate: per l'arbitrarietà della scelta di $g(x)$ di tali omomorfismi ne esiste più di uno.

E.26.14

a. Esprimiamo i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$. Si ha

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= (1,0,1) - (0,0,1),\\
(0,1,0) &= -(1,0,1) + (1,1,1),\\
(0,0,1) &= (0,0,1).
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= f(1,0,1) - f(0,0,1) = (3,1) - (0,1) = (3,0),\\
f(0,1,0) &= -f(1,0,1) + f(1,1,1) = -(3,1) + (1,2) = (-2,1),\\
f(0,0,1) &= f(0,0,1) = (0,1).
\end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Conosciamo $f(1,0,1)$, $f(1,1,1)$ e $f(0,0,1)$: dobbiamo ora decomporre questi vettori rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1 := (1,1)$ e $\boldsymbol{w}_2 := (1,2)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
f(1,0,1) &= (3,1) = 5(1,1) - 2(1,2),\\
f(1,1,1) &= (1,2) = 0(1,1) + 1(1,2),\\
f(0,0,1) &= (0,1) = -(1,1) + 1(1,2).
\end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alle basi date è:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

26.6 Dal momento che $(2,-1)$ e $(2,3)$ sono linearmente indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$. Dunque le condizioni assegnate definiscono univocamente un omomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in sé. Per determinare $f(2,1)$ occorre esprimere il vettore $(2,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(2,-1)$ e $(2,3)$. Con semplici calcoli si trova:

$$(2,1) = \frac{1}{2}(2,-1) + \frac{1}{2}(2,3).$$

Dunque

$$f(2,1) = \frac{1}{2}f(2,-1) + \frac{1}{2}f(2,3) = \frac{1}{2}(0,4) + \frac{1}{2}(0,-2) = (0,1).$$

E.26.16

a)

1. I vettori $(1,1,2)$, $(1,0,1)$, $(1,0,2)$ formano, come è facile verificare, una base per $\mathbb{R}^3$: dunque esiste un unico omomorfismo che soddisfa le condizioni date.

2. I polinomi $1+x$, $2+x$, $1+2x$ non formano, chiaramente una base per $\mathbb{R}^2[x]$: poiché i primi due vettori $1+x$ e $2+x$, formano una base per $\mathbb{R}^2[x]$ esiste un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ tale che $f(1+x) = 1-2x$, $f(2+x) = 3+x$. Verifichiamo se per questo omomorfismo f risulta $f(1+2x) = -5x$. Notiamo che $1+2x = 3(1+x)-(2+x)$ e, dunque, si ha $f(1+2x) = 3f(1+x) - f(2+x) = -7x$. Dunque non esistono omomorfismi che soddisfano le condizioni date.

3. I tre vettori $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,1,3)$ sono linearmente dipendenti: infatti sussiste la relazione $(2,1,3) = (0,1,1)+2(1,0,1)$. Se f è un omomorfismo come quello cercato deve valere l'uguaglianza $f(2,1,3) = f(0,1,1)+2f(1,0,1)$, cioè $(5,2) = (1,0)+2(2,1)$. Poiché quest'ultima relazione è verificata si ha che è sufficiente stabilire se esiste un omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1) = (1,0)$, $f(1,0,1) = (2,1)$. Di omomorfismi siffatti ne esistono infiniti: infatti se $\boldsymbol{v}_3$ è un qualsiasi vettore che insieme a $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ forma una base di $\mathbb{R}^3$, per ogni vettore $\boldsymbol{w}_3$ di $\mathbb{R}^2$ esiste un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1) = (1,0)$, $f(1,0,1) = (2,1)$ e $f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{w}_3$. Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{w}_3$ abbiamo allora infiniti omomorfismi come quello cercato.

4. I polinomi $1+x^2$, $2+x+x^2$ sono linearmente indipendenti. Se $p_3(x)$ è un qualsiasi vettore che insieme a $1+x^2$ e $2+x+x^2$ forma una base di $\mathbb{R}^3[x]$, allora per ogni vettore $\boldsymbol{w}_3$ di $\mathbb{R}^2$ esiste un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1+x^2) = (1,-2)$, $f(2+x+x^2) = (1,0)$ e $f(p_3(x)) = \boldsymbol{w}_3$. Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{w}_3$ abbiamo allora infiniti omomorfismi come quello cercato.

5. I vettori $(1,0,1)$, $(2,1,1)$, $(0,0,2)$ formano, come è facile verificare, una base per $\mathbb{R}^3$: dunque esiste un unico omomorfismo che soddisfa le condizioni date.

E.26.17 Si ha

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= (5,-1) = -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{11}{2}(1,0),\\ f(\boldsymbol{e}_2) &= (3,1) = \frac{1}{2}(1,2) + \frac{5}{2}(1,0),\\ f(\boldsymbol{e}_3) &= (5,-2) = -(1,2) + 6(1,0). \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

E.26.18 Come prima si ha

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= (5,-1),\\ f(\boldsymbol{e}_2) &= (3,1),\\ f(\boldsymbol{e}_3) &= (5,-2). \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

E.26.19 Si ha

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2,1) = \frac{1}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(1,0),\\ f(0,1,0) &= (1,-1) = -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(1,0),\\ f(0,0,1) &= (1,0) = 0(1,2) + 1(1,0). \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

E.26.20 Possiamo scrivere direttamente la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(le righe della matrice corrispondono ai coefficienti di x, y e z nelle espressioni $2x+y+z$ e $x-y$).

E.26.21 La matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

E.26.22 Si ha

$$\begin{aligned} f(p_1(x)) &= 1(1,2) = (1,2) + 0(0,1), \\ f(p_2(x)) &= (2,2) = 2(1,2) - 2(0,1), \\ f(p_3(x)) &= (3,-1) = 3(1,2) - 7(0,1). \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

E.26.23

a. La matrice è semplicemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La prima riga è data dai coefficienti di x, y, z e w nel polinomio $x-y+z$. Analogamente si determinano le altre righe.

b. Calcoliamo $f(1,0)$ e $f(3,1)$ e decomponiamo i risultati rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ e $\boldsymbol{w}_3$. Si ha $f(1,0) = (1,1,2)$ e $f(3,1) = (2,4,6)$. Dunque:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 0(1,0,1) + 1(1,1,2) + 0(1,3,1), \\ f(3,1) &= -2(1,0,1) + 4(1,1,2) + 0(1,3,1). \end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alle basi assegnate è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Si ha

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^3) &= 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3. \end{aligned}$$

Dunque la matrice di D rispetto alla base data è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Si ha

$$\begin{aligned}
D(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6},\\
D(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6},\\
D\left(\frac{x^2}{2}\right) &= x = 0 \cdot 1 + 1x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6},\\
D\left(\frac{x^3}{6}\right) &= \frac{x^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0x + 1\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6}.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice di D rispetto alla base data è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.26.24 Esprimiamo innanzitutto il vettore (x, y, z, w) come combinazione lineare dei vettori della base assegnata. Per far ciò scriviamo:

$$(x, y, z, w) = a(1, 2, 0, 0) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 3, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1).$$

Questo ci conduce, con semplici calcoli, al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a + b + c = x\\ 2a + 3c = y\\ b = z\\ d = w \end{cases}$$

Notiamo che in questo sistema noi conosciamo x, y, z e w e dobbiamo determinare a, b, c e d. Si trova allora facilmente che deve essere $a = 3x-y-3z$, $b = z$, $c = -2x+y+2z$, $d = w$. Dunque:

$$(x, y, z, w) = (3x - y - 3z)\boldsymbol{e}_1 + z\boldsymbol{e}_2 + (-2x + y + 2z)\boldsymbol{e}_3 + w\boldsymbol{e}_4.$$

Calcoliamo ora il prodotto matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - y - 3z\\ z\\ -2x + y + 2z\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z\\ 2x - 2z + w\\ 2x - y - z + 2w \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= (3x - y - 2z)\boldsymbol{f}_1 + (2x - 2z + w)\boldsymbol{f}_2 + (2x - y - z + 2w)\boldsymbol{f}_3\\
&= (9x - 3y - 6z + 5w, 10x - 4y - 6z + 4w, 9x - 2y - 7z + 4w).
\end{aligned}$$

CAPITOLO 27

Immagine

In questo capitolo studiamo le immagini di omomorfismi di spazi vettoriali. Mostreremo che sono sottospazi dello spazio di arrivo e daremo un metodo pratico per calcolarne la dimensione per mezzo di una matrice rappresentativa dell'omomorfismo.

27.1 Immagine di un omomorfismo

Ricordiamo che, data un'applicazione tra insiemi $f\colon A \to B$, l'immagine di f è il sottoinsieme $f(A)$ dell'insieme B formato dalle immagini degli elementi di A tramite f, vale a dire da tutti gli elementi b di B per cui esiste a in A tale che $f(a) = b$. Può essere interessante studiare le immagini di omomorfismi di spazi vettoriali.

Esempio 27.1 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y) \coloneqq (x + 2y, x + y, x - y).$$

Per determinare l'immagine di f dobbiamo trovare i vettori $\boldsymbol{w} \coloneqq (a, b, c)$ di $\mathbb{R}^3$ per cui esista $\boldsymbol{v} \coloneqq (x, y)$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Abbiamo cioè:

$$(x + 2y, x + y, x - y) = (a, b, c).$$

Dunque il vettore $\boldsymbol{v}$ cercato esiste se e solo se il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x + y = b \\ x - y = c \end{cases}$$

ammette soluzioni. Se utilizziamo il metodo di Gauss vediamo allora che il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ - y = a - b \\ 0 = 2a - 3b + c \end{cases}$$

Questo sistema è dunque risolubile se e solo se $2a - 3b + c = 0$ (notiamo che non ci interessa determinare esplicitamente le soluzioni del sistema). Dunque:

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(a, b, c) \mid 2a - 3b + c = 0\}.$$

Notiamo che questo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in a, b e c. $\triangle$

Esercizio di base 27.2 Sia $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ l'omomorfismo definito da:

$$f(A) := A + {}^tA. \qquad \triangle$$

Determinare l'immagine di f.

Nell'esempio e nell'esercizio di base appena visti le immagini sono sottospazi vettoriali dello spazio di arrivo. Questo non è un caso. Vale infatti il:

Teorema 27.3 *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali, allora $f(V)$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Dimostrazione Osserviamo preliminarmente che $f(V)$ è non vuoto: infatti preso un qualsiasi vettore $\boldsymbol{v}$ in V, il vettore $\boldsymbol{w} := f(\boldsymbol{v})$ appartiene a $f(V)$.

Dobbiamo ora mostrare che se $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ appartengono a $f(V)$ allora la loro somma $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ appartiene a $f(V)$, vale a dire che esiste un vettore $\boldsymbol{v}$ in V tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$. Sappiamo che esistono $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ in V tali che $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ e $f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$. Ma allora

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2.$$

Dunque $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in f(V)$.

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che se $\boldsymbol{w}$ appartiene a $f(V)$ e k è uno scalare allora $k\boldsymbol{w}$ appartiene a $f(V)$. Sappiamo che esiste $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$: ma allora

$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{w}.$$

Dunque $k\boldsymbol{w}$ è l'immagine tramite f del vettore $k\boldsymbol{v}$: in particolare $k\boldsymbol{w}$ appartiene a $f(V)$. $\blacksquare$

Se abbiamo un'applicazione non lineare $f\colon V \to W$ tra spazi vettoriali cosa possiamo dire dell'immagine di f?

Esempio 27.4 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione così definita:

$$f(x, y) := (x^2, x + y).$$

È facile vedere che l'applicazione f non è lineare. Per calcolare l'immagine di f consideriamo un generico vettore (a, b) di $\mathbb{R}^2$: questo appartiene all'immagine di f se e solo se il sistema

$$\begin{cases} x^2 \phantom{{}+y} = a \\ x + y = b \end{cases}$$

è risolubile. Per stabilirlo non possiamo usare le tecniche che adottiamo usualmente con i sistemi lineari. Notiamo però che se il sistema è risolubile, allora deve per forza essere $a \geq 0$. Viceversa se $a \geq 0$, allora il sistema è risolubile perché ha, per esempio, la soluzione $x = \sqrt{a}$, $y = b - \sqrt{a}$. L'immagine di f è allora formata dai vettori del tipo (a, b) con $a \geq 0$. Questo non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (notiamo ad esempio che moltiplicando il vettore $(1, 0)$ dell'immagine di f per lo scalare -1 otteniamo un vettore che non sta nell'immagine). $\triangle$

Potrebbe allora venire spontaneo dire che se $f\colon V \to W$ è un'applicazione non lineare tra spazi vettoriali allora la sua immagine non è un sottospazio vettoriale dello spazio di arrivo. Consideriamo però il seguente:

Esempio 27.5 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione così definita:

$$f(x, y) \coloneqq (xy, 2xy).$$

È facile vedere che l'applicazione f non è lineare. Per calcolare l'immagine di f consideriamo un generico vettore (a, b) di $\mathbb{R}^2$: questo appartiene all'immagine di f se e solo se il sistema

$$\begin{cases} xy = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

è risolubile. Notiamo che se il sistema è risolubile, allora deve per forza essere $b = 2a$. Viceversa, se $b = 2a$, allora il sistema è risolubile perché ha, per esempio, la soluzione $x = a$, $y = 1$. L'immagine di f è allora formata dai vettori del tipo $(2b, b)$ al variare di b, e, dunque, è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

Dunque, se abbiamo un'applicazione non lineare $f\colon V \to W$ tra spazi vettoriali, non possiamo, a priori, dire nulla sull'immagine di f: né che sia un sottospazio vettoriale di W né che non lo sia. Bisogna valutare caso per caso.

27.2 Calcolo dell'immagine

Diamo ora un metodo per la determinazione dell'immagine di un omomorfismo di spazi vettoriali. Ci sarà utile la:

Proposizione 27.6 *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V è generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, allora $f(V)$ è generato dai vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$.*

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che ogni vettore $\boldsymbol{w}$ dell'immagine di f si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$. Sappiamo che esiste un vettore $\boldsymbol{v}$ di V tale che $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$. Possiamo ora esprimere il vettore $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$

Ma allora

$$f(\boldsymbol{v}) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n).$$

Poiché $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ abbiamo dunque espresso $\boldsymbol{w}$ come combinazione lineare dei vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$, come volevamo. $\blacksquare$

Vale la pena fare alcune osservazioni. Innanzitutto abbiamo mostrato che i vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$ generano $f(V)$, non tutto W (questo si realizza se e solo se $f(V) = W$ ovvero se f è suriettivo). Notiamo poi che, anche nel caso in cui i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ formano una base per V, non è detto che i vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$ formino una base per $f(V)$. Consideriamo infatti il seguente:

Esempio 27.7 Sia dato l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ definito da:

$$f(a, b, c) := (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2.$$

Sappiamo allora che $f(\mathbb{R}^3)$ è generato dalle immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la base canonica. Dunque $f(\mathbb{R}^3)$ è generato dai polinomi $f(1, 0, 0) = 1 - x^2$, $f(0, 1, 0) = -1 + x$, $f(0, 0, 1) = -x + x^2$. Questi tre polinomi sono linearmente dipendenti:

$$-x + x^2 = -(1 - x^2) - (-1 + x),$$

e, dunque, non formano una base per $f(\mathbb{R}^3)$. △

La proposizione 27.6 ha il:

Corollario 27.8 *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se la dimensione di V è finita, allora anche la dimensione di $f(V)$ è finita e $\dim f(V) \leq \dim V$. Nulla possiamo invece dire circa la dimensione di W.*

Dimostrazione Se i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ formano una base per V (e, dunque, $\dim V = n$), allora $f(V)$ è generato dagli n vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$, e, pertanto, la sua dimensione è al più n. ■

Possiamo allora dare la seguente osservazione, elementare, ma molto utile nelle applicazioni pratiche

Osservazione 27.9 Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e $\dim V < \dim W$ allora l'omomorfismo f non può essere suriettivo. Nel caso in cui $\dim V \geq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso. △

Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita, possiamo utilizzare la proposizione 27.6 per trovare una base di $f(V)$. Sappiamo infatti che se abbiamo dei generatori per uno spazio vettoriale possiamo ottenere una base per lo spazio vettoriale scartando alcuni dei generatori (eventualmente nessuno) scelti in modo opportuno. Applichiamo tutto ciò a un esempio:

Esempio 27.10 Sia V uno spazio vettoriale con una base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ e sia W un altro spazio vettoriale con una base formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$. Sia $f\colon V \to W$ l'omomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &:= \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,\\
f(\boldsymbol{e}_2) &:= \boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3,\\
f(\boldsymbol{e}_3) &:= 3\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3,\\
f(\boldsymbol{e}_4) &:= -\boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3.
\end{aligned}$$

Determiniamo una base per l'immagine di f. Consideriamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti dei vettori $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ e $f(\boldsymbol{e}_4)$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$. Notiamo che la matrice A non è altro che la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate. Sappiamo che $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ e $f(\boldsymbol{e}_4)$ generano $f(V)$. Dobbiamo dunque trovare una base per lo spazio vettoriale generato da $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ e $f(\boldsymbol{e}_4)$. Se ora riduciamo a scalini la matrice A, troviamo la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché gli scalini sono in prima e seconda posizione troviamo che una base per $f(V)$ è data dai vettori $f(\boldsymbol{e}_1)$ e $f(\boldsymbol{e}_2)$, vale a dire $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$ e $\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3$. $\triangle$

Questo esempio suggerisce una metodologia generale per determinare l'immagine di un omomorfismo $f\colon V \to W$ tra due spazi vettoriali di dimensione finita. Diamo allora il seguente teorema, la cui dimostrazione può essere facilmente ottenuta adattando l'esempio precedente:

Teorema 27.11 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissata una base per V, formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, e una base per W, formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$, consideriamo la matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Risulta allora*

$$\dim f(V) = \operatorname{rk} A.$$

In particolare abbiamo che f è suriettivo se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim W$.

Per determinare esplicitamente una base dell'immagine di f possiamo notare, come nell'esempio 27.10, che le colonne della matrice A forniscono le componenti rispetto alla base $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$ dei vettori $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{e}_n)$ che generano $f(V)$. Possiamo determinare una base di $f(V)$ calcolando il rango r della matrice A e scegliendo poi r vettori tra $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{e}_n)$ utilizzando il procedimento visto nel paragrafo 17.5.

Esercizio di base 27.12 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ definito da:

$$f(a,b,c) := (2a + b + 8c) + (3a - b + 7c)x + (-a - 3c)x^2 + (b + 2c)x^3. \qquad \triangle$$

Determinare una base per $f(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio di base 27.13 Stabilire se i seguenti omomorfismi sono suriettivi:

a. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ definito da

$$f(a,b,c) := a + ax + bx^2 + (c - b + a)x^5.$$

b. $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b+2c, a+2b+c, c+d).$$

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$f(a,b,c) := \begin{pmatrix} a-4b & b-2c \\ a+3c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

△

27.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.27.2 Data una generica matrice $B := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ questa appartiene all'immagine di f se e solo se esiste una matrice $A := \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ tale che $A + {}^tA = B$. Calcolando $A + {}^tA$ troviamo la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2w \end{smallmatrix}\right)$. Questo conduce al sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x = a \\ y + z = b \\ y + z = c \\ 2w = d \end{cases}$$

Questo sistema è risolubile se e solo se $b = c$, vale a dire se e solo se la matrice B è simmetrica. Dunque $f(\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})) = \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Notiamo che $f(\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}))$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$.

Vediamo ora un metodo alternativo per risolvere questo esercizio: dimostriamo direttamente che $f(\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})) = \mathrm{S}(2,\mathbb{R})$. Mostriamo innanzitutto che $f(A)$ è una matrice simmetrica per ogni matrice A in $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$. Dobbiamo cioè mostrare che ${}^tf(A) = f(A)$. Abbiamo infatti:

$${}^tf(A) = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = f(A).$$

Viceversa vogliamo dimostrare che se S è una matrice simmetrica, allora esiste una matrice $A \in \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ tale che $S = f(A)$, ovvero $S = A + {}^tA$. Questo è un po' più difficile. Se però scegliamo la matrice $A = \frac{1}{2}S$ notiamo che

$$f\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{2}S + {}^t\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}{}^tS = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S.$$

Dunque $S = f(A)$, e pertanto, S appartiene all'immagine di f. Avremmo potuto trovare altre matrici A tali che $f(A) = S$. Questo sarà precisato meglio nel capitolo successivo.

Notiamo, da ultimo, che nel secondo metodo utilizzato per il calcolo dell'immagine di f, non abbiamo utilizzato in maniera esplicita il fatto che le matrici fossero di ordine 2: si può quindi adattare senza nessuna modifica questa dimostrazione al caso di matrici di ordine qualunque.

EB.27.12 La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se ora riduciamo questa matrice otteniamo la matrice a scalini:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2: $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$. Poiché gli scalini sono in prima e seconda posizione, una base per $f(\mathbb{R}^3)$ è formata dall'immagine dei primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, cioè dai vettori $f(1,0,0)$ e $f(0,1,0)$. Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$, le componenti di $f(1,0,0)$ sono date dalla prima colonna di A (non di B!): dunque $f(1,0,0) = 2+3x-x^2$ (ovviamente avremmo potuto calcolare $f(1,0,0)$ direttamente dall'espressione di f). Analogamente si ha $f(0,1,0) = 1-x+x^3$. Dunque, una base per $f(\mathbb{R}^3)$ è formata dai vettori $2+3x-x^2$ e $1-x+x^3$.

EB.27.13

a. Possiamo dire subito che f non è suriettivo: infatti $\mathbb{R}^3$ ha dimensione finita mentre $\mathbb{R}[x]$ non ha dimensione finita.

b. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che questa matrice ha rango 3 e, quindi, $\dim f(\mathbb{R}^3) = 3$. Pertanto f è suriettivo.

c. Possiamo dire subito che f non è suriettivo: infatti $\dim \mathbb{R}^3 < \dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$.

27.4 Sunto

Immagine di un omomorfismo

Teorema *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali, allora $f(V)$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Se abbiamo un'applicazione non lineare $f\colon V \to W$ tra spazi vettoriali, non possiamo, a priori, dire nulla sull'immagine di f: né che sia un sottospazio vettoriale di W né che non lo sia. Bisogna valutare caso per caso.

Calcolo dell'immagine

Proposizione *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V è generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, allora $f(V)$ è generato dai vettori $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$.*

Notiamo che i vettori $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ generano $f(V)$, ma non è detto che generino tutto W (questo si realizza se e solo se $f(V) = W$ ovvero se f è suriettivo). Anche se i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ formano una base per V, non è detto che i vettori $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ formino una base per $f(V)$.

Corollario *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se la dimensione di V è finita, allora anche la dimensione di $f(V)$ è finita e vale la disuguaglianza* $\dim f(V) \leq \dim V$. *Nulla possiamo invece dire circa la dimensione di W.*

Osservazione Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e vale la disuguaglianza $\dim V < \dim W$ allora l'omomorfismo f non può essere suriettivo. Nel caso in cui $\dim V \geq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso. △

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissata una base per V, formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, e una base per W, formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$, consideriamo la matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Risulta allora*

$$\dim f(V) = \operatorname{rk} A.$$

In particolare abbiamo che f è suriettivo se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim W$.

Per determinare esplicitamente una base dell'immagine di f calcoliamo il rango r della matrice A e scegliamo poi r vettori tra $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{e}_n)$ utilizzando il procedimento visto nel paragrafo 17.5.

27.5 Esercizi

E.27.1 Dato l'omomorfismo

$$f\colon \mathrm{M}(2,3,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$$

definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+b+c & b+c+d \\ c+d+e & a+2b+3c+2d+e \end{pmatrix},$$

stabilire se f è suriettivo. Determinare poi esplicitamente l'immagine di f.

E.27.2 Sia $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b, c+d).$$

Dimostrare che f è un omomorfismo e stabilire se f è suriettivo.

E.27.3 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2[x]$ l'omomorfismo la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'immagine di f.

E.27.4 Dimostrare che le condizioni

$$\begin{aligned} f(1,2,1) &= (0,1), \\ f(1,0,1) &= (2,1), \\ f(0,0,1) &= (0,1), \end{aligned}$$

definiscono un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Stabilire se f è suriettivo.

E.27.5 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da:

$$f(x,y) := (x-y, x+y, 2x-y).$$

Stabilire se f è suriettivo.

27.6 Soluzioni degli esercizi

E.27.1 Poiché la dimensione di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$ non è minore della dimensione di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ non possiamo subito concludere che f non sia suriettivo. Dobbiamo quindi svolgere effettivamente i calcoli. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la riduzione a scalini troviamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 3: dunque la dimensione dell'immagine è 3 e f non è suriettivo. Poiché gli scalini sono nelle prime tre posizioni una base per $f(\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R}))$ è data dalle immagini delle prime tre matrici della base canonica di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$, vale a dire da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

E.27.2 L'applicazione f è un omomorfismo dal momento che le espressioni $a+b$ e $c+d$ sono polinomi omogenei di grado 1 in a, b, c e d. Non possiamo escludere che f sia suriettivo perché $\dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \geq \dim \mathbb{R}^2$. Per stabilire se f è suriettivo consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che questa matrice ha rango 2, e, dunque, f è suriettivo.

E.27.3 Le colonne della matrice rappresentativa danno dei generatori dell'immagine di f, decomposti rispetto alla base scelta dello spazio di arrivo (in questo caso la base è quella canonica). Dunque l'immagine di f è generata dai polinomi $1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1 + x$ e $0 \cdot 1 + 0 \cdot x = 0$. Pertanto l'immagine di f è formata da tutti i polinomi multipli di $1 + x$.

E.27.4 Dal momento che i tre vettori $(1,2,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$, le condizioni assegnate definiscono un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Dal momento che $\dim \mathbb{R}^3 \geq \dim \mathbb{R}^2$ non possiamo escludere che f sia suriettivo. Per verificare se f è suriettivo consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori $(1,2,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$ e dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2 e, dunque, f è suriettivo.

E.27.5 Non è necessario svolgere alcun calcolo. Dal momento che $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo f non può essere suriettivo.

CAPITOLO 28

Nucleo

In questo capitolo studieremo il nucleo di un omomorfismo vale a dire il sottoinsieme dello spazio di partenza la cui immagine è il vettore nullo. Vedremo come la determinazione del nucleo sia importante per stabilire se un certo omomorfismo è iniettivo, e come la determinazione del nucleo sia collegato alla determinazione delle controimmagini di singoli vettori dello spazio di arrivo.

28.1 Nucleo di un omomorfismo

Se lavoriamo con più di uno spazio vettoriale, ad esempio perché stiamo studiando un omomorfismo, ci capiterà di doverci riferire talora al vettore nullo di uno spazio, talora al vettore nullo di un altro. Per evitare ambiguità, quando necessario utilizzeremo allora il simbolo $\mathbf{0}_V$ per indicare lo zero di uno spazio vettoriale V. Cominciamo allora dando la semplice:

Proposizione 28.1 *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali allora $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.*

Dimostrazione Sappiamo che $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$. Dunque

$$f(\mathbf{0}_V) + f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V).$$

Utilizzando la legge di cancellazione otteniamo $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. ■

Questa proposizione può fornire un semplice ma utile criterio sufficiente ad affermare che un'applicazione non è lineare.

Esempio 28.2 Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f(x, y, z) := (x + y + 3z, x + 2y + 4z - 1).$$

Vediamo subito che f non è lineare dal momento che

$$f(0, 0, 0) = (0, -1) \neq (0, 0). \qquad \triangle$$

Chiaramente non è detto che un'applicazione $f\colon V \to W$ tra spazi vettoriali che soddisfa la relazione $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ sia un omomorfismo:

Esempio 28.3 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f(x, y) \coloneqq (xy, x).$$

Vediamo che $f(0, 0) = (0, 0)$, ma f non è un omomorfismo poiché, ad esempio,

$$f(0, 1) + f(1, 0) = (0, 0) + (0, 1) = (0, 1)$$

e

$$f((0, 1) + (1, 0)) = f(1, 1) = (1, 1). \qquad \triangle$$

Ovviamente, se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali, potranno esserci altri vettori, oltre a $\mathbf{0}_V$ che hanno come immagine $\mathbf{0}_W$. Diamo allora la:

Definizione 28.4 Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali chiamiamo **nucleo** di f (in simboli $\ker f$) l'insieme dei vettori di V la cui immagine è il vettore $\mathbf{0}_W$. Dunque:

$$\ker f \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 28.5 Sia $f\colon V \to W$ l'omomorfismo nullo. Determinare $\ker f$.

Grazie alla proposizione 28.1 sappiamo che $\ker f \neq \varnothing$: infatti $\mathbf{0}_V$ appartiene a $\ker f$.

Vediamo qualche esempio:

Esempio 28.6 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}[x]$ definito da:

$$f(a, b, c, d, e) \coloneqq (a - b + c) + (b - c + d)x + (c - d + e)x^2.$$

Un vettore (a, b, c, d, e) appartiene a $\ker f$ se e solo se

$$(a - b + c) + (b - c + d)x + (c - d + e)x^2 = 0,$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ \quad b - c + d &= 0 \\ \qquad c - d + e &= 0 \end{cases}$$

Notiamo che $\ker f$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo e, quindi, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$. Per determinare esplicitamente $\ker f$ risolviamo questo sistema nelle incognite a, b, c, d ed e e troviamo che $\ker f$ è:

$$\ker f = \{(-t, -u, t - u, t, u) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

Una base per $\ker f$ è formata dai vettori $(-1, 0, 1, 1, 0)$ e $(0, -1, -1, 0, 1)$. $\triangle$

Esempio 28.7 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da

$$f(A) := A + {}^tA.$$

Per determinare $\ker f$ possiamo considerare la generica matrice $A := \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ e stabilire quando $f(A) = 0$. Si ha:

$$f(A) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2w \end{pmatrix}.$$

Dunque $f(A) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \\ 2w & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo:

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Anche in questo caso abbiamo che $\ker f$ è un sottospazio vettoriale dello spazio di partenza.

Avremmo potuto anche osservare che $\ker f$ è formato dalle matrici A tali che $A + {}^tA = 0$, cioè le matrici tali che ${}^tA = -A$: abbiamo chiamato antisimmetriche tali matrici. △

In entrambi gli esempi precedenti abbiamo visto che il nucleo è un sottospazio vettoriale dello spazio di partenza. Questo è un risultato che vale in generale:

Teorema 28.8 *Il nucleo di un omomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione Dalla proposizione 28.1 sappiamo che $\mathbf{0}_V$ appartiene a $\ker f$ e dunque $\ker f \neq \varnothing$. Dobbiamo ora mostrare che se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ appartengono a $\ker f$ allora la loro somma $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ appartiene a $\ker f$. Sappiamo cioè che $f(\boldsymbol{v}_1) = \mathbf{0}_W$ e $f(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W$ e dobbiamo mostrare che $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W$. Ma allora

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

che è quel che volevamo.

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che se $\boldsymbol{v}$ appartiene a $\ker f$ e k è uno scalare allora $k\boldsymbol{v}$ appartiene a $\ker f$. Sappiamo cioè che $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$ e dobbiamo mostrare che $f(k\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$. Dunque

$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) = k\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

che è quel che volevamo. ■

28.2 Calcolo del nucleo

Negli esempi fin qui dati abbiamo determinato il nucleo risolvendo un sistema lineare omogeneo. Vediamo ora come generalizzare questo approccio a un qualsiasi omomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali di dimensione finita. Supponiamo di avere una base per V, formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, e una base per W, formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Consideriamo ora un generico vettore $\boldsymbol{v}$ di V. Vogliamo stabilire se $\boldsymbol{v} \in \ker f$. Dobbiamo quindi calcolare $f(\boldsymbol{v})$. Per far ciò decomponiamo innanzitutto $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base di V assegnata:

$$\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Ora calcoliamo il prodotto matriciale:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Otteniamo una matrice colonna

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che

$$f(\boldsymbol{v}) = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m.$$

Poiché $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$ sono linearmente indipendenti (formano una base per W) abbiamo che $\boldsymbol{v}$ appartiene al nucleo di f se e solo se $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, vale a dire:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque per determinare $\ker f$ dobbiamo risolvere un sistema lineare omogeneo. In corrispondenza di una soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ di questo sistema otteniamo un vettore del nucleo di f:

$$\bar{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \bar{x}_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \bar{x}_n\boldsymbol{e}_n.$$

Quindi, trovata una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo, otteniamo immediatamente una base per $\ker f$.

Esempio 28.9 Consideriamo nuovamente l'omomorfismo utilizzato nell'esempio 27.10. Questo è un omomorfismo $f\colon V \to W$ tra due spazi vettoriali con una base formata di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ e una base di W

formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$. L'omomorfismo f è definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &:= \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &:= \boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &:= 3\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_4) &:= -\boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3. \end{aligned}$$

Determiniamo una base per il nucleo di f. Consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che nell'esempio 27.10 abbiamo già ridotto a scalini la matrice A possiamo considerare il sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ha come soluzioni

$$\{(-2t - u, -t + u, t, u) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

Ponendo $t = 1$ e $u = 0$ otteniamo la soluzione $(-2, -1, 1, 0)$, ponendo invece $t = 0$ e $u = 1$ otteniamo la soluzione $(-1, 1, 0, 1)$. Una base per $\ker f$ è allora formata dai vettori:

$$-2\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4 \text{ e } -1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 + 1\boldsymbol{e}_4,$$

ovvero:

$$-2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \text{ e } -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 28.10 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ definito da:

$$f(a, b, c) := (2a + b + 8c) + (3a - b + 7c)x + (-a - 3c)x^2 + (b + 2c)x^3. \qquad \triangle$$

utilizzato nell'esercizio di base 27.12. Determinare una base per $\ker f$.

Notiamo che, in particolare, la dimensione del nucleo di f è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo. Questo spazio ha dimensione uguale a $n - \operatorname{rk} A$, e abbiamo così dimostrato il:

Teorema 28.11 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissate una base per V e una base per W sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi. Risulta allora*

$$\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} A.$$

Dal teorema 27.11 sappiamo che $\operatorname{rk} A = \dim f(V)$. Possiamo dare allora l'importante:

Teorema 28.12 *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita si ha:*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim f(V).$$

In realtà noi abbiamo dimostrato questo teorema nel caso in cui anche W abbia dimensione finita (non avremmo potuto altrimenti scrivere la matrice rappresentativa dell'omomorfismo f): il teorema però vale anche se W non ha dimensione finita, anche se noi non daremo la dimostrazione di questo fatto.

Uno dei motivi principali per cui è interessante calcolare il nucleo di un omomorfismo di spazi vettoriali è dato dal:

Teorema 28.13 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Allora f è iniettivo se e solo se $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$.*

Dimostrazione Supponiamo che f sia iniettivo. Ciò significa che vettori diversi hanno immagini diverse. In particolare se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di V diverso da $\mathbf{0}_V$ abbiamo che $f(\boldsymbol{v}) \neq f(\mathbf{0}_V)$. Poiché $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ vediamo che $f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_W$ vale a dire che $\boldsymbol{v}$ non appartiene al nucleo, e, dunque, il vettore $\mathbf{0}_V$ è l'unico vettore del nucleo.

Viceversa, supponiamo che $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$: dobbiamo mostrare che f è iniettivo. Dobbiamo cioè supporre di avere due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ e dobbiamo mostrare che $f(\boldsymbol{u}) \neq f(\boldsymbol{v})$. Dire $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ è equivalente a dire $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$. Poiché $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$, questo significa che $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \notin \ker f$, cioè $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_W$. Ma $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})$ e, dunque, abbiamo $f(\boldsymbol{u}) \neq f(\boldsymbol{v})$. ■

Notiamo che se f è iniettivo, allora $\dim V = \dim f(V)$. Poiché $f(V)$ è un sottospazio di W concludiamo che $\dim V \leq \dim W$. Possiamo allora dare la seguente osservazione molto utile nelle applicazioni pratiche:

Osservazione 28.14 Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e $\dim V > \dim W$ allora l'omomorfismo f non può essere iniettivo. Nel caso in cui $\dim V \leq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso. △

Possiamo adesso dare un semplice criterio per stabilire se un certo omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita è iniettivo.

Criterio 28.15 Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W. Sono allora equivalenti le condizioni:

1. L'omomorfismo f è iniettivo,

2. $\operatorname{rk} A = \dim V$,

3. $\dim f(V) = \dim V$. △

DIMOSTRAZIONE Per il teorema 27.11 sappiamo che $\dim f(V) = \operatorname{rk} A$, e, dunque la proprietà 2 e la proprietà 3 sono equivalenti. Per il teorema 28.12 abbiamo che $\dim \ker f = 0$ se e solo se $\dim V = \dim f(V)$, cioè la proprietà 1 e la proprietà 3 sono equivalenti. ■

Esercizio di base 28.16 Stabilire se i seguenti omomorfismi sono iniettivi:

a. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) := (a_0, a_1, a_2).$$

b. $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a + b + 2c, a + 2b + c, c + d).$$

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ definito da:

$$f(a, b, c) := \begin{pmatrix} a - 4b & b - 2c \\ a + 3c & a + b + c \end{pmatrix}.$$

d. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(a, b) := (a - b, b - a, 2a - 2b).$$ △

28.3 Controimmagini

Ricordiamo che data un'applicazione tra insiemi $f\colon A \to B$ la controimmagine di un elemento b di B è il sottoinsieme $f^{-1}(b)$ degli elementi di A la cui immagine tramite f è b, vale a dire:

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Ricordiamo che $f^{-1}(b)$ è un insieme non vuoto se e solo se b appartiene all'immagine di f.

Possiamo allora considerare il caso in cui $f\colon V \to W$ sia un omomorfismo di spazi vettoriali. Osserviamo innanzitutto che, per definizione di nucleo, si ha:

$$f^{-1}(\mathbf{0}_W) = \ker f.$$

Non è difficile descrivere le altre controimmagini dei vettori di W. Infatti se $\boldsymbol{w}$ è un vettore di W che non appartiene a $f(V)$ allora si ha $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \varnothing$, altrimenti abbiamo il:

Teorema 28.17 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali e sia $\boldsymbol{w}$ un vettore di $f(V)$. Allora $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ è un sottospazio affine parallelo a $\ker f$. Per determinare $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ occorre allora determinare esplicitamente un vettore $\boldsymbol{v}$ di $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ (cioè un vettore tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$). Una volta determinato $\boldsymbol{v}$ abbiamo che:*

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \ker f = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in \ker f\}.$$

Dimostrazione Dimostriamo innanzitutto che si ha:

$$\boldsymbol{v} + \ker f \subseteq f^{-1}(\boldsymbol{w}).$$

Dobbiamo mostrare che ogni elemento $\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{v} + \ker f$ appartiene a $f^{-1}(\boldsymbol{w})$, cioè $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$. Sappiamo che $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ con $\boldsymbol{v}' \in \ker f$. Ma allora

$$f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w} + \mathbf{0}_W = \boldsymbol{w},$$

come volevamo.

Viceversa dimostriamo ora che si ha:

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) \subseteq \boldsymbol{v} + \ker f.$$

Dobbiamo mostrare che ogni elemento $\boldsymbol{u}$ di $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ appartiene a $\boldsymbol{v} + \ker f$. Sappiamo cioè che $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$, e dobbiamo scrivere $\boldsymbol{u}$ come somma di $\boldsymbol{v}$ e di un elemento $\boldsymbol{v}'$ del nucleo di f. Affinché sia $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$, l'elemento $\boldsymbol{v}'$ cercato deve essere $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$: dobbiamo allora mostrare che $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ appartiene a $\ker f$. Sappiamo che sia $\boldsymbol{u}$ che $\boldsymbol{v}$ appartengono a $f^{-1}(\boldsymbol{w})$, vale a dire $f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Dunque:

$$f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}_W,$$

cioè $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ appartiene a $\ker f$, come richiesto. ■

Esempio 28.18 Riprendiamo ancora una volta l'omomorfismo $f\colon V \to W$ definito nell'esempio 27.10. Ricordiamo che la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo di voler calcolare la controimmagine del vettore $\boldsymbol{w} := 2\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2 + 4\boldsymbol{f}_3$. Questo è equivalente a risolvere il sistema lineare:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che però già conosciamo $\ker f$ è sufficiente trovare una soluzione particolare di questo sistema. Utilizzando, ad esempio, il metodo di Rouché-Capelli, troviamo che $(1, 1, 0, 0)$ è soluzione di questo sistema. Dunque il vettore $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ è tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Ma allora

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \ker f.$$

Nell'esempio 28.9 abbiamo calcolato il nucleo:

$$\ker f = \{(-2t - u)\boldsymbol{e}_1 + (-t + u)\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3 + u\boldsymbol{e}_4 \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque:

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \{(1 - 2t - u)\boldsymbol{e}_1 + (1 - t + u)\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3 + u\boldsymbol{e}_4 \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}. \qquad \triangle$$

Nello svolgimento dell'esempio precedente abbiamo utilizzato il teorema 19.22. Il teorema 28.17, nel caso in cui i due spazi vettoriali abbiano entrambi dimensione finita, può infatti essere visto come una interpretazione del teorema 19.22 che, lo ricordiamo, dice che le soluzioni di un sistema lineare (in questo caso gli elementi della controimmagine di un vettore $\boldsymbol{w}$) si ottengono come tutte le somme di una soluzione fissata del sistema (in questo caso un vettore $\boldsymbol{v}$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$) e di una soluzione variabile del sistema omogeneo associato (in questo caso un elemento variabile del nucleo).

Esercizio di base 28.19 Consideriamo l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ definito da:

$$f(a, b, c) := (2a + b + 8c) + (3a - b + 7c)x + (-a - 3c)x^2 + (b + 2c)x^3. \qquad \triangle$$

utilizzato nell'esercizio di base 27.12. Determinare $f^{-1}(7 + 8x - 3x^2 + x^3)$.

28.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.28.5 Per definizione l'omomorfismo nullo f manda tutti i vettori di V nel vettore nullo di W. Si ha cioè $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$ per ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V: ma allora $\ker f = V$.

EB.28.10 Sappiamo già che la matrice di f rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare il nucleo dovremmo risolvere il sistema lineare omogeneo:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che nel risolvere l'esercizio di base 27.12 abbiamo già ridotto a scalini la matrice A possiamo considerare il sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ha come soluzioni

$$\{(-3t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Una base per $\ker f$ è allora formata dal singolo vettore le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(-3, -2, 1)$, vale a dire dal vettore $(-3, -2, 1)$.

EB.28.16

a. Possiamo dire subito che f non è iniettivo: infatti $\mathbb{R}[x]$ non ha dimensione finita mentre $\mathbb{R}^3$ ha dimensione finita.

b. Possiamo dire subito che f non è iniettivo: infatti $\dim \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) > \dim \mathbb{R}^3$.

c. Poiché $\dim \mathbb{R}^3 \leq \dim \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ non possiamo escludere a priori che f sia iniettivo. Dobbiamo svolgere esplicitamente i calcoli. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che questa matrice ha rango 3. Per il criterio 28.15 f è iniettivo.

d. Poiché $\dim \mathbb{R}^2 \leq \dim \mathbb{R}^3$ non possiamo escludere a priori che f sia iniettivo. Dobbiamo svolgere esplicitamente i calcoli. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che questa matrice ha rango 1. Per il criterio 28.15 f non è iniettivo.

EB.28.19 Si può trovare utilizzando ad esempio il metodo di Rouché-Capelli, un vettore particolare in $f^{-1}(7 + 8x - 3x^2 + x^3)$, ad esempio $(3, 1, 0)$. Poiché

$$\ker f = \{(-3t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} f^{-1}(7 + 8x - 3x^2 + x^3) &= (3, 1, 0) + \{(-3t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3 - 3t, 1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

28.5 Sunto

Nucleo di un omomorfismo

Proposizione *Se $f \colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali allora $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.*

Se $f \colon V \to W$ è un'applicazione tra spazi vettoriali per cui si ha $f(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$ allora f non è lineare. Chiaramente non è detto che un'applicazione $f \colon V \to W$ tra spazi vettoriali che soddisfa la relazione $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ sia un omomorfismo.

Definizione Se $f \colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali chiamiamo **nucleo** di f (in simboli $\ker f$) l'insieme dei vettori di V la cui immagine è il vettore $\mathbf{0}_W$. Dunque:

$$\ker f := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}. \qquad \triangle$$

Teorema *Il nucleo di un omomorfismo $f \colon V \to W$ di spazi vettoriali sul campo è un sottospazio vettoriale di V.*

Calcolo del nucleo

Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Sia fissata una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, e sia fissata una base per W, formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori del nucleo di f sono allora tutti e soli quelli del tipo

$$\bar{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \bar{x}_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \bar{x}_n\boldsymbol{e}_n,$$

con $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ soluzione del sistema lineare omogeneo.

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissate una base per V e una base per W sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi. Risulta allora*

$$\dim\ker f = \dim V - \operatorname{rk} A.$$

Teorema *Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita si ha:*

$$\dim V = \dim\ker f + \dim f(V).$$

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Allora f è iniettivo se e solo se* $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$.

Osservazione Se $f\colon V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se si ha $\dim V > \dim W$ allora l'omomorfismo f non può essere iniettivo. Nel caso in cui $\dim V \leq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso. △

Criterio Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W. Sono allora equivalenti le condizioni:

1. L'omomorfismo f è iniettivo,

2. $\operatorname{rk} A = \dim V$,

3. $\dim f(V) = \dim V$. △

Controimmagini

Per definizione di nucleo, si ha:

$$f^{-1}(\mathbf{0}_W) = \ker f.$$

Se $\boldsymbol{w}$ è un vettore di W che non appartiene a $f(V)$ allora si ha $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \varnothing$, altrimenti abbiamo il:

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali e sia $\boldsymbol{w}$ un vettore di $f(V)$. Allora $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ è un sottospazio affine parallelo a $\ker f$. Per determinare $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ occorre allora determinare esplicitamente un vettore $\boldsymbol{v}$ di $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ (cioè un vettore tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$). Una volta determinato $\boldsymbol{v}$ abbiamo che:*

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \ker f = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \mid \boldsymbol{v}' \in \ker f\}.$$

28.6 Esercizi

E.28.1 Dato l'omomorfismo

$$f\colon \mathrm{M}(2,3,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$$

definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+b+c & b+c+d \\ c+d+e & a+2b+3c+2d+e \end{pmatrix},$$

stabilire se f è iniettivo. Determinare poi esplicitamente il nucleo di f.

E.28.2 Stabilire se l'omomorfismo $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b, c+d)$$

è iniettivo.

E.28.3 Sia $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b, a+b)$$

Calcolare $f^{-1}(2,2)$ e $f^{-1}(1,2)$.

E.28.4 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2[x]$ l'omomorfismo la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare il nucleo di f. Determinare poi $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(1+x)$ e $f^{-1}(2+2x)$.

E.28.5 Stabilire se i seguenti omomorfismi sono iniettivi e/o suriettivi:

a. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2[x]$ definito da $f(a,b,c) := (2a+c) + (a+b)x$;

b. $f\colon \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(a+bx) := (a-b, a+b, 2a)$;

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a,b,c) := (a-b) + ax - (a+b+c)x^2$;

d. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x,y,z,w) := (x-y+z, x+w, y-z+w)$;

e. $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+d, b+c);$$

f. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definito da $f(p(x)) := (p(0), p(1))$;

g. $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a-b, b-c, c-d, d-a);$$

E.28.6 Determinare esplicitamente immagine e nucleo di ciascuno degli omomorfismi dati all'esercizio E.28.5.

E.28.7 In ciascun punto di questo esercizio utilizzare l'omomorfismo definito al corrispondente punto dell'esercizio E.28.5. Determinare le seguenti controimmagini:

a. $f^{-1}(1+x)$;

b. $f^{-1}(0,1,0)$ e $f^{-1}(-1,1,0)$;

c. $f^{-1}(x)$;

d. $f^{-1}(1,0,1)$ e $f^{-1}(0,1,1)$;

e. $f^{-1}(1,1)$ e $f^{-1}(0,1)$;

f. $f^{-1}(0,1)$;

g. $f^{-1}(1,0,0,0)$.

E.28.8 Sia $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{aligned} f(1+x) &:= 1+2x+x^2, \\ f(1+x^2) &:= 1+2x+x^2, \\ f(x+x^2) &:= 1+2x+x^2. \end{aligned}$$

a. Determinare $\ker f$ e $f(\mathbb{R}^3[x])$;

b. Determinare $\ker f + f(\mathbb{R}^3[x])$ e $\ker f \cap f(\mathbb{R}^3[x])$.

E.28.9 Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &:= (1,0,1), \\ f(1,1,0) &:= (1,2,0), \\ f(1,0,0) &:= (0,0,0). \end{aligned}$$

Determinare la matrice rappresentativa di f nei seguenti casi:

a. rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

b. rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (1,0,0)$;

c. rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1 := (1,2,1)$, $\boldsymbol{w}_2 := (0,1,0)$, $\boldsymbol{w}_3 := (0,0,2)$.

Determinare poi nucleo e immagine di f.

28.7 Soluzioni degli esercizi

E.28.1 Poiché la dimensione di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$ è maggiore della dimensione di $\mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ possiamo subito concludere che f non è iniettivo. Se ora vogliamo calcolare esplicitamente il nucleo di f dobbiamo determinare la matrice rappresentativa di f rispetto a basi a piacere, ad esempio le basi canoniche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora risolvere il sistema omogeneo associato a questa matrice. Nel risolvere l'esercizio E.27.1 abbiamo già ridotto a scalini questa matrice, ottenendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivendo esplicitamente il sistema troviamo che le soluzioni sono i vettori del tipo:

$$(t, u, -t-u, t, u, v)$$

al variare di t, u e v in $\mathbb{R}$. Una base per lo spazio delle soluzioni è allora data dai vettori $(1,0,-1,1,0,0)$, $(0,1,-1,0,1,0)$ e $(0,0,0,0,0,1)$. Se utilizziamo ora questi vettori per scrivere le corrispondenti combinazioni lineari dei vettori della base canonica di $\mathrm{M}(2,3,\mathbb{R})$ otteniamo una base per $\ker f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E.28.2 L'omomorfismo f non può essere iniettivo dal momento che $\dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) > \dim \mathbb{R}^2$.

E.28.3 Si vede che si ha

$$f^{-1}(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2-b & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e $f^{-1}(1,2) = \varnothing$.

E.28.4 Si ha:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}, \\ f^{-1}(1) &= \varnothing, \\ f^{-1}(1+x) &= \{(1,b) \mid b \in \mathbb{R}\}, \\ f^{-1}(2+2x) &= \{(2,b) \mid b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

E.28.5

a. L'omomorfismo f non può essere iniettivo perché la dimensione dello spazio di partenza è maggiore della dimensione dello spazio di arrivo. Per determinare se è suriettivo calcoliamo il rango della matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A ha rango 2, abbiamo che $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$, cioè f è suriettivo.

b. L'omomorfismo f non può essere suriettivo perché la dimensione dello spazio di partenza è minore della dimensione dello spazio di arrivo. Per determinare se è iniettivo calcoliamo il rango della matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A ha rango 2, abbiamo che $\dim f(\mathbb{R}^2[x]) = 2$ e, dunque:

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2[x] - \dim f(\mathbb{R}^2[x]) = 0,$$

cioè f è iniettivo.

c. Poiché lo spazio di partenza e quello di arrivo hanno dimensione uguale (cioè 3) non possiamo a priori escludere né che f sia iniettivo né che f sia suriettivo. Consideriamo allora la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché questa matrice ha rango 3 (il suo determinante è diverso da 0) abbiamo che $\dim f(\mathbb{R}^3) = 3$ cioè f è suriettivo e $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 3 - 3 = 0$, cioè f è iniettivo.

d. L'omomorfismo f non può essere iniettivo perché la dimensione dello spazio di partenza è maggiore della dimensione dello spazio di arrivo. Per determinare se è suriettivo calcoliamo il rango della matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché A ha rango 2, abbiamo che $\dim f(\mathbb{R}^4) = 2$ e, dunque f non è suriettivo.

e. L'omomorfismo f non può essere iniettivo perché la dimensione dello spazio di partenza (4) è maggiore della dimensione dello spazio di arrivo (2). Per determinare se è suriettivo calcoliamo il rango della matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A ha rango 2, abbiamo che $\dim f(\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})) = 2$ e, dunque f è suriettivo.

f. L'omomorfismo f non può essere iniettivo perché lo spazio di partenza non ha dimensione finita mentre quello di arrivo ha dimensione finita. Per verificare se f è suriettivo consideriamo un elemento generico (a, b) dello spazio di arrivo. Dobbiamo stabilire se esiste un polinomio $p(x)$ tale che $f(p(x)) = (a, b)$. Scriviamo in maniera più esplicita l'omomorfismo f. Sia dato un polinomio generico

$$p(x) \coloneqq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Si ha $f(p(x)) = (p(0), p(1)) = (a_0, a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$. Dunque $f(p(x)) = (a, b)$ se $a_0 = a$ e $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = b$. Si vede allora facilmente che $f(a + (b - a)x) = (a, b)$, e, dunque, f è suriettivo.

g. Poiché lo spazio di partenza e quello di arrivo hanno dimensione uguale (cioè 4) non possiamo a priori escludere né che f sia iniettivo né che f sia suriettivo. Consideriamo allora la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante uguale a 0, dunque il suo rango è minore di 4. Pertanto $\dim f(\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})) < 4$, cioè f non è suriettivo. Inoltre

$$\dim \ker f = \dim \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) - \dim f(\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})) > 0,$$

pertanto f non è iniettivo.

E.28.6 In alcuni casi abbiamo già determinato nucleo e/o immagine. Completiamo con i dati mancanti.

a. Il nucleo di f si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2a \phantom{{}+b} + c = 0 \\ a + b \phantom{{}+c} = 0 \end{cases}.$$

Dunque $\ker f$ è formato dalle terne del tipo $(t, -t, -2t)$. Una base per $\ker f$ è formata dal vettore $(1, -1, -2)$.

b. Sappiamo che $f(\mathbb{R}^2[x])$ è generata da $f(1)$ e $f(x)$ ovvero da $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 0)$. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^2) = 2$ (lo sapevamo già dal primo esercizio), questi vettori costituiscono una base per $f(\mathbb{R}^2)$.

c. Il nucleo di f è $\{(0, 0, 0)\}$ e l'immagine di f è $\mathbb{R}^3[x]$.

d. Il nucleo di f si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases},$$

e, dunque, $\ker f$ è formato dalle quaterne del tipo $(-t, u, u + t, t)$. Una base per $\ker f$ è allora formata dai vettori $(-1, 0, 1, 1)$ e $(0, 1, 1, 0)$. Sappiamo che l'immagine ha dimensione 2 ed è generata dai vettori le cui componenti rispetto alla base canonica sono date dalle colonne della matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche (che abbiamo già trovata nel primo esercizio). Scegliendone 2 linearmente indipendenti troviamo che una base per $f(\mathbb{R}^4)$ è formata dai vettori $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

e. Il nucleo di f si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases},$$

ovvero è formato dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Una base per $\ker f$ è formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f. Il nucleo di f è formato da tutti i polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

tali che $a_0 = 0$ e $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$, ovvero dai polinomi del tipo:

$$p(x) = (-a_2 - \cdots - a_n)x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

g. Se calcoliamo esplicitamente il rango della matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche si trova che il rango della matrice A è 3 e che le sue prime tre colonne sono linearmente indipendenti. Dunque una base per l'immagine di f è data dalle immagini dei primi tre vettori della base canonica di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$, e cioè dai vettori:

$$(1, 0, 0, -1), \quad (0, -1, 1, 0) \quad (0, -1, 1, 0).$$

Per trovare il nucleo notiamo che una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ appartiene al nucleo se e solo se $(a - b, b - c, c - d, d - a) = (0, 0, 0, 0)$, cioè se e solo se $a = b = c = d$. Dunque una base per il nucleo è formata dalla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

E.28.7 Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali e $\boldsymbol{w}$ un vettore di W. Abbiamo allora due possibilità per la controimmagine di $\boldsymbol{w}$:

- se $\boldsymbol{w} \notin f(W)$ allora $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \varnothing$;
- se $\boldsymbol{w} \in f(W)$ e $\boldsymbol{v}$ è un vettore di V allora $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \ker f$.

Poiché conosciamo già il nucleo di ciascun omomorfismo si tratta allora di determinare per ciascun vettore assegnato un vettore particolare della sua controimmagine (se esiste).

a. Dobbiamo trovare un vettore (a, b, c) tale che $(2a + c) + (a + b)x = 1 + x$. Possiamo scegliere ad esempio $(0, 1, 1)$. Dunque

$$f^{-1}(1 + x) = (0, 1, 1) + \ker f = \{(0, 1, 1) + (t, -t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

b. Dobbiamo trovare un polinomio $a + bx$ tale che $(a - b, a + b, 2a) = (0, 1, 0)$. Poiché polinomi siffatti non esistono abbiamo che $f^{-1}(0, 1, 0) = \varnothing$.

Dobbiamo trovare un polinomio $a + bx$ tale che $(a - b, a + b, 2a) = (-1, 1, 0)$. Ad esempio il polinomio x. Dunque

$$f^{-1}(-1, 1, 0) = x + \ker f = \{x\}.$$

c. Dobbiamo trovare un vettore (a, b, c) tale che

$$(a - b) + ax - (a + b + c)x^2 = x.$$

L'unico vettore siffatto è $(1, 1, -2)$, pertanto $f^{-1}(x) = \{(1, 1, -2)\}$.

d. Dobbiamo trovare un vettore (x, y, z, w) tale che

$$(x - y + z, x + w, y - z + w) = (1, 0, 1).$$

Poiché vettori siffatti non esistono abbiamo che $f^{-1}(1, 0, 1) = \varnothing$.

Dobbiamo trovare un vettore (x, y, z, w) tale che

$$(x - y + z, x + w, y - z + w) = (0, 1, 1).$$

Possiamo scegliere ad esempio $(1, 1, 0, 0)$. Dunque

$$f^{-1}(0, 1, 1) = (1, 1, 0, 0) + \ker f = \{(0, 1, 1) + (-t, u, u + t, t) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

e. Dobbiamo trovare una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tale che

$$(a+d, b+c) = (1,1).$$

Possiamo scegliere ad esempio $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque

$$f^{-1}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dobbiamo trovare una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tale che

$$(a+d, b+c) = (0,1).$$

Possiamo scegliere ad esempio $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque

$$f^{-1}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

f. Dobbiamo trovare un polinomio $p(x)$ tale che $(p(0), p(1)) = (0,1)$. Ad esempio il polinomio x. Dunque

$$f^{-1}(0,1) = x + \ker f.$$

g. Dobbiamo trovare una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tale che

$$(a-b, b-c, c-d, d-a) = (1,0,0,0).$$

Poiché matrici siffatti non esistono abbiamo che $f^{-1}(1,0,0,0) = \varnothing$.

E.28.8 Poniamo $p_1(x) := (1+x)$, $p_2(x) := 1+x^2$ e $p_3(x) := x+x^2$. Osserviamo che $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ formano una base di $\mathbb{R}^3[x]$ e, dunque, f è ben definito.

Lo spazio $f(\mathbb{R}^3[x])$ è generato dalle immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3[x]$, ad esempio dalle immagini di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Dunque $f(\mathbb{R}^3[x])$ è generato da $1+2x+x^2$ e ha, pertanto, dimensione 1.

Sia ora $p(x)$ un polinomio generico di $\mathbb{R}^3[x]$. Indichiamo con (a,b,c) le sue componenti rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, ovvero si abbia $p(x) := ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x)$. Si ha, dunque

$$\begin{aligned} & f(p(x)) = af(p_1(x)) + bf(p_2(x)) + cf(p_3(x)) \\ & = a(1+2x+x^2) + b(1+2x+x^2) + c(1+2x+x^2) = (a+b+c)(1+2x+x^2). \end{aligned}$$

Allora $p(x)$ appartiene al nucleo di f se e solo se $a+b+c=0$, ovvero

$$\ker f = \{(-b-c)p_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) \mid b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto una base per $\ker f$ è data dai polinomi $-p_1(x)+p_2(x)$ e $-p_1(x)+p_3(x)$, cioè $-x+x^2$ e $-1+x^2$.

La somma $\ker f + f(\mathbb{R}^3[x])$ è generata dai polinomi $1+2x+x^2$, $-x+x^2$, $-1+x^2$. Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 si ha che $\dim(\ker f + f(\mathbb{R}^3[x])) = 3$, cioè $\ker f + f(\mathbb{R}^3[x]) = \mathbb{R}^3$. Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(\ker f \cap f(\mathbb{R}^3[x])) = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^3[x]) - \dim(\ker f + f(\mathbb{R}^3[x])) = 0,$$

cioè $\ker f \cap f(\mathbb{R}^3[x]) = \{0\}$.

E.28.9

a. Esprimiamo i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= (1,0,0),\\ (0,1,0) &= (1,1,0)-(1,0,0),\\ (0,0,1) &= (1,1,1)-(1,1,0).\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}f(1,0,0) &= f(1,0,0) = (0,0,0),\\ f(0,1,0) &= f(1,1,0)-f(1,0,0) = (1,2,0),\\ f(0,0,1) &= f(1,1,1)-f(1,1,0) = (0,-2,1).\end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alla base canonica è:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b. Dobbiamo decomporre $f(1,1,1)$, $f(1,1,0)$, $f(1,0,0)$ rispetto alla base formata dai vettori $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$. Si ha:

$$\begin{aligned}f(1,1,1) &= (1,0,1) = 1(1,1,1)-1(1,1,0)+1(1,0,0),\\ f(1,1,0) &= (1,2,0) = 0(1,1,1)+2(1,1,0)-1(1,0,0),\\ f(1,0,0) &= (0,0,0) = 0(1,1,1)+0(1,1,0)+0(1,0,0).\end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alla base formata dai vettori $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$ è:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

c. Determiniamo $f(1,2,1)$, $f(0,1,0)$ e $f(0,0,2)$. Possiamo a tal scopo utilizzare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica. Ad esempio per determinare $f(1,2,1)$ basta calcolare il prodotto:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Dunque $f(1,2,1) = (2,2,1)$. In maniera analoga si trova che $f(0,1,0) = (1,2,0)$ e $f(0,0,2) = (0,-4,2)$. Decomponiamo ora i vettori così trovati rispetto alla base formata dai vettori $(1,2,1)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$. Risulta:

$$\begin{aligned}f(1,2,1) &= (2,2,1) = 2(1,2,1)-2(0,1,0)-\frac{1}{2}(0,0,2),\\ f(0,1,0) &= (1,2,0) = 1(1,2,1)+0(0,1,0)-\frac{1}{2}(0,0,2),\\ f(0,0,2) &= (0,-4,2) = 0(1,2,1)-4(0,1,0)+1(0,0,2).\end{aligned}$$

Dunque la matrice di f rispetto alla base formata dai vettori $(1,2,1)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$ è:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -4\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

Per determinare poi nucleo e immagine di f possiamo ragionare così: sappiamo che $f(\mathbb{R}^3)$ è generato dalle immagini dei vettori di una base. Ad esempio $f(\mathbb{R}^3)$ è generato da $f(1,1,1)$, $f(1,1,0)$ e $f(1,0,0)$, ovvero da $(1,0,1)$, $(1,2,0)$, e $(0,0,0)$. Ovviamente $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$ sono linearmente indipendenti, dunque $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$ formano una base per $f(\mathbb{R}^3)$. In particolare $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$: pertanto

$$\dim \ker f = 3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 1.$$

Poiché $(1,0,0)$ appartiene a $\ker f$ si ha che $(1,0,0)$ forma una base per $\ker f$.

CAPITOLO 29

Isomorfismi

Nei capitoli precedenti abbiamo dato delle condizioni per stabilire se un omomorfismo è suriettivo o iniettivo. In questo capitolo studieremo gli isomorfismi, vale a dire gli omomorfismi biiettivi.

29.1 Isomorfismi

Cominciamo con la:

Definizione 29.1 Un omomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali è detto **isomorfismo** se f è biiettivo cioè se f è sia suriettivo che iniettivo. Due spazi vettoriali V e W si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f\colon V \to W$. △

Ricordiamo che nel capitolo 25, data una funzione biiettiva $f\colon A \to B$, abbiamo definito la funzione inversa $f^{-1}\colon B \to A$. La definizione si dà in questo modo: dato un elemento $\boldsymbol{w} \in W$, dal momento che f è suriettiva, esiste almeno un elemento $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$: dal momento che f è iniettiva questo elemento $\boldsymbol{v}$ è unico. Abbiamo allora posto $f^{-1}(\boldsymbol{w}) := \boldsymbol{v}$. La funzione così definita è ancora una funzione biiettiva. Nel caso in cui abbiamo un isomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali, consideriamo la funzione $f^{-1}\colon W \to V$. È naturale chiedersi se f^{-1} sia anch'essa un isomorfismo. La risposta è affermativa:

Proposizione 29.2 *Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali allora la funzione inversa $f^{-1}\colon W \to V$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Lasciamo per esercizio la dimostrazione di questo risultato.

Esercizio di base 29.3 Dimostrare la proposizione precedente.

La definizione di isomorfismo può essere data per spazi vettoriali qualunque, di dimensione finita oppure no. Uno spazio vettoriale di dimensione finita e uno spazio vettoriale non di dimensione finita non possono però essere isomorfi. Questo è conseguenza del:

Teorema 29.4 *Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e V ha dimensione finita allora anche W ha dimensione finita e $\dim W = \dim V$.*

Dimostrazione Dal momento che f è suriettivo abbiamo che $f(V) = W$. Per il corollario 27.8 abbiamo che W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$.

Dal momento che f è iniettivo, per il criterio 28.15 sappiamo che non può essere $\dim W < \dim V$. Ma allora $\dim W = \dim V$. ■

Dunque due spazi vettoriali di dimensione differente non sono isomorfi. Viene spontaneo chiedersi se due spazi vettoriali aventi la stessa dimensione sono isomorfi. Prima di rispondere a ciò diamo un metodo per stabilire se un omomorfismo tra due spazi vettoriali di dimensione uguale è un isomorfismo:

Teorema 29.5 *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim V = \dim W = n$ e A è la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W, allora sono equivalenti le condizioni:*

1. f è suriettivo,

2. f è iniettivo,

3. f è un isomorfismo (cioè è biiettivo),

4. $\det A \neq 0$.

Dimostrazione Nei capitoli precedenti abbiamo visto come la conoscenza del rango della matrice A ci permetta di stabilire se f è suriettivo e iniettivo. In particolare dal teorema 27.11 sappiamo che l'omomorfismo f è suriettivo se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim W$. Poiché $\dim W = n$ abbiamo che le proprietà 1 e 4 sono equivalenti. Per il criterio 28.15 sappiamo che f è iniettivo se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim V$. Poiché $\dim V = n$ abbiamo che le proprietà 2 e 4 sono equivalenti. Abbiamo così mostrato che le proprietà 1, 2 e 4 sono equivalenti.

Se ora f è un omomorfismo che soddisfa una qualunque delle proprietà 1, 2 o 4, allora f le soddisfa tutte: in particolare f è suriettivo e iniettivo, cioè è un isomorfismo. Viceversa se f è un isomorfismo allora è suriettivo, cioè soddisfa la condizione 1, e quindi anche la 2 e la 4. ■

Esercizio di base 29.6 Stabilire se i seguenti omomorfismi sono isomorfismi:

a. $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b+2c, a+2b+c, c+d).$$

b. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$f(a,b,c,d) := \begin{pmatrix} a-4b+3d & b-2c \\ a+3c+2d & a+b+c \end{pmatrix}.$$

c. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a,b,c) := a-b+(b-c)x+(-a+c)x^2.$$ △

Il teorema 29.4 ci dice che spazi vettoriali isomorfi hanno la stessa dimensione. Vale anche il viceversa:

Teorema 29.7 *Siano V e W due spazi vettoriali aventi la stessa dimensione n. Allora V e W sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo determinare un isomorfismo $f\colon V \to W$. Consideriamo una base di V, formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, e una base di W, formata dai vettori $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ..., $\boldsymbol{f}_n$. Consideriamo l'omomorfismo $f\colon V \to W$ definito dalle condizioni $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{f}_i$ per $1 \leq i \leq n$. Scriviamo la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi scelte. Notiamo che si ha:

$$f(\boldsymbol{e}_i) = 0\boldsymbol{f}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{f}_{i-1} + 1\boldsymbol{f}_i + 0\boldsymbol{f}_{i+1} + \dots \boldsymbol{f}_n$$

per $1 \leq i \leq n$. Si vede allora che la matrice cercata è la matrice identica. Quindi, per il teorema 29.5, f è un isomorfismo. ■

Abbiamo l'ovvio

Corollario 29.8 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Osservazione 29.9 Il teorema 29.7 non dice che ogni omomorfismo tra due spazi vettoriali V e W di dimensione uguale è un isomorfismo, ma, semplicemente, che esiste un isomorfismo tra V e W. △

Esempio 29.10 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi di grado minore di 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Entrambi gli spazi hanno infatti dimensione 3. Possiamo dare esplicitamente un isomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3$ tra questi due spazi vettoriali considerando le rispettive basi canoniche e applicandovi la tecnica utilizzata nella dimostrazione del teorema 29.7. Con semplici calcoli si vede che esplicitamente si ha:

$$f(a + bx + cx^2) \coloneqq (a, b, c).$$

Se ora consideriamo l'omomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$g(a + bx + cx^2) \coloneqq (a - b, b + c, a + c).$$

vediamo che questo non è un isomorfismo dal momento che la matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

questa matrice ha determinante nullo, e, pertanto g non è un isomorfismo (per il teorema 29.5 possiamo anzi dire che g non è né iniettivo né suriettivo). Dunque $\mathbb{R}^3[x]$ e $\mathbb{R}^3$ sono isomorfi ma g non realizza un isomorfismo tra di essi. △

Esercizio di base 29.11 Sappiamo che $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ (lo spazio delle matrici simmetriche reali di ordine 2) ha dimensione 3. Determinare un isomorfismo tra $\mathrm{S}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

29.2 Soluzioni degli esercizi di base

EB.29.3 Sappiamo già che f^{-1} è biiettiva. Dobbiamo dunque mostrare che f^{-1} rispetta sia la somma che il prodotto.

Verifichiamo innanzitutto che f^{-1} rispetta la somma. Siano allora $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ due elementi di W. Vogliamo mostrare che $f^{-1}(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=f^{-1}(\boldsymbol{w}_1)+f^{-1}(\boldsymbol{w}_2)$. Indichiamo con $\boldsymbol{v}_3$ l'elemento $f^{-1}(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$, con $\boldsymbol{v}_1$ l'elemento $f^{-1}(\boldsymbol{w}_1)$ e con $\boldsymbol{v}_2$ l'elemento $f^{-1}(\boldsymbol{w}_2)$. Dobbiamo allora mostrare che $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$. Dal momento che f è iniettiva, per far ciò è sufficiente mostrare che gli elementi $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ hanno la stessa immagine tramite f, vale a dire che $f(\boldsymbol{v}_3)=f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)$. Poiché f è lineare il secondo membro di questa uguaglianza è uguale a $f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2)$. Dobbiamo dunque mostrare che $f(\boldsymbol{v}_3)=f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2)$. Per come abbiamo scelto $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$, sappiamo che $f(\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$, che $f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{w}_1$ e che $f(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{w}_2$, e, dunque, otteniamo subito la nostra tesi.

Dobbiamo ora mostrare che f rispetta il prodotto. Sia allora $\boldsymbol{w}$ un elemento di W e k uno scalare. Vogliamo mostrare che $f^{-1}(k\boldsymbol{w})=kf^{-1}(\boldsymbol{w})$. Indichiamo con $\boldsymbol{v}^*$ l'elemento $f^{-1}(k\boldsymbol{w})$ e con $\boldsymbol{v}$ l'elemento $f^{-1}(\boldsymbol{w})$. Dobbiamo mostrare che $\boldsymbol{v}^*=k\boldsymbol{v}$. Dal momento che f è iniettiva, per far ciò è sufficiente mostrare che gli elementi $\boldsymbol{v}^*$ e $k\boldsymbol{v}$hanno la stessa immagine tramite f, vale a dire che $f(\boldsymbol{v}^*)=f(k\boldsymbol{v})$. Poiché f è lineare il secondo membro di questa uguaglianza è uguale a $kf(\boldsymbol{v})$. Dobbiamo dunque mostrare che $f(\boldsymbol{v}^*)=kf(\boldsymbol{v})$. Per come abbiamo scelto $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}^*$, sappiamo che $f(\boldsymbol{v}^*)=k\boldsymbol{w}$ e che $f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}$ e, dunque, otteniamo subito la nostra tesi.

EB.29.6

a. Possiamo dire subito che f non è un isomorfismo: infatti $\dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})\neq \dim \mathbb{R}^3$.

b. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A\neq 0$, per il teorema 29.5 f è un isomorfismo.

c. La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = 0$, per il teorema 29.5 f non è un isomorfismo. Possiamo anche dire che f non è né suriettivo né iniettivo.

EB.29.11 Una base per $\mathrm{S}(2,\mathbb{R})$ è data dalle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Un isomorfismo $f\colon \mathrm{S}(2,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ è allora dato dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(A_1) &:= (1,0,0),\\ f(A_2) &:= (0,1,0),\\ f(A_3) &:= (0,0,1).\end{aligned}$$

vale a dire:

$$f\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} = (a,b,c).$$

Questo non è ovviamente l'unico isomorfismo possibile.

29.3 Sunto

Isomorfismi

Definizione Un omomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali è detto **isomorfismo** se f è biiettivo cioè se f è sia suriettivo che iniettivo. Due spazi vettoriali V e W si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f\colon V \to W$. △

Data una funzione biiettiva $f\colon A \to B$, possiamo definire la funzione inversa $f^{-1}\colon A \to B$. Nel caso in cui abbiamo un isomorfismo $f\colon V \to W$ di spazi vettoriali, possiamo considerare la funzione $f^{-1}\colon W \to V$.

Proposizione *Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali allora la funzione inversa $f^{-1}\colon W \to V$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Teorema *Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e V ha dimensione finita allora anche W ha dimensione finita e $\dim W = \dim V$.*

Dunque due spazi vettoriali di dimensione differente non sono isomorfi. Uno spazio vettoriale di dimensione finita e uno di dimensione infinita non son isomorfi.

Teorema *Sia $f\colon V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim V = \dim W = n$ e A è la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W, allora sono equivalenti le condizioni:*

1. *f è suriettivo,*

2. *f è iniettivo,*

3. *f è un isomorfismo (cioè è biiettivo),*

4. $\det A \neq 0$.

Teorema *Siano V e W due spazi vettoriali aventi la stessa dimensione n. Allora V e W sono isomorfi.*

Corollario *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Notiamo che il teorema precedente non dice che ogni omomorfismo tra due spazi vettoriali V e W di dimensione uguale è un isomorfismo, ma, semplicemente, che esiste un isomorfismo tra V e W.

29.4 Esercizi

E.29.1 Sia $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a + b, c + d)$$

Stabilire se f è un isomorfismo.

E.29.2 Verificare che le condizioni:

$$\begin{aligned} f(1,2,1) &= x - x^2 \\ f(1,0,1) &= 2 + x + x^2 \\ f(0,0,1) &= x \end{aligned}$$

definiscono un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$. Stabilire se f è un isomorfismo.

E.29.3 Stabilire se l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) := (a + b, c + d, a + b + c + d, 2a - 3b + c - d),$$

è un isomorfismo.

E.29.4 Stabilire se l'omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4[x] \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

è un isomorfismo.

E.29.5 Sia $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici triangolari superiori e sia $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici triangolari inferiori. Determinare, se esiste, un isomorfismo

$$f\colon\ \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2) \to \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2).$$

29.5 Soluzioni degli esercizi

E.29.1 L'omomorfismo f non è un isomorfismo dal momento che $\dim \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) = 4$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

E.29.2 Poiché i vettori $(1,2,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$, le condizioni assegnate definiscono un unico omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$. Dal momento che $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo f potrebbe essere un isomorfismo. Per stabilirlo consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori $(1,2,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,0,1)$ e dalla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è invertibile e, dunque, f è un isomorfismo.

E.29.3 Dal momento che $\dim \mathbb{R}^4[x] = \dim \mathbb{R}^4$, l'omomorfismo f potrebbe essere un isomorfismo. Per stabilirlo consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante nullo e, dunque, f non è un isomorfismo.

E.29.4 Sì, infatti la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è la matrice identica.

E.29.5 Sappiamo che sia lo spazio $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2)$ che lo spazio $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$ hanno dimensione uguale a 3. Sono quindi isomorfi.

Per determinare un isomorfismo tra essi, scegliamo due loro basi. Consideriamo innanzitutto la base canonica di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che E_1, E_2, e E_4 formano una base di $\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2)$. Sappiamo poi che E_1, E_3, E_4 è una base di $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$.

Consideriamo quindi l'isomorfismo

$$f \colon \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(2) \to \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(2)$$

definito da:

$$f(E_1) = E_1,$$
$$f(E_2) = E_3,$$
$$f(E_4) = E_4.$$

Si verifica facilmente che si ha:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO 30

Endomorfismi

Vogliamo studiare quei particolari omomorfismi di spazi vettoriali in cui lo spazio di partenza e lo spazio di arrivo coincidono. Vedremo come rappresentare questi omomorfismi per mezzo di matrici e stabiliremo come variano le matrici rappresentative al variare delle basi scelte.

30.1 Endomorfismi

Cominciamo con la:

Definizione 30.1 Dato uno spazio vettoriale V, un endomorfismo di V è un omomorfismo $f\colon V \to V$. △

Un endomorfismo è quindi un particolare omomorfismo in cui spazio vettoriale di partenza e di arrivo coincidono. Possiamo dunque utilizzare per gli endomorfismi le stesse definizioni e gli stessi risultati dati nello studio degli omomorfismi. In particolare, dati due spazi vettoriali di dimensioni finita e scelta per ciascuno di essi una base, abbiamo visto che a ogni omomorfismo tra essi sia possibile associare una matrice e, viceversa, data una matrice di dimensioni opportune sia possibile associare a tale matrice un omomorfismo tra gli spazi vettoriali.

Nel caso in cui V abbia dimensione finita possiamo considerare gli endomorfismi di V e ripetere tali procedimenti. Dobbiamo scegliere una base per lo spazio di partenza (in questo caso V) e una base per lo spazio di arrivo (in questo caso ancora V). Potremmo ovviamente scegliere basi differenti. Ci interessa però studiare il caso in cui prendiamo la stessa base per V pensato sia come spazio di partenza, sia come spazio di arrivo. In questo caso abbiamo la:

Definizione 30.2 Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Fissata una base di V, formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, possiamo esprimere ciascun vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\
f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

La matrice di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

viene detta matrice **associata** all'endomorfismo (o matrice **rappresentativa** di) f rispetto alla base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ rispetto alla base formata da $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. △

Possiamo anche dare il procedimento inverso:

Definizione 30.3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Se

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è una matrice di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ chiamiamo endomorfismo **associato** alla matrice A rispetto alle basi fissate l'omomorfismo f definito dalle relazioni

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\
f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

vale a dire l'endomorfismo f la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi assegnate è esattamente A. △

Esempio 30.4 Consideriamo l'endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2) \coloneqq (3a + c) + (a + b)x + cx^2.$$

Se vogliamo ora determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica dobbiamo determinare le immagini dei vettori della base canonica e decomporli rispetto alla base canonica stessa. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 3 + x = 3 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\
f(x) &= x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2, \\
f(x^2) &= 1 + x^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2.
\end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è allora:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ora vogliamo rappresentare f rispetto a una base differente, ad esempio quella formata dai polinomi $p_1(x) := 1 + x + x^2$, $p_2(x) := 1 + x$ e $p_3(x) := 1$, calcoliamo le immagini di questi vettori. Ad esempio otteniamo:

$$f(p_1(x)) = 4 + 2x + x^2.$$

Dobbiamo ora decomporre il polinomio così ottenuto rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Con semplici calcoli si trova:

$$f(p_1(x)) = 1(1 + x + x^2) + 1(1 + x) + 2 \cdot 1.$$

Analogamente vediamo che

$$\begin{aligned} f(p_2(x)) &= 3 + 2x = 0(1 + x + x^2) + 2(1 + x) + 1 \cdot 1, \\ f(p_3(x)) &= 3 + x = 0(1 + x + x^2) + 1(1 + x) + 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ è la matrice

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base 30.5 Sia $f\colon \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da:

$$f(A) := A + {}^tA.$$

Determinare la matrice rappresentativa di f.

a. Rispetto alla base canonica:

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Rispetto alla base formata dalle matrici:

$$E_1' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_3' := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

30.2 Cambiamento di base

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che, cambiando base, cambia la matrice rappresentativa dell'endomorfismo. Ci chiediamo, in generale, come cambi tale matrice. Per poter rispondere a tale domanda dobbiamo dare la:

Definizione 30.6 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si considerino due basi di V: una formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, l'altra formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, ..., $\boldsymbol{e}'_n$. La matrice $M \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ la cui j-esima colonna è data dalle componenti del vettore $\boldsymbol{e}'_j$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ è detta **matrice di passaggio** dalla base formata da $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ alla base formata da $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, ..., $\boldsymbol{e}'_n$. △

Esempio 30.7 Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$, la sua base canonica:

$$q_1(x) := 1, q_2(x) := x, q_3(x) := x^2,$$

e la base formata dai polinomi:

$$p_1(x) := 1 + x + x^2, p_2(x) := 1 + x, p_3(x) := 1.$$

Per trovare la matrice M di passaggio dalla base canonica alla seconda base dobbiamo esprimere ciascuno dei polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ come combinazione lineare dei polinomi $q_1(x)$, $q_2(x)$ e $q_3(x)$. Abbiamo:

$$p_1(x) = 1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 1 \cdot q_3(x).$$

Dobbiamo allora scrivere i numeri 1, 1, 1 sulla prima colonna di M. Abbiamo poi:

$$\begin{aligned} p_2(x) =& 1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x), \\ p_3(x) =& 1 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x). \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di scrivere la matrice M:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

Teorema 30.8 *La matrice di passaggio M da una base di uno spazio vettoriale V a un'altra è invertibile.*

Dimostrazione Se M è la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$, le colonne di M danno le componenti di $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, ..., $\boldsymbol{e}'_n$ rispetto alla prima base. Per il teorema 17.36 il rango di M è allora uguale alla dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, ..., $\boldsymbol{e}'_n$: poiché questi formano una base per V abbiamo che $\operatorname{rk} M = \dim V$, cioè $\det M \neq 0$. ■

Esempio 30.9 Riprendiamo l'esempio 30.7. Supponiamo ora di voler determinare la matrice di passaggio M' dalla base formata dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ alla base canonica. Esprimiamo allora i polinomi della base canonica come combinazione lineare dei polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Questo richiede un po' più di calcoli rispetto al caso precedente. Poiché $q_1(x) = p_3(x)$ possiamo scrivere $q_1(x) = 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x)$. Riportiamo allora i numeri 0, 0 e 1 sulla prima colonna di M'. Per decomporre gli altri vettori sono necessari un po' più di calcoli. Ad esempio per decomporre $q_2(x)$ lo esprimiamo come combinazione lineare generica dei polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$:

$$x = h_1 \cdot (1 + x + x^2) + h_2 \cdot (1 + x) + h_3 \cdot 1.$$

Espandendo questa uguaglianza troviamo

$$x = (h_1 + h_2 + h_3) + (h_1 + h_2)x + h_1 x^2.$$

Deve dunque essere $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, $h_1 + h_2 = 1$ e $h_1 = 0$ da cui ricaviamo facilmente che $h_1 = 0$, $h_2 = 1$ e $h_3 = -1$. Riportiamo allora i numeri 0, 1 e -1 sulla seconda colonna di M'. In maniera analoga possiamo decomporre $q_3(x)$ e troviamo così $q_3(x) = 1 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$. Riportiamo allora i numeri 1, -1 e 0 sulla terza colonna di M':

$$M' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ora effettuiamo il prodotto delle matrici M e M' troviamo che $MM' = I$, cioè che $M' = M^{-1}$. △

Il risultato trovato nell'esempio precedente ha, in realtà, validità generale. Diamo, senza dimostrazione il:

Teorema 30.10 *Date due basi di uno spazio vettoriale V sia M la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda. La matrice di passaggio dalla seconda base alla prima è allora M^{-1}.*

Esercizio di base 30.11 Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, qual è la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ (cioè alla base stessa)?

Diamo ora, senza dimostrazione, la relazione intercorrente tra le diverse matrici rappresentative di un endomorfismo.

Teorema 30.12 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Sia M la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Si ha:*

$$A' = M^{-1}AM.$$

Esempio 30.13 Consideriamo nuovamente l'endomorfismo

$$f \colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$$

definito da:

$$f(a + bx + cx^2) := (3a + c) + (a + b)x + cx^2.$$

Nell'esempio 30.4 abbiamo calcolato le matrici rappresentative di f rispetto a due diverse basi di $\mathbb{R}^3[x]$. Rispetto alla base canonica f si rappresenta con la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base formata dai polinomi:

$$p_1(x) := 1 + x + x^2, p_2(x) := 1 + x, p_3(x) := 1,$$

la matrice rappresentativa di f è:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dall'esempio 30.7 sappiamo inoltre che la matrice di passaggio dalla base canonica alla base formata dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ è la matrice:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque $A' = M^{-1}AM$: si potrebbero svolgere esplicitamente i calcoli per controllare questa relazione. △

Esempio 30.14 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo che rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ ($\boldsymbol{e}_1 := (1, 0)$ e $\boldsymbol{e}_2 := (0, 1)$) si rappresenta con la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo determinare la matrice rappresentativa A' di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1 := (1, 2)$ e $\boldsymbol{e}'_2 := (1, -1)$.

Utilizziamo il teorema 30.12. Determiniamo la matrice di passaggio dalla base canonica alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1 := (1, 2)$ e $\boldsymbol{e}'_2 := (1, -1)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= 1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= 1\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Dunque:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo l'inversa di M troviamo:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ora $A' = M^{-1}AM$ cioè:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora calcolare nuovamente A', senza utilizzare il teorema 30.12, ma utilizzando direttamente la definizione di matrice rappresentativa. Per far questo dobbiamo determinare innanzitutto $f(\boldsymbol{e}'_1)$ e $f(\boldsymbol{e}'_2)$. Le componenti di $\boldsymbol{e}'_1$ rispetto alla base canonica sono $(1, 2)$. Quindi possiamo ottenere le componenti di $f(\boldsymbol{e}'_1)$ rispetto alla base canonica dal prodotto:

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}.$$

Dunque $f(\boldsymbol{e}'_1) = -2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 = (-2, 3)$. Dobbiamo ora decomporre questo vettore rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1$ e $\boldsymbol{e}'_2$. Svolgendo i calcoli si trova:

$$f(\boldsymbol{e}'_1) = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_1 - \frac{7}{3}\boldsymbol{e}'_2.$$

Analogamente si trova:

$$f(\boldsymbol{e}'_2) = \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}'_2.$$

Dunque:

$$A' = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Ovviamente il risultato trovato è lo stesso che abbiamo ottenuto utilizzando il teorema 30.12. △

Esercizio di base 30.15 Determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f dato nell'esempio 30.14 rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}''_1 \coloneqq (1, -1)$ e $\boldsymbol{e}''_2 \coloneqq (1, 0)$.

Il teorema 30.12 ci dice che se A e B rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse allora esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^{-1}AM$. Ciò suggerisce la:

Definizione 30.16 Siano date due matrici A e B appartenenti a $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$. La matrice B si dice **simile** alla matrice A se esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $B = M^{-1}AM$ (ricordiamo che $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici invertibili di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$). △

Esercizio di base 30.17 Dimostrare che:

1. Ogni matrice quadrata A è simile a sé stessa.

2. Se la matrice B è simile alla matrice A allora la matrice A è simile alla matrice B.

3. Se la matrice A è simile alla matrice B e la matrice B è simile alla matrice C allora la matrice A è simile alla matrice C. △

30.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.30.5

a. Si ha:

$$\begin{aligned}
f(E_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4, \\
f(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + E_2 + E_3 + 0E_4, \\
f(E_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + E_2 + E_3 + 0E_4, \\
f(E_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 2E_4.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Si ha:

$$\begin{aligned}
f(E_1') &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1' + 0E_2' + 0E_3' + 0E_4', \\
f(E_2') &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1' + 0E_2' + 0E_3' + 0E_4', \\
f(E_3') &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_1' + 0E_2' + 2E_3' + 0E_4', \\
f(E_4') &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1' + 0E_2' + 0E_3' + 2E_4'.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto a questa nuova base è:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che A' è una matrice diagonale, mentre A non lo è.

EB.30.11 È la matrice identica. Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{e}_n, \\
\boldsymbol{e}_2 &= 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{e}_n, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{e}_n &= 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 1\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

Scrivendo sulla prima colonna le componenti di $\boldsymbol{e}_1$, sulla seconda quelle di $\boldsymbol{e}_2$ e così via, otteniamo esattamente la matrice identica.

EB.30.15 La matrice di passaggio dalla base canonica alla base di $\mathbb{R}^2$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1''$ e $\boldsymbol{e}_2''$ è:

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A'' rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1''$ e $\boldsymbol{e}_2''$ è allora:

$$A'' = N^{-1}AN = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente calcoliamo $f(\boldsymbol{e}_1'')$ e $f(\boldsymbol{e}_2'')$ e decomponiamoli rispetto alla base $\boldsymbol{e}_1''$ e $\boldsymbol{e}_2''$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1'') &= \boldsymbol{e}_1 = 0\boldsymbol{e}_2'' + 1\boldsymbol{e}_2'', \\ f(\boldsymbol{e}_2'') &= \boldsymbol{e}_2 = -1\boldsymbol{e}_1'' + 1\boldsymbol{e}_2''. \end{aligned}$$

EB.30.17

1. Sappiamo che $I^{-1} = I$. Notiamo allora che si ha $A = I^{-1}AI$. Dunque A è simile a sé stessa.

2. Sappiamo che esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $B = M^{-1}AM$. Dobbiamo trovare una matrice $N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $A = N^{-1}AN$. Notiamo che moltiplicando la relazione $B = M^{-1}AM$ a sinistra per M e a destra per M^{-1} otteniamo:

$$MBM^{-1} = MM^{-1}AMM^{-1},$$

ovvero $MBM^{-1} = A$. Ma allora se scegliamo come matrice N la matrice M^{-1}, abbiamo che $A = N^{-1}AN$, che è quel che volevamo.

3. Sappiamo che esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $B = M^{-1}AM$, e una matrice $N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $C = N^{-1}BN$. Combinando le due relazioni che abbiamo otteniamo:

$$C = N^{-1}(M^{-1}AM)N = N^{-1}M^{-1}AMN.$$

Poiché $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ possiamo dunque scrivere:

$$C = (MN)^{-1}A(MN),$$

e, dunque, la matrice C è simile alla matrice A.

30.4 Sunto

Endomorfismi

Definizione Dato uno spazio vettoriale V, un endomorfismo di V è un omomorfismo $f \colon V \to V$. △

Definizione Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Fissata una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, possiamo esprimere ciascun vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

La matrice di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

viene detta matrice **associata** all'endomorfismo (o matrice **rappresentativa** di) f rispetto alla base $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$ rispetto alla base formata da $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. △

Definizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Se

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è una matrice di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ chiamiamo endomorfismo **associato** alla matrice A rispetto alle basi fissate l'omomorfismo f definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

vale a dire l'endomorfismo f la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi assegnate è esattamente A. △

Cambiamento di base

Cambiando base, cambia la matrice rappresentativa dell'endomorfismo. Per dare la relazione che lega le varie matrici rappresentative di un endomorfismo diamo la:

Definizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si considerino due basi di V: una formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, l'altra formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. La matrice $M \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ la cui j-esima colonna è data dalle componenti del vettore $\boldsymbol{e}'_j$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ è detta **matrice di passaggio** dalla base formata da $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata da $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. △

Teorema *La matrice di passaggio M da una base di uno spazio vettoriale V a un'altra è invertibile.*

Teorema *Date due basi di uno spazio vettoriale V sia M la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda. La matrice di passaggio dalla seconda base alla prima è allora M^{-1}.*

Teorema *La matrice di passaggio M dalla base di uno spazio vettoriale V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ è invertibile. Inoltre la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ è M^{-1}.*

Teorema *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Sia M la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Si ha:*

$$A' = M^{-1}AM.$$

Definizione Siano date due matrici A e B appartenenti a $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$. Diciamo che la matrice B è **simile** alla matrice A se esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $B = M^{-1}AM$ (ricordiamo che $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici invertibili di $\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$). △

Le matrici rappresentative di uno stesso endomorfismo sono tutte simili fra loro.

30.5 Esercizi

E.30.1 Verificare che $\boldsymbol{e}'_1 \coloneqq (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{e}'_2 \coloneqq (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{e}'_3 \coloneqq (1, 1, 1)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$.

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}'_1) &= (1, 1, 1), \\ f(\boldsymbol{e}'_2) &= (1, 1, 1), \\ f(\boldsymbol{e}'_3) &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ e $\boldsymbol{e}'_3$ e la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

E.30.2 Determinare la matrice rappresentativa A'' dell'endomorfismo f dell'esercizio precedente rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}''_1 \coloneqq (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}''_2 \coloneqq (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}''_3 \coloneqq (0, 0, 1)$.

E.30.3 Consideriamo l'endomorfismo D di $\mathbb{R}^3[x]$ che associa a un polinomio la sua derivata. Determinare la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base canonica e la matrice A' rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata dai polinomi $p_1(x) \coloneqq 1$, $p_2(x) \coloneqq 1 + x$, $p_3(x) \coloneqq 1 + x + x^2$.

E.30.4 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base formata dai vettori:

$$\boldsymbol{e}_1 \coloneqq (1, 1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 \coloneqq (0, 1, 2, 0), \boldsymbol{e}_3 \coloneqq (0, 1, 1, -1), \boldsymbol{e}_4 \coloneqq (0, 2, 0, 1),$$

sia

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare nucleo e immagine di f.

E.30.5 Sia f l'endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione 3 che rispetto a una base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ si rappresenta con la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & k-1 \\ k & k & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è un isomorfismo;

b. determinare nucleo e immagine di f in dipendenza da k.

30.6 Soluzioni degli esercizi

E.30.1 Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1') &= 0\boldsymbol{e}_1' + 0\boldsymbol{e}_2' + 1\boldsymbol{e}_3', \\ f(\boldsymbol{e}_2') &= 0\boldsymbol{e}_1' + 0\boldsymbol{e}_2' + 1\boldsymbol{e}_3', \\ f(\boldsymbol{e}_3') &= 0\boldsymbol{e}_1' + 0\boldsymbol{e}_2' + 1\boldsymbol{e}_3'. \end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ e $\boldsymbol{e}_3'$ è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica possiamo determinare la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ e $\boldsymbol{e}_3'$ alla base canonica. Dobbiamo cioè esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ e $\boldsymbol{e}_3'$. Svolgendo i calcoli si trova:

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1' + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2' + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3', \\ (0,1,0) &= -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1' + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2' + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3', \\ (0,0,1) &= \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1' - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2' + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3'. \end{aligned}$$

Dunque la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ e $\boldsymbol{e}_3'$ alla base canonica è:

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è, dunque $A' = M^{-1}AM$. Calcolando in maniera esplicita l'inversa di M ed effettuando il prodotto matriciale si trova che:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per evitare di calcolare la matrice inversa della matrice M, possiamo, in alternativa, utilizzare le espressioni che danno i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori e'_1, e'_2 e e'_3, e ottenere:

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= \frac{1}{3}f(e'_1) + \frac{1}{3}f(e'_2) + \frac{1}{3}f(e'_3) \\
&= \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (1,1,1), \\
f(0,1,0) &= -\frac{2}{3}f(e'_1) + \frac{1}{3}f(e'_2) + \frac{1}{3}f(e'_3) \\
&= -\frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (0,0,0), \\
f(0,0,1) &= \frac{1}{3}f(e'_1) - \frac{2}{3}f(e'_2) + \frac{1}{3}f(e'_3) \\
&= \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (0,0,0),
\end{aligned}$$

E.30.2 Si trova:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.30.3 Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.30.4 Calcoliamo il rango di A. Riducendo a scalini la matrice A troviamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa è una matrice a scalini. Gli scalini sono in posizione 1, 2 e 3. Dunque l'immagine di f è generata dai vettori le cui componenti rispetto alla base formata dai vettori e_1, e_2, e_3, e_4 sono date dalla prima, seconda e terza colonna di A. Dunque l'immagine di f è generata dai vettori:

$$\begin{aligned}
1e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4 &= (1,2,1,-1), \\
0e_1 + 1e_2 + 2e_3 + 0e_4 &= (0,3,4,-2), \\
0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4 &= (0,2,0,1).
\end{aligned}$$

Per trovare il nucleo di f risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice A. Abbiamo già ridotto a scalini la matrice A, quindi possiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono $(-2t, -t, -t, t)$. Ponendo, ad esempio, $t = 1$, troviamo che una base per l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo è data da $(-2, -1, -1, 1)$. Una base del nucleo è allora fornita dal vettore:

$$-2e_1 - 1e_2 - 1e_3 + 1e_4 = (-2, -2, -3, 2).$$

E.30.5

a. L'endomorfismo f è un isomorfismo se e solo se la matrice che lo rappresenta rispetto a una qualsiasi base è invertibile. Ora

$$\det A = -k^3 + 2k^2 - k.$$

Questo determinante si annulla per $k = 0,\ 1$. Dunque f è un isomorfismo per $k \neq 0,\ 1$.

b. Se $k \neq 0,\ 1$, si ha ovviamente $\ker f = \{0\}$, $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Consideriamo ora i casi $k = 0$ e $k = 1$.

Se $k = 0$ la matrice di f diviene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2 (sappiamo già che non può avere rango 3, e le prime due colonne sono linearmente indipendenti). Dunque, una base per $f(\mathbb{R}^3)$ è formata dai vettori le cui componenti rispetto a $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ sono date dalle prime due colonne di A: tali vettori sono $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_1$. Per determinare $\ker f$ consideriamo un vettore le cui componenti rispetto alla base assegnata sono (x, y, z). Questo vettore appartiene a $\ker f$ se e solo se:

$$\begin{cases} \quad y \quad = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{cases}$$

(le equazioni corrispondono alle righe di A, ne abbiamo considerate solo 2 indipendenti perché sappiamo già che A ha rango 2). Risolvendo il sistema troviamo $y = 0$, $x = z$. Dunque

$$\ker f = \{t\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

cioè una base per $\ker f$ è formata da $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$.

Se $k = 1$ la matrice di f diviene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 1. Dunque, una base per $f(\mathbb{R}^3)$ è formata dal vettore le cui componenti rispetto a $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ sono date dalle prima colonna di A: questo vettore è $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Per determinare il nucleo di f consideriamo un vettore le cui componenti rispetto alla base assegnata sono (x, y, z). Questo vettore appartiene a $\ker f$ se e solo se: $x + y = 0$ (le equazioni corrispondono alle righe di A, ne abbiamo considerate solo una perché A ha rango 1). Dunque

$$\ker f = \{t\boldsymbol{e}_1 - t\boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3 \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

CAPITOLO 31

Autovalori e autovettori

In questo capitolo ci chiediamo sotto quali condizioni un endomorfismo di uno spazio vettoriale possa rappresentarsi per mezzo di una matrice diagonale. Questo ci conduce alla definizione di autovalori e autovettori di un endomorfismo.

31.1 Autovalori e autovettori

Nel capitolo precedente abbiamo dato alcuni esempi di endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione finita e abbiamo visto come sia possibile, una volta fissata una base per lo spazio vettoriale, rappresentarli tramite matrici quadrate. Ci chiediamo quando sia possibile rappresentare un endomorfismo per mezzo di una matrice di forma particolarmente semplice, ad esempio una matrice diagonale. Cominciamo con un esempio:

Esempio 31.1 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2[x]$ definito da

$$f(a + bx) \coloneqq 2b + (3b - a)x.$$

Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2[x]$ questo endomorfismo si rappresenta con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

che non è diagonale. Se però consideriamo la base di $\mathbb{R}^2[x]$ formata dai due polinomi $p_1(x) \coloneqq 1 + x$ e $p_2(x) \coloneqq 2 + x$, vediamo che si ha

$$f(p_1(x)) = 2 + 2x = 2p_1(x) + 0p_2(x),$$

e

$$f(p_2(x)) = 2 + x = 0p_1(x) + 1p_2(x).$$

Dunque, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ è la matrice diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

△

Lo stesso endomorfismo potrà allora essere rappresentato rispetto ad alcune basi con matrici diagonali e rispetto ad altre con matrici non diagonali. Ovviamente un certo endomorfismo potrebbe non rappresentarsi con una matrice diagonale rispetto ad alcuna base. Questo porta alla definizione:

Definizione 31.2 Un endomorfismo $f\colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice diagonale. △

Secondo questa definizione l'endomorfismo dato nell'esempio 31.1 è diagonalizzabile. Sottolineiamo ancora che dicendo che f è diagonalizzabile non diciamo che f si rappresenta con una matrice diagonale rispetto a **tutte** le possibili basi dello spazio vettoriale ma solo rispetto ad alcune (almeno una).

Ci chiediamo come sia possibile stabilire se un certo endomorfismo si possa rappresentare con una matrice diagonale e, in caso affermativo come possiamo determinare una base rispetto a cui avvenga ciò. Riguardando l'esempio precedente notiamo che $f(p_1(x))$ è un multiplo di $p_1(x)$ e analogamente $f(p_2(x))$ è un multiplo di $p_2(x)$. È abbastanza facile intuire che una simile condizione si può estendere al caso di dimensione qualunque, e dimostrare così la:

Proposizione 31.3 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Si consideri una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Allora la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base è diagonale se e solo se $f(\boldsymbol{e}_i)$ è un multiplo di $\boldsymbol{e}_i$ per $1 \leq i \leq n$, vale a dire se e solo se esistono scalari λ_1, λ_2, ..., λ_n tali che $f(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ per $1 \leq i \leq n$. In tal caso la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ è la matrice:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Per stabilire se un endomorfismo f è diagonalizzabile dobbiamo allora stabilire se esistono dei vettori $\boldsymbol{v}$ tali che $f(\boldsymbol{v})$ sia multiplo di $\boldsymbol{v}$. Questo conduce alla:

Definizione 31.4 Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, un vettore $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si dice **autovettore** di f con **autovalore** λ se si ha:

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}.$$

In tal caso diciamo che λ è **autovalore** di f. △

Esercizio di base 31.5 Lo stesso vettore $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ può essere un autovettore di f rispetto a due autovalori diversi?

Osservazione 31.6 Nella definizione abbiamo richiesto che $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Infatti se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ si ha, banalmente,

$$f(\boldsymbol{0}) = \lambda \boldsymbol{0},$$

qualunque sia il numero reale λ. Dunque se nella definizione non avessimo chiesto $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, ogni numero reale λ sarebbe autovalore di f. △

Anche se la definizione di autovettore ci è stata suggerita dallo studio degli endomorfismi diagonalizzabili di spazi vettoriali di dimensione finita, essa conserva senso per endomorfismi di spazi vettoriali non di dimensione finita (in tal caso però non parliamo di endomorfismi diagonalizzabili perché non possiamo rappresentare un endomorfismo con una matrice).

Esempio 31.7 Sia $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'endomorfismo definito da

$$f(p(x)) \coloneqq xD(p(x))$$

dove D è l'operazione di derivazione. Abbiamo cioè:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \coloneqq x(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}).$$

Si lascia per esercizio la verifica che questo sia effettivamente un endomorfismo. Notiamo che un polinomio omogeneo a_ix^i di grado i è un autovettore di f con autovalore i infatti:

$$f(a_ix^i) = x(ia_ix^{i-1}) = ia_ix^i. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 31.8 Sia dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) \coloneqq (2x + 2y + z, y, 0).$$

Stabilire per ciascuno dei vettori

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 \coloneqq (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_3 \coloneqq (1, 0, -2), \quad \boldsymbol{v}_4 \coloneqq (0, 0, 0), \qquad \triangle$$

se è un autovettore di f oppure no. In caso affermativo determinare l'autovalore corrispondente.

Prima di tornare al caso che ci interessa, cioè alla determinazione di condizioni per la diagonalizzabilità di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, diamo un risultato che si applica a un endomorfismo di uno spazio vettoriale qualunque, di dimensione finita oppure no:

Teorema 31.9 *Sia dato un endomorfismo $f\colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V e sia λ un autovalore di f. L'insieme*

$$E(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

*è un sottospazio vettoriale di V. Notiamo che $E(\lambda)$ è formato dagli autovettori di f relativi all'autovalore λ e dal vettore nullo. Per questo motivo $E(\lambda)$ viene detto **autospazio** di f relativo all'autovalore λ.*

Dimostrazione Ovviamente $E(\lambda)$ è non vuoto perché contiene il vettore nullo.

Dobbiamo mostrare che se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono vettori di $E(\lambda)$ allora anche la loro somma appartiene a $E(\lambda)$. Sappiamo cioè che $f(\boldsymbol{v}_1) = \lambda\boldsymbol{v}_1$ e $f(\boldsymbol{v}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_2$ e dobbiamo mostrare che $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$. Infatti:

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2).$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo mostrare che se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di $E(\lambda)$ e k è uno scalare allora anche il prodotto $k\boldsymbol{v}$ appartiene a $E(\lambda)$. Sappiamo cioè che $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ e dobbiamo mostrare che $f(k\boldsymbol{v}) = \lambda(k\boldsymbol{v})$. Infatti:

$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) = k\lambda\boldsymbol{v} = \lambda k\boldsymbol{v}. \qquad \blacksquare$$

Notiamo che, per definizione di autovettore, un autospazio non può mai essere costituito dal solo vettore nullo.

Esercizio di base 31.10 Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V mostrare che 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo. In tal caso mostrare che $E(0)$ è il nucleo di f.

Torniamo adesso alla determinazione di condizioni per la diagonalizzabilità di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Con la terminologia appena introdotta la proposizione 31.3 può essere reinterpretata nel modo seguente:

Proposizione 31.11 *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di f.*

Questa proposizione è però semplicemente una riformulazione della proposizione 31.3: non ci dice come stabilire se esiste una base formata da autovettori né tantomeno come determinare esplicitamente una tale base, ammesso che esista.

31.2 Polinomio caratteristico

Determiniamo innanzitutto un metodo per la determinazione degli autovalori e degli autovettori di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Consideriamo un esempio:

Esempio 31.12 Sia $f\colon \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$ l'endomorfismo che associa al polinomio:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

il polinomio

$$(a_0 + a_1) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (a_0 + 2a_1 - a_2)x^2 + a_3x^3.$$

Consideriamo una base di $\mathbb{R}^4[x]$: per esempio la base canonica formata dai polinomi $p_1(x) := 1$, $p_2(x) := x$, $p_3(x) := x^2$, $p_4(x) := x^3$. Rispetto a tale base l'endomorfismo f si rappresenta con la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora determinare polinomi non nulli:

$$p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

tali che $f(p(x)) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Se consideriamo il vettore colonna:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

delle componenti di $p(x)$ rispetto alle base canonica, sappiamo che le componenti di $f(p(x))$ rispetto alle base canonica sono:

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Dunque $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo questo sistema più esplicitamente:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = \lambda a_0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = \lambda a_1 \\ a_0 + 2a_1 - a_2 = \lambda a_2 \\ a_3 = \lambda a_3 \end{cases}$$

Possiamo allora facilmente riscrivere il sistema così

$$\begin{cases} (1-\lambda)a_0 + a_1 = 0 \\ (1-\lambda)a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + (-1-\lambda)a_2 = 0 \\ (1-\lambda)a_3 = 0 \end{cases}$$

Se riscriviamo di nuovo in forma matriciale abbiamo così il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo può essere descritto in forma sintetica:

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove I è la matrice identica di ordine 4. Abbiamo dunque un sistema omogeneo di 4 equazioni nelle 4 incognite a_1, a_2, a_3 e a_4. Ricordiamo che stiamo cercando autovettori, che sono vettori non nulli. Dunque stiamo cercando soluzioni non banali di questo sistema omogeneo. Il sistema, essendo omogeneo, è sempre risolubile. Nel caso in cui $\det(A - \lambda I) \neq 0$ il sistema è Crameriano è ha, dunque, un'unica soluzione: quella banale. Nel caso in cui $\det(A - \lambda I) = 0$ il rango della matrice è minore del numero delle incognite e, quindi, esistono infinite soluzioni: in particolare esistono soluzioni diverse da quella banale. Ad esempio se poniamo $\lambda = 1$ si vede facilmente che la matrice $A - 1I$ ha determinante nullo, e, dunque, il sistema ha soluzioni non banali, cioè 1 è autovalore di f; se invece poniamo $\lambda = 2$ si vede che $A - 2I$ ha determinante non nullo: il sistema ha allora solo la soluzione banale, cioè 2 non è autovalore di f.

Per determinare gli autovalori di f dobbiamo dunque cercare gli scalari λ tali che $\det(A - \lambda I) = 0$: gli autovalori di f sono cioè le soluzioni dell'equazione $\det(A - xI) = 0$ nell'incognita x. Scriviamo esplicitamente questa equazione:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Se sviluppassimo questa equazione otterremmo un'equazione di quarto grado in x. Lo faremo più avanti. △

Questo esempio suggerisce che, dato un qualunque endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, per determinare gli autovalori di f dobbiamo determinare le soluzioni nell'incognita x dell'equazione:

$$\det(A - xI) = 0$$

dove A è la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Questa equazione, le cui soluzioni danno gli autovalori di f sembra dipendere da A, cioè dalla base di V scelta per rappresentare f. Se prendiamo un'altra base di V otteniamo una matrice A' rappresentativa di f in generale diversa da A. Otteniamo così una nuova equazione:

$$\det(A' - xI) = 0$$

le cui soluzioni sono ancora gli autovalori di f. In realtà questa è proprio la stessa equazione ottenuta in precedenza. Diamo infatti la:

Proposizione 31.13 *Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V e sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto a un'altra base di V. Allora si ha:*

$$\det(A' - xI) = \det(A - xI).$$

Dimostrazione Sappiamo che esiste una matrice invertibile M tale che

$$A' = M^{-1}AM.$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \det(A' - xI) &= \det(M^{-1}AM - xI) = \det(M^{-1}AM - M^{-1}(xI)M) \\ &= \det(M^{-1}(A - xI)M) = \det M^{-1} \det(A - xI) \det M \\ &= \det(A - xI). \end{aligned}$$

Si noti che nella catena di uguaglianze abbiamo utilizzato il semplice fatto che $I = M^{-1}IM$, il teorema di Binet e il fatto che $\det M^{-1} = (\det M)^{-1}$. ■

Si può facilmente dimostrare che $\det(A - xI)$ è un polinomio in x di grado uguale all'ordine di A (cioè alla dimensione di V). La proposizione 31.13 ci permette allora di dare la:

Definizione 31.14 Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Chiamiamo **polinomio caratteristico** di f il polinomio

$$p_f(x) \coloneqq \det(A - xI),$$

di grado n nell'incognita x. △

Questa definizione è sensata perché abbiamo dimostrato che $\det(A - xI)$ non dipende dalla matrice rappresentativa scelta.

Esercizio di base 31.15 Sia $D\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ l'endomorfismo che associa a un polinomio la sua derivata. Determinare gli autovalori di D.

Ricalcando la discussione dell'esempio 31.12 possiamo allora dimostrare il:

Teorema 31.16 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico di f.*

Riprendiamo adesso l'esempio 31.12 e determiniamo esplicitamente autovalori e autovettori di f. Il polinomio caratteristico di f è:

$$p_f(x) \coloneqq \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Possiamo, ad esempio, sviluppare questo determinante rispetto all'ultima riga. Troviamo così:

$$p_f(x) = (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1 & 2 & -1-x \end{vmatrix}.$$

Ricordiamo che noi dovremo trovare le radici del polinomio caratteristico $p_f(x)$. Se allora, proseguendo nell'ulteriore sviluppo di questo determinante terremo raccolto il termine $1-x$, avremo immediatamente una radice del polinomio (cioè 1). Facendo i calcoli si trova quindi:

$$p_f(x) = (1-x)(-x^3 + x^2 - x).$$

Si ha allora:

$$p_f(x) = -x(1-x)(x^2 - x + 1).$$

Le radici di questo polinomio sono allora 0 e 1 (si noti che il discriminante di $x^2 - x + 1$ è negativo). Dunque gli autovalori di f sono 0 e 1. Vogliamo ora determinare gli autospazi relativi a questi autovalori. Cominciamo con il determinare l'autospazio relativo a 1. Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo

$$(A - 1I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nelle incognite a_0, a_1, a_2, a_3. Questo sistema si scrive esplicitamente come:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo questo sistema troviamo:

$$\begin{cases} a_0 = 2t \\ a_1 = 0 \\ a_2 = t \\ a_3 = t \end{cases}$$

al variare del parametro t in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio relativo all'autovalore 1 è:

$$E(1) = \{2t + tx^2 + tx^3 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Notiamo in particolare che $\dim E(1) = 1$ e che $2 + x^2 + x^3$ costituisce una base di $E(1)$.

Calcoliamo ora l'autospazio relativo a 0. Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nelle incognite a_0, a_1, a_2, a_3. Questo sistema si scrive esplicitamente come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo questo sistema troviamo che:

$$E(0) = \{-t + tx + tx^2 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Notiamo che anche $\dim E(0) = 1$ e che $-1 + x + x^2$ costituisce una base di $E(0)$.

Il procedimento utilizzato nella determinazione degli autospazi ci suggerisce la:

Proposizione 31.17 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Se λ è un autovalore di f, allora si ha:*

$$\dim E(\lambda) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda I).$$

Dimostrazione L'autospazio $E(\lambda)$ si ottiene infatti considerando i vettori le cui componenti rispetto alla base considerata di V sono soluzioni del sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$. La dimensione dello spazio delle soluzioni di questo sistema è esattamente $n - \operatorname{rk}(A - \lambda I)$. ∎

Osservazione 31.18 Per definizione un autospazio $E(\lambda)$ contiene vettori diversi dal vettore nullo. Se risolvendo il sistema omogeneo necessario alla determinazione di $E(\lambda)$ troviamo solo la soluzione banale, allora questo significa che abbiamo sbagliato a risolvere il sistema o che il valore λ non è un autovalore (e quindi abbiamo sbagliato a calcolare il polinomio caratteristico o a determinare le sue radici). △

Esercizio di base 31.19 Sia $D\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ l'endomorfismo che associa a un polinomio la sua derivata, considerato nell'esercizio di base 31.15. Determinare gli autovettori di D.

31.3 Molteplicità di un autovalore

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che gli autovalori di un endomorfismo sono le radici di un polinomio. Per comodità del lettore richiamiamo allora alcuni risultati riguardanti le radici dei polinomi.

Teorema 31.20 *Sia $p(x)$ un polinomio nell'incognita x. Il numero reale a è radice del polinomio $p(x)$ se e solo se $x - a$ divide $p(x)$.*

Consideriamo un polinomio non nullo $p(x)$ di grado n. Se a è una radice di $p(x)$, il teorema precedente ci dice che $p(x) = (x-a)q(x)$ con $q(x)$ polinomio di grado di $n-1$. Consideriamo ora $q(x)$: potremmo avere $q(a) \neq 0$, nel qual caso $x - a$ non dividerebbe $q(x)$; oppure potrebbe essere $q(a) = 0$, nel qual caso a sua volta sarebbe $q(x) = (x - a)s(x)$ con $s(x)$ polinomio in x di grado $n - 2$. Dunque avremmo $p(x) = (x-a)q(x) = (x-a)(x-a)s(x) = (x-a)^2 s(x)$. Se proseguiamo il procedimento a un certo punto arriviamo a scrivere $p(x) = (x - a)^m k(x)$ e $k(a) \neq 0$ (notiamo che il polinomio $k(x)$ potrebbe essere una costante, cioè avere grado nullo). Questo giustifica la:

Definizione 31.21 Sia a una radice di un polinomio $p(x)$. Diciamo che a è radice di $p(x)$ con **molteplicità** m se $p(x) = (x - a)^m k(x)$ con $k(a) \neq 0$. In altri termini, a ha molteplicità m se $(x - a)^m$ divide $p(x)$ ma $(x - a)^{m+1}$ non divide $p(x)$. △

Esempio 31.22 Consideriamo il polinomio

$$p(x) := 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x + 4.$$

Notiamo che $p(1) = 0$. Dunque $p(x)$ è divisibile per $x - 1$. Effettuando la divisione troviamo

$$p(x) = (x - 1)(2x^4 + 4x^3 - 2x - 4).$$

Anche il polinomio $2x^4 + 4x^3 - 2x - 4$ si annulla per $x = 1$. Dunque dividendo ancora per $x - 1$ si trova

$$p(x) = (x - 1)^2(2x^3 + 6x^2 + 6x + 4).$$

Il polinomio $2x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ non si annulla per $x = 1$ e, pertanto la radice 1 ha molteplicità 2. △

Supponiamo allora di avere un polinomio $p(x)$ di grado n e supponiamo che questo abbia le radici distinte a_1, a_2, ..., a_r di molteplicità rispettive m_1, m_2, ..., m_r. Allora il polinomio può scriversi come

$$p(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_r)^{m_r} q(x).$$

Poiché $(x - a_i)^{m_i}$ ha, ovviamente, grado m_i, abbiamo la:

Proposizione 31.23 *Se un polinomio $p(x)$ di grado n ha le radici distinte a_1, a_2, ..., a_r di molteplicità rispettive m_1, m_2, ..., m_r allora*

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n.$$

Esempio 31.24 Riprendiamo il polinomio dell'esempio 31.22. Abbiamo visto che

$$p(x) = (x - 1)^2(2x^3 + 6x^2 + 6x + 4).$$

Notiamo che $2x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ si annulla per $x = -2$ ed è quindi divisibile per $x + 2$. Effettuando la divisione troviamo

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 2)(2x^2 + 2x + 2).$$

Il polinomio $2x^2 + 2x + 2$ non si annulla per $x = -2$ (anzi non si annulla per nessun numero reale). Pertanto la molteplicità di -2 è 1. Dunque il polinomio $p(x)$ ha la radice 1 di molteplicità 2 e la radice -2 di molteplicità 1. La somma delle molteplicità è 3 che è inferiore al grado del polinomio $p(x)$. △

Possiamo allora dare la:

Definizione 31.25 Un polinomio $p(x)$ di grado n si dice **totalmente riducibile** se si può scrivere come prodotto di polinomi di primo grado. △

Dalla definizione segue facilmente il:

Teorema 31.26 *Sia $p(x)$ un polinomio di grado n e siano a_1, a_2, ..., a_r le radici distinte di $p(x)$ aventi molteplicità rispettive m_1, m_2, ..., m_r. Il polinomio $p(x)$ è totalmente riducibile se e solo se*

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n.$$

Applichiamo ora tutto ciò al caso degli autovalori di un endomorfismo.

Definizione 31.27 Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f. Diciamo che λ ha **molteplicità** m e scriviamo $\mathrm{m}_f(\lambda) = m$ se λ ha molteplicità m come radice del polinomio caratteristico di f. △

Abbiamo immediatamente la:

Proposizione 31.28 *Se λ_1, λ_2, ..., λ_r sono gli autovalori distinti di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale di dimensione n si ha*

$$\mathrm{m}_f(\lambda_1) + \mathrm{m}_f(\lambda_2) + \dots + \mathrm{m}_f(\lambda_r) \leq n.$$

In particolare f ha al più n autovalori distinti.

Il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile se e solo se

$$\mathrm{m}_f(\lambda_1) + \mathrm{m}_f(\lambda_2) + \dots + \mathrm{m}_f(\lambda_r) = n.$$

Diamo ora un risultato molto importante

Teorema 31.29 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f. Si ha*

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq \mathrm{m}_f(\lambda).$$

DIMOSTRAZIONE La prima disuguaglianza è banale: abbiamo già osservato che, per definizione, un autospazio contiene vettori non nulli e, dunque, la sua dimensione è maggiore di 0. La parte significativa del teorema è allora la seconda disuguaglianza.

Sia allora λ un autovalore di f e sia r la dimensione di $E(\lambda)$. Dobbiamo mostrare che la molteplicità di λ è almeno r. Prendiamo una base di $E(\lambda)$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ e completiamo questa base a una base di V (si veda il lemma 17.15). Otteniamo così una base $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ di V i cui primi r vettori sono autovettori di f relativi all'autovalore λ. Consideriamo la matrice A rappresentativa di f rispetto a questa base. Notiamo che per $1 \leq i \leq r$ si ha

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \lambda \boldsymbol{v}_i = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_{i-1} + \lambda \boldsymbol{v}_i + 0\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n.$$

Pertanto per $1 \leq i \leq r$ la i-esima colonna di A ha tutti gli elementi uguali a 0 tranne l'i-esimo (cioè quello di posto (i,i)) che è uguale a λ. Nulla sappiamo delle colonne successive alla i-esima. Pertanto la matrice A è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Si noti che nelle ultime $n-r$ colonne abbiamo messo degli asterischi ad indicare degli elementi generici. Calcoliamo allora il polinomio caratteristico di f

$$p_f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * - x & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * - x \end{vmatrix}.$$

Sviluppando questo determinante rispetto alla prima colonna, poi ancora rispetto alla prima colonna e così via otteniamo $p_f(x) = (\lambda - x)^r q(x)$ per qualche polinomio $q(x)$. Dunque la molteplicità di λ è almeno r, come volevamo dimostrare (notiamo che nulla esclude che $x - \lambda$ divida $q(x)$ e che quindi la molteplicità di λ sia strettamente maggiore di r). ■

Esempio 31.30 Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica sia

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo determinare gli autovalori di f e le dimensioni dei relativi autospazi.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di f. Abbiamo

$$p_f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Conviene ora sviluppare il determinante lungo la prima colonna e tenere raccolto il fattore $3 - x$. Otteniamo così:

$$\begin{aligned} p_f(x) = (3-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} &= (3-x)(x^4 - 4x^3 + 4x^2) \\ &= (3-x)x^2(x^2 - 4x + 4) = (3-x)x^2(x-2)^2. \end{aligned}$$

Dunque f ha come autovalore 3 di molteplicità 1, 0 di molteplicità 2 e 2 di molteplicità 2. Per il teorema 31.29, sappiamo che $1 \leq \dim E(3) \leq \mathrm{m}_f(3) = 1$, pertanto $\dim E(3) = 1$. Il teorema 31.29 ci dice solo che gli altri autospazi hanno dimensioni comprese tra 1 e 2 ma non ci dice la loro dimensione esatta. Calcoliamole:

$$\dim E(0) = 5 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 5 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\dim E(2) = 5 - \operatorname{rk}(A - 2I) = 5 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Vediamo dunque che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è uguale alla molteplicità dell'autovalore 0 mentre la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è strettamente minore della molteplicità di 2. △

Nell'esempio precedente abbiamo visto che, dal momento che l'autovalore 3 aveva molteplicità 1, dal teorema 31.29 la dimensione dell'autospazio relativo ad esso era esattamente 1 e non è stato necessario calcolare esplicitamente un rango di una matrice: come è facile capire questo tipo di argomento non dipende da questo esempio in particolare. Abbiamo cioè la semplice, ma molto utile nei casi concreti, osservazione:

Osservazione 31.31 Se λ è un autovalore di molteplicità 1 di un endomorfismo f allora $\dim E(\lambda) = 1$ (un autovalore di molteplicità 1 viene detto **semplice**).$\triangle$

Il calcolo degli autovalori con le rispettive molteplicità può essere in alcuni casi semplificato:

Proposizione 31.32 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Supponiamo che esista una base per V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice triangolare A (superiore o inferiore non importa). Gli autovalori di f sono allora gli elementi lungo la diagonale principale di A: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale della matrice.*

Esercizio di base 31.33 Dimostrare l'affermazione precedente.

31.4 Autovalori e autovettori di matrici

In tutto il capitolo abbiamo parlato di autovalori e autovettori di un endomorfismo, di endomorfismi diagonalizzabili e così via. Vogliamo ora trasferire questa terminologia che abbiamo introdotto alle matrici. Riprendiamo l'esempio 31.1 con cui abbiamo iniziato il capitolo. Ricordiamo che l'endomorfismo f si rappresenta, rispetto alla base canonica, con la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

I polinomi $p_1(x) \coloneqq 1 + x$ e $p_2(x) \coloneqq 2 + x$ sono autovettori di f. In termini della matrice A ciò si può esprimere dicendo che il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dà come risultato il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè 2 volte il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e analogamente il prodotto

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dà come risultato un multiplo del vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordando la formula che lega le diverse matrici rappresentative dello stesso endomorfismo al variare della base considerata, possiamo esprimere il fatto che f sia diagonalizzabile dicendo che esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

Tutto ciò ci suggerisce come trasportare la nostra terminologia alle matrici:

• Un **autovettore** di A con **autovalore** λ è un vettore colonna $\boldsymbol{v}$ non nullo tale che:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

• Se λ è un autovalore di A, l'**autospazio** $E(\lambda)$ è l'insieme dei vettori colonna $\boldsymbol{v}$ tali che:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

• Il **polinomio caratteristico** di A è

$$p_A(x) := \det(A - xI).$$

• La **molteplicità** $\mathrm{m}_A(\lambda)$ di un autovalore λ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di A.

• Per ogni autovalore λ di una matrice A si ha $1 \leq \dim E(\lambda) \leq \mathrm{m}_A(\lambda)$.

• Un autovalore è detto **semplice** se la sua molteplicità è uguale a 1: la dimensione dell'autospazio relativo a un autovalore semplice è 1.

• Gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi lungo la diagonale principale: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale della matrice.

• Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (vedi proposizione 31.13).

• Diciamo che la matrice A è **diagonalizzabile** se A è simile a una matrice diagonale (cioè se esiste M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale).

Esercizio di base 31.34 Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e il vettore

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

△

Determinare per che valori di k il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A, e relativamente a quale autovalore.

31.5 Soluzioni degli esercizi di base

EB.31.5 No. Infatti sia $\boldsymbol{v}$ autovettore di f sia rispetto all'autovalore λ sia rispetto all'autovalore μ. Vogliamo mostrare che $\lambda = \mu$. Sappiamo che:

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$$

e

$$f(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}.$$

Ma allora $\lambda\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$, cioè $(\lambda - \mu)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Poiché $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ abbiamo che $\lambda - \mu = 0$.

EB.31.8 Calcoliamo l'immagine tramite f di ciascun vettore e verifichiamo se è un multiplo del vettore oppure no. Si ottiene:

$$f(\boldsymbol{v}_1) = f(1, 0, 0) = (2, 0, 0).$$

Dunque $f(\boldsymbol{v}_1) = 2\boldsymbol{v}_1$: pertanto $\boldsymbol{v}_1$ è autovettore di f relativamente all'autovalore 2. Abbiamo ora:

$$f(\boldsymbol{v}_2) = f(0, 1, 0) = (2, 1, 0).$$

Poiché $f(\boldsymbol{v}_2)$ non è un multiplo di $\boldsymbol{v}_2$ abbiamo che $\boldsymbol{v}_2$ non è un autovettore di f. Continuiamo:

$$f(\boldsymbol{v}_3) = f(1, 0, -2) = (0, 0, 0).$$

Dunque $f(\boldsymbol{v}_3) = 0\boldsymbol{v}_3$: pertanto $\boldsymbol{v}_3$ è autovettore di f relativamente all'autovalore 0. Infine $\boldsymbol{v}_4$ non è un autovettore perché, per definizione, un autovettore è diverso da 0.

EB.31.10 Un vettore $\boldsymbol{v}$ non nullo è un autovettore relativo a 0 se e solo se

$$f(\boldsymbol{v}) = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Se f iniettivo questa relazione è soddisfatta solo dal vettore nullo e, dunque, 0 non è un autovalore. Se invece f non è iniettivo allora $\ker f$ contiene vettori diversi dal vettore nullo, che sono quindi autovettori relativi all'autovalore 0.

EB.31.15 Consideriamo la matrice rappresentativa A rispetto alla base canonica. Poiché

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2, \\ D(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2, \\ D(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 : \end{aligned}$$

si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di D è allora

$$p_D(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3.$$

Dunque l'unico autovalore di D è 0.

EB.31.19 Risolvendo l'esercizio di base 31.15 abbiamo già visto che l'unico autovalore di D è 0. Calcoliamo gli autovettori relativi a tale autovalore. Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono tutte e sole le terne del tipo $(a, 0, 0)$. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è allora:

$$E(0) = \{a \cdot 1 + 0x + 0x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

EB.31.33 Consideriamo la matrice triangolare superiore:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si ha allora:

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Notiamo che anche $A - xI$ è una matrice triangolare: il suo determinante è dato allora dal prodotto degli elementi lungo la sua diagonale principale. Dunque:

$$\det(A - xI) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\dots(a_{nn} - x).$$

Gli autovalori di f sono le radici di questo polinomio, cioè a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn}. Tra questi potrebbero esserci ripetizioni. La molteplicità di ciascuno di essi è ovviamente uguale al numero di volte in cui compare.

EB.31.34 Calcoliamo il prodotto $A\boldsymbol{v}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 + 2k \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Il vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 + 2k \\ 10 \end{pmatrix}$$

è multiplo di $\boldsymbol{v}$ se e solo se $2 + 2k = 5$, ovvero se e $k = \frac{3}{2}$. Dunque $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A se e solo se $k = \frac{3}{2}$: in tal caso $\boldsymbol{v}$ è autovettore relativamente all'autovalore 5 .

31.6 Sunto

Autovalori e autovettori

Definizione Un endomorfismo $f \colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice diagonale. △

Dicendo che f è diagonalizzabile non diciamo che f si rappresenta con una matrice diagonale rispetto a **tutte** le possibili basi dello spazio vettoriale ma solo rispetto ad alcune (almeno una).

Definizione Se $f \colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, un vettore $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si dice **autovettore** di f con **autovalore** λ se si ha:

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}.$$

In tal caso diciamo che λ è **autovalore** di f. △

Teorema *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di f.*

Teorema *Sia f un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Si consideri una base di V formata da autovettori. Siano essi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Sia $f(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$. In tal caso la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ è la matrice:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teorema *Sia dato un endomorfismo $f\colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V e sia λ un autovalore di f. L'insieme*

$$E(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

*è un sottospazio vettoriale di V. Notiamo che $E(\lambda)$ è formato dagli autovettori di f relativi all'autovalore λ e dal vettore nullo. Per questo motivo $E(\lambda)$ viene detto **autospazio** di f relativo all'autovalore λ.*

Notiamo che, per definizione di autovettore, un autospazio non può mai essere costituito dal solo vettore nullo.

Polinomio caratteristico

Teorema *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V e sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto a un'altra base di V. Allora si ha:*

$$\det(A' - xI) = \det(A - xI).$$

Definizione Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Chiamiamo **polinomio caratteristico** di f il polinomio

$$p_f(x) \coloneqq \det(A - xI),$$

di grado n nell'incognita x. △

Teorema *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico di f.*

Proposizione *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Se λ è un autovalore di f, allora si ha:*

$$\dim E(\lambda) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda I).$$

Per determinare l'autospazio $E(\lambda)$ occorre innanzitutto risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, e poi prendere i vettori che hanno queste soluzioni come componenti rispetto alla base considerata.

Osservazione Per definizione un autospazio $E(\lambda)$ contiene vettori diversi dal vettore nullo. Se risolvendo il sistema omogeneo necessario alla determinazione di $E(\lambda)$ troviamo solo la soluzione banale, allora questo significa che abbiamo sbagliato a risolvere il sistema o che il valore λ non è un autovalore (e quindi abbiamo sbagliato a calcolare il polinomio caratteristico o a determinare le sue radici). $\triangle$

Molteplicità di un autovalore

Definizione Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f. Diciamo che λ ha **molteplicità** m e scriviamo $\mathrm{m}_f(\lambda) = m$ se λ ha molteplicità m come radice del polinomio caratteristico di f, cioè se $(x-a)^m$ divide $p_f(x)$ ma $(x-a)^{m+1}$ non divide $p_f(x)$ $\triangle$

Proposizione *Se λ_1, λ_2, …, λ_r sono gli autovalori distinti di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale di dimensione n si ha*

$$\mathrm{m}_f(\lambda_1) + \mathrm{m}_f(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{m}_f(\lambda_r) \leq n.$$

In particolare f ha al più n autovalori distinti.

Il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile se e solo se

$$\mathrm{m}_f(\lambda_1) + \mathrm{m}_f(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{m}_f(\lambda_r) = n.$$

Teorema *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f. Si ha*

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq \mathrm{m}_f(\lambda).$$

Osservazione Se λ è un autovalore di molteplicità 1 di un endomorfismo f allora $\dim E(\lambda) = 1$ (un autovalore di molteplicità 1 viene detto **semplice**). $\triangle$

Proposizione *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Supponiamo che esista una base per V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice triangolare A (superiore o inferiore non importa). Gli autovalori di f sono allora gli elementi lungo la diagonale principale di A: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale della matrice.*

Autovalori e autovettori di matrici

Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali.

• Un **autovettore** di A con **autovalore** λ è un vettore colonna $\boldsymbol{v}$ non nullo tale che:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

• Se λ è un autovalore di A, l'**autospazio** $E(\lambda)$ è l'insieme dei vettori colonna $\boldsymbol{v}$ tali che:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

• Il **polinomio caratteristico** di A è

$$p_A(x) := \det(A - xI).$$

• La **molteplicità** $\mathrm{m}_A(\lambda)$ di un autovalore λ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di A.

• Per ogni autovalore λ di una matrice A si ha $1 \leq \dim E(\lambda) \leq \mathrm{m}_A(\lambda)$.

• Un autovalore è detto **semplice** se la sua molteplicità è uguale a 1: la dimensione dell'autospazio relativo a un autovalore semplice è 1.

• Gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi lungo la diagonale principale: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale della matrice.

• Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

• Diciamo che la matrice A è **diagonalizzabile** se A è simile a una matrice diagonale (cioè se esiste M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale).

31.7 Esercizi

E.31.1 Consideriamo l'endomorfismo definito nell'esempio 31.7. Dimostrare che i polinomi non omogenei non sono autovettori di f.

E.31.2 Sia dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := (2a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + a_1)x.$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.

E.31.3 Sia dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := (2a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x.$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.

E.31.4 Sia data la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori di A e le dimensioni dei relativi autospazi.

E.31.5 Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x, y, z, w) := (x + 2y + z, x + 2w, x + y + 2z, w).$$

E.31.6 Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore colonna $\boldsymbol{v}_k := \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice

$$A := \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

31.8 Soluzioni degli esercizi

E.31.1 Consideriamo un polinomio non omogeneo:

$$p(x) \coloneqq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Dobbiamo mostrare che $f(p(x))$ non è un multiplo di $p(x)$.

Poiché $p(x)$ non è omogeneo esistono almeno due coefficienti a_i e a_j diversi da 0. Scriviamo allora $p(x)$ mettendo in evidenza tali coefficienti:

$$p(x) \coloneqq a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_j x^j + \cdots + a_n x^n.$$

Si ha allora:

$$f(p(x)) = a_1 x + \cdots + i a_i x^i + \cdots + j a_j x^j + \cdots + n a_n x^n.$$

D'altra parte, se λ è uno scalare qualunque si ha:

$$\lambda p(x) \coloneqq \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_i x^i + \cdots + \lambda a_j x^j + \cdots + \lambda a_n x^n.$$

Se $p(x)$ fosse un autovettore relativo all'autovalore λ dovremmo in particolare avere

$$\begin{aligned} i a_i &= \lambda a_i \\ j a_j &= \lambda a_j \end{aligned}$$

Poiché a_i e a_j sono diversi da 0 dovrebbe essere sia $\lambda = i$ sia $\lambda = j$, il che non può essere.

E.31.2 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è allora:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 - x = -x(x^2 - 3x + 1).$$

Le radici di $x^2 - 3x + 1$ sono $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Gli autovalori di f sono allora 0, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Gli autovalori sono tutti semplici, quindi gli autospazi hanno tutti dimensione 1.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore 0. Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo

$$(A - 0I)X = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-t, t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Dunque:

$$E(0) = \{-t + tx + tx^2 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\left(A - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) I\right) X = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) a_0 + & a_1 + & a_2 = 0 \\ & a_0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) a_1 & = 0 \\ & & - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) t, t, 0\right)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Dunque:

$$E\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) t + tx \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Analogamente si trova che:

$$E\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) t + tx \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

E.31.3 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A è una matrice triangolare gli autovalori di f sono gli elementi lungo la diagonale principale di A. Dunque gli autovalori di A sono 2, 1 e 0. Gli autovalori sono tutti semplici, dunque gli autospazi hanno tutti dimensione 1. Determiniamo esplicitamente gli autospazi. Per trovare $E(2)$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$(A - 2I)X = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(t, 0, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(2)$ è data dal polinomio $p_1(x) := 1$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(1, 0, 0)$. Determiniamo ora $E(1)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 1I)X = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ - a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-t, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è data dal polinomio $p_2(x) := -1+x$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(-1, 1, 0)$. Determiniamo ora $E(0)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 0I)X = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, -t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è data dal polinomio $p_3(x) := -x + x^2$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(0, -1, 1)$.

E.31.4 Dal momento che la matrice è triangolare i suoi autovalori sono gli elementi lungo la diagonale principale di A: cioè 1 con molteplicità 1 e 0 con molteplicità 2. L'autovalore 1 è semplice, dunque, l'autospazio relativo a 1 ha dimensione 1. Poiché 0 ha molteplicità 2 per determinare la dimensione dell'autospazio relativo a 0 dobbiamo invece fare qualche calcolo in più: non è però necessario determinare esplicitamente gli autospazi. Si ha infatti:

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 1.$$

E.31.5 Consideriamo la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\det(A - xI) = \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (x+1)(x-3)(x-1)^2.$$

Dunque gli autovalori di f sono -1, 3 entrambi di molteplicità 1 e 1 di molteplicità 2. Calcoliamo gli autovettori relativi.

L'autospazio relativo all'autovalore -1 è formato dai vettori $\boldsymbol{v} := (x, y, z, w)$ che soddisfano l'equazione

$$(A - (-1)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

equivalente al sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2w = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 2w = 0 \end{cases}$$

Si trova facilmente che le soluzioni sono tutti e soli i vettori del tipo $(t, -t, 0, 0)$. Notiamo che l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 1, cosa che già sapevamo dal momento che -1 ha molteplicità 1.

Analogamente l'autospazio relativo a 3 si ottiene risolvendo il sistema

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 2w = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -2w = 0 \end{cases}$$

Otteniamo le soluzioni $(3t, t, 4t, 0)$. Notiamo che l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 1, cosa che già sapevamo dal momento che 3 ha molteplicità 1.

Infine per l'autospazio relativo all'autovalore 1 risolviamo il sistema

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero:

$$\begin{cases} \phantom{x -{}} 2y + z \phantom{{}+2w} = 0 \\ x - y \phantom{{}+z} + 2w = 0 \\ x + y + z \phantom{{}+2w} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo le soluzioni: $(t, t, -2t, 0)$. Anche quest'ultimo autospazio ha dimensione 1.

E.31.6 Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A se e solo se il prodotto

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

è multiplo di $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$. Ora si ha

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 4k \\ k \end{pmatrix}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\begin{pmatrix} k \\ 4k \\ k \end{pmatrix}$ sia multiplo di $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ è che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 4k \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Si vede facilmente che ciò si verifica se e solo se $k = 0$ oppure $k = 8$.

CAPITOLO 32

Diagonalizzazione

Determiniamo un criterio per stabilire se un endomorfismo (o una matrice) è diagonalizzabile e, in caso affermativo, descriviamo un procedimento per trovare una base formata da autovettori dell'endomorfismo (o della matrice).

32.1 Diagonalizzazione

Nell'esempio 31.12 abbiamo considerato un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4[x]$ i cui autovalori sono 0 e 1. Abbiamo poi mostrato che entrambi gli autospazi hanno dimensione 1. Ci chiediamo ora se f sia diagonalizzabile, cioè se esista una base di $\mathbb{R}^4[x]$ formata di autovettori di f (si veda la proposizione 31.11). Se così fosse, avremmo 4 polinomi linearmente indipendenti $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ che sono autovettori di f, alcuni relativi all'autovalore 0, gli altri relativi all'autovalore 1. Quelli relativi all'autovalore 0 sono vettori linearmente indipendenti di $E(0)$: poiché questo autospazio ha dimensione 1, al massimo uno solo tra $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ è autovettore relativo all'autovalore 0. Allo stesso modo al massimo uno solo tra $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ è autovettore relativo all'autovalore 1. Ma allora $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ non possono essere tutti autovettori, e, dunque, f non è diagonalizzabile. Questo tipo di ragionamento è facilmente generalizzabile:

Proposizione 32.1 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e siano λ_1, λ_2, ..., λ_s gli autovalori distinti di f. Se*

$$\dim E(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) + \cdots + \dim E(\lambda_s) < n$$

allora f non è diagonalizzabile. In altre parole affinché f sia diagonalizzabile è necessario che si abbia

$$\dim E(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) + \cdots + \dim E(\lambda_s) = n.$$

Esercizio di base 32.2 Dimostrare la proposizione precedente.

Abbiamo dunque trovato una condizione necessaria affinché un endomorfismo f sia diagonalizzabile. Vogliamo dimostrare che tale condizione è anche sufficiente. Per far ciò diamo il:

Teorema 32.3 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti di f. Prendiamo una base per ciascun autospazio: unendo tali basi si ottengono dei vettori tra loro linearmente indipendenti (e, dunque, abbiamo degli autovettori linearmente indipendenti). In particolare* $\dim E(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) + \cdots + \dim E(\lambda_s) \leq n$.

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata nel paragrafo A.32.

Questo teorema ci permette allora di dare una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. Infatti, se la somma delle dimensioni degli autospazi è minore di n allora f non è diagonalizzabile. Se invece la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale a n, prendendo una base per ciascun autospazio e unendole, otteniamo n autovettori che, per il teorema precedente, sono linearmente indipendenti e, quindi, formano una base di V formata da autovettori di f. Possiamo quindi dare la:

Proposizione 32.4 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti di f. L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se*

$$\dim E(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) + \cdots + \dim E(\lambda_s) = n.$$

Vogliamo ora utilizzare quanto abbiamo visto nel capitolo 31, riguardo la molteplicità degli autovalori. Innanzitutto per il teorema 31.29 sappiamo che per ciascun autovalore λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) \leq \mathrm{m}_f(\lambda_i)$. Dalla proposizione 31.28 sappiamo inoltre che la somma delle molteplicità degli autovalori è minore o uguale della dimensione dello spazio V. Dunque abbiamo:

$$\dim E(\lambda_1)+\dim E(\lambda_2)+\cdots+\dim E(\lambda_s) \leq \mathrm{m}_f(\lambda_1)+\mathrm{m}_f(\lambda_2)+\cdots+\mathrm{m}_f(\lambda_s) \leq n.$$

Se la somma delle molteplicità degli autovalori è minore di n, allora anche la somma delle dimensioni degli autospazi è minore di n e quindi, per la proposizione 32.4, l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Affinché f sia diagonalizzabile è, dunque, necessario che la somma delle molteplicità degli autovalori sia uguale a n. Supponiamo allora che la somma delle molteplicità degli autovalori sia uguale a n (cioè, sempre per la proposizione 32.4, che il polinomio caratteristico di f sia totalmente riducibile). Se anche per uno solo degli autovalori λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) < \mathrm{m}_f(\lambda_i)$ allora risulta

$$\dim E(\lambda_1)+\dim E(\lambda_2)+\cdots+\dim E(\lambda_s) < \mathrm{m}_f(\lambda_1)+\mathrm{m}_f(\lambda_2)+\cdots+\mathrm{m}_f(\lambda_s) = n$$

e, quindi, l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Se invece per ogni autovalore λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}_f(\lambda_i)$ allora risulta

$$\dim E(\lambda_1)+\dim E(\lambda_2)+\cdots+\dim E(\lambda_s) = \mathrm{m}_f(\lambda_1)+\mathrm{m}_f(\lambda_2)+\cdots+\mathrm{m}_f(\lambda_s) = n$$

e, quindi, l'endomorfismo è diagonalizzabile. Possiamo riassumere tutto ciò nel

Teorema 32.5 *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se sono verificate entrambe le condizioni*

- *il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile;*

- *per ciascun autovalore λ_i di f si ha* $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}_f(\lambda_i)$.

In tal caso una base di V formata da autovettori di f si ottiene prendendo una base per ciascun autospazio e unendole. Rispetto a tale base f si rappresenta con una matrice diagonale i cui elementi lungo la diagonale sono gli autovalori di f ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

Ovviamente possiamo enunciare questo teorema in termini matriciali usando le corrispondenze date nel capitolo 31.

Osservazione 32.6 Abbiamo già notato che se λ è un autovalore semplice allora $\dim E(\lambda) = 1$. Pertanto la seconda condizione del teorema appena dato va esplicitamente verificata solo per gli autovalori di molteplicità almeno 2. △

Proposizione 32.7 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se f ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.*

DIMOSTRAZIONE Il polinomio caratteristico di f ha grado n: dunque se ha n autovalori distinti, ciò significa che il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile e gli autovalori sono tutti semplici. Per questi autovalori l'uguaglianza tra molteplicità e dimensione dell'autospazio relativo è automaticamente soddisfatta, dunque f è diagonalizzabile. ■

I risultati fin qui dati delineano un metodo per stabilire se un endomorfismo è diagonalizzabile o no. Prima di formalizzare tale metodo diamo qualche esempio.

Esempio 32.8 Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-x & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^4 - 6x^3 + 10x^2 = x^2(x^2 - 6x + 10).$$

Poiché il polinomio $x^2 - 6x + 10$ non ha radici reali, il polinomio caratteristico di A non è totalmente riducibile. Non è necessario proseguire oltre: la matrice A non è diagonalizzabile. △

Esempio 32.9 Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x, y, z, w) := (2x + y, 2y + z, 3y + 2w, 2x + 6y + z + 2w).$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque il polinomio caratteristico di f è

$$p_f(x) := \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0-x & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^4 - 6x^3 + 7x^2 = x^2(x^2 - 6x + 7).$$

Il polinomio $x^2 - 6x + 7$ si annulla per $x = 3 + \sqrt{2}$ e per $x = 3 - \sqrt{2}$: pertanto il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile e gli autovalori di f sono 0 di molteplicità 2 e $3 + \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2}$, entrambi di molteplicità 1. Dobbiamo ora verificare per ciascun autovalore se la sua molteplicità coincide con la dimensione del relativo autospazio. Non è necessario far ciò per gli autovalori semplici, cioè per $3 + \sqrt{2}$ e per $3 - \sqrt{2}$: l'osservazione 31.31 ci dice infatti che per essi la dimensione del relativo autospazio è necessariamente 1. Calcoliamo allora la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0. Abbiamo

$$\dim E(0) = 4 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

La dimensione dell'autospazio relativo a 0 non coincide con la molteplicità dell'autovalore 0: dunque l'endomorfismo f non è diagonalizzabile. △

Esempio 32.10 Consideriamo l'endomorfismo $f\colon \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}.$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica, cioè a quella formata dalle matrici:

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico $p_f(x)$ è allora:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3).$$

Il polinomio $x^2 - 2x - 3$ si annulla per $x = 3$ e $x = -1$. Dunque il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile e si può scrivere come

$$p_f(x) = x^2(x-3)(x+1).$$

Pertanto gli autovalori di f sono 0, 3 e -1 di molteplicità rispettivamente 2, 1 e 1. Sappiamo che per gli autovalori di molteplicità 1, grazie all'osservazione 31.31, la molteplicità e la dimensione dell'autospazio relativo sono uguali. Rimane da considerare l'autovalore 0. Svolgendo i calcoli necessari si trova:

$$\dim E(0) = 4 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 2.$$

Per ogni autovalore, dunque, la molteplicità e la dimensione dell'autospazio relativo coincidono: pertanto f è diagonalizzabile e, rispetto, a una opportuna base di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$, si rappresenta con la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che ogni autovalore è stato riportato lungo la diagonale un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

Cerchiamo ora esplicitamente una base di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ rispetto a cui f si rappresenta per mezzo della matrice f. Tale base deve essere formata da autovettori di f. Per ottenerla dobbiamo trovare una base per ciascun autospazio e unirle. Determiniamo innanzitutto l'autospazio relativo all'autovalore 0. Dobbiamo allora risolvere il sistema:

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema può essere così scritto in maniera esplicita:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ x \phantom{{}+2y} + w = 0 \\ x + y + w = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che anche se z non appare esplicitamente, nondimeno questo è un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni nelle 4 incognite x, y, z, w. Notiamo, inoltre, che per calcolare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 abbiamo già trovato che il rango della matrice $A - 0I$ è uguale a 2. Pertanto, questo sistema è equivalente al sistema ridotto formato da 2 sue equazioni scelte in modo tale che siano linearmente indipendenti. Possiamo ad esempio scegliere la prima e la seconda equazione (non avremmo invece potuto scegliere la terza e la quarta):

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ x \phantom{{}+2y} + w = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono:

$$\begin{cases} x = -u \\ y = 0 \\ z = t \\ w = u \end{cases}.$$

Dunque:

$$E(0) = \{-uE_{11} + tE_{21} + uE_{22} \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}.$$

Si ha allora che una base per $E(0)$ è formata dalle matrici $-E_{11} + E_{22}$ e E_{21}, cioè:

$$A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente per determinare $E(-1)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - (-1)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema può essere così scritto in maniera esplicita:

$$\begin{cases} 2x + 2y \phantom{{}+z} + w = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} + w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} + 2w = 0 \end{cases}.$$

Notiamo che già conosciamo la dimensione di questo autospazio: infatti -1 è un autovalore semplice e, pertanto, l'autospazio a esso relativo ha dimensione 1. Ciò significa che la matrice $A - (-1)I$ ha rango uguale a $4 - 1 = 3$. Pertanto servono 3 equazioni indipendenti. Possiamo, ad esempio, prendere le ultime 3.

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} + w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} + 2w = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Dunque una base per $E(-1)$ è formata dalla matrice $-E_{11} + E_{12}$ cioè:

$$A_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, per determinare $E(3)$ risolviamo il sistema:

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente a prima ci servono 3 equazioni indipendenti. Le soluzioni di questo sistema sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{4}t \\ y = \dfrac{3}{4}t \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(3)$ è formata dalla matrice $\frac{5}{4}E_{11} + \frac{3}{4}E_{12} + E_{21} + E_{22}$ cioè:

$$A_4 := \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque trovato una base di $\mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ formata da autovettori di f. Se consideriamo la matrice di passaggio dalla base canonica a questa base:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha che:

$$M^{-1}AM = D.$$

Notiamo che avremmo potuto considerare anche una diversa base per ciascun autospazio e ottenere una matrice di passaggio differente. È però importante mantenere un ordine per le colonne della matrice di passaggio coerente con l'ordine in cui abbiamo messo gli autovalori sulla diagonale della matrice D: questo significa ad esempio che, dal momento che l'autovalore 0 è stato scritto nelle prime due posizioni della diagonale della matrice D, le prime due colonne della matrice di passaggio dovranno dare le componenti di vettori di una base di $E(0)$. Non c'è a priori alcun motivo per mettere gli autovalori lungo la diagonale della matrice diagonale in un ordine piuttosto che in un altro: l'importante è che poi le colonne della matrice di passaggio vengano ordinate in maniera coerente. Se ad esempio consideriamo la base di autovettori di f formata dalle stesse matrici ma in ordine diverso: A_4, A_1, A_3 e A_2, avremmo ottenuto la matrice diagonale:

$$\bar{D} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e la matrice di passaggio

$$N := \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tali che

$$N^{-1}AN = \bar{D}.$$

△

Esercizio di base 32.11 Consideriamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

△

Queste matrici a due a due sono simili?

Possiamo adesso descrivere il metodo generale per la ricerca di una eventuale base di autovettori di un endomorfismo.

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

1. Scegliamo vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ che formano una base di V.

2. Determiniamo la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base scelta. Ovviamente in alcuni casi la matrice A è già nota in partenza.

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_f(x) := \det(A - xI)$ dell'endomorfismo f. Il polinomio caratteristico è un polinomio di grado n.

4. Risolviamo l'equazione $\det(A - xI) = 0$. Le soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ di tale equazione sono gli autovalori di f. Se il polinomio $p_f(x)$ non è totalmente riducibile, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile e il procedimento ha termine.

5. Per ciascun autovalore verifichiamo se la sua molteplicità e la dimensione del corrispondente autospazio coincidono (non è necessaria questa verifica per gli autovalori di molteplicità 1).

6. Se esiste almeno un autovalore λ_i per cui si ha $\dim E(\lambda_i) < \mathrm{m}(\lambda_i)$ l'endomorfismo f non è diagonalizzabile: il procedimento ha termine.

7. Se per tutti gli autovalori λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}(\lambda_i)$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Rispetto a una base opportuna di V l'endomorfismo f si rappresenta con una matrice diagonale D: gli elementi lungo la diagonale principale di D sono gli autovalori di f, ciascuno riportato un numero di volte uguale alla propria molteplicità (che è uguale alla dimensione del relativo autospazio). Se vogliamo solo stabilire se f è diagonalizzabile o meno possiamo fermarci qui: se invece vogliamo determinare esplicitamente una base di V formata da autovettori di f e quindi trovare esplicitamente una matrice di passaggio da A a D, proseguiamo.

8. Determiniamo una base per ciascun autospazio $E(\lambda_i)$: per far ciò risolviamo il sistema lineare:

$$(A - \lambda_i I)X = 0.$$

Trovata una base per l'insieme delle soluzioni di questo sistema, troviamo in corrispondenza una base per l'autospazio $E(\lambda_i)$. Ovviamente il numero di vettori della base di E_i deve coincidere con la dimensione dell'autospazio calcolata in precedenza.

9. Unendo le basi di tutti gli autospazi troviamo una base di V formata da autovettori di f. La matrice M di passaggio dalla base fissata inizialmente alla base di autovettori così trovata soddisfa la relazione:

$$D = M^{-1}AM.$$

Ricordiamo che M è la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori della base di autovettori rispetto alla base di partenza. È importante che l'ordine in cui mettiamo gli autovalori lungo la diagonale di D e l'ordine in cui scriviamo le colonne di M siano coerenti: se il k-esimo elemento lungo la diagonale di D è un certo autovalore λ_i, la k-esima colonna di M deve dare le componenti di un autovettore relativo allo stesso autovalore λ_i.

Esercizio di base 32.12 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2[x]$ definito da:

$$f(a + bx) := b - ax. \qquad \triangle$$

Stabilire se f è diagonalizzabile.

Osservazione 32.13 Nel paragrafo 31.4 abbiamo introdotto una corrispondenza tra la terminologia utilizzata per gli endomorfismi e la terminologia utilizzata per le matrici. Alla luce di questa corrispondenza, possiamo riscrivere in termini matriciali i risultati fin qui dati in questo capitolo. Ad esempio una matrice è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile e per ogni suo autovalore la dimensione dell'autospazio corrispondente e la molteplicità coincidono. Il procedimento di diagonalizzazione si adatta facilmente come dimostra il prossimo esempio. $\triangle$

Esempio 32.14 Sia data la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Stabiliamo se A è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 - x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x.$$

Fattorizzando questo polinomio troviamo:

$$p_A(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x(2x - 1)^2.$$

Il polinomio caratteristico è totalmente riducibile e gli autovalori di A sono 0 di molteplicità 1 e $\frac{1}{2}$ di molteplicità 2. La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è necessariamente 1; calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo a $\frac{1}{2}$. Si ha:

$$\dim E\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \operatorname{rk}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Per ogni autovalore λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}(\lambda_i)$, dunque la matrice A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D. Determiniamo $E(0)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 0I)X = 0.$$

Poiché 0 è autovalore semplice sappiamo già che la dimensione dell'autospazio è 1 e che del sistema precedente è sufficiente considerare $3 - 1 = 2$ equazioni indipendenti, cioè equazioni corrispondenti a righe di $A - 0I$ linearmente indipendenti. Prendendo ad esempio la seconda e la terza equazione, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -x - y + \dfrac{1}{2}z = 0 \\ \dfrac{1}{2}z = 0 \end{cases}.$$

le cui soluzioni sono $(-t, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è data dal vettore $(-1, 1, 0)$. Determiniamo ora $E\left(\frac{1}{2}\right)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right) X = 0.$$

Sappiamo già che il rango della matrice di questo sistema è 1 e, pertanto, basta un'equazione non banale:

$$x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$$

le cui soluzioni sono $\left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}u, t, u\right)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E\left(\frac{1}{2}\right)$ è data dai vettori $\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è allora data dai vettori:

$$(-1, 1, 0) \quad \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) \quad \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

Se consideriamo allora la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti dei vettori di questa base rispetto alla base canonica si ha:

$$M^{-1}AM = D.$$

Come al solito, l'ordine in cui mettiamo gli autovalori di A lungo la diagonale di D e quello in cui scriviamo le componenti degli autovettori di A lungo le colonne di M devono essere coerenti. △

Esercizio di base 32.15 Stabilire se l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) \coloneqq (y, 0, x + y + z) \qquad \triangle$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base.

Esercizio di base 32.16 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1}AM$.

Esercizio di base 32.17 Sia A una matrice quadrata di ordine 3. Sapendo che la matrice A ha rango 1 e che 4 è autovalore di A siamo in grado di stabilire se la matrice A è diagonalizzabile o abbiamo bisogno di ulteriori informazioni?

Esercizio di base 32.18 Sia A una matrice quadrata di ordine 3. Sapendo che la matrice A ha rango 2 e che 4 è autovalore di A siamo in grado di stabilire se la matrice A è diagonalizzabile o abbiamo bisogno di ulteriori informazioni?

32.2 Soluzioni degli esercizi di base

EB.32.2 Per semplicità indichiamo con m_i la dimensione dell'autospazio $E(\lambda_i)$. Supponiamo che, per assurdo, esista una base di V formata dagli autovettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots,$ $\boldsymbol{e}_n$ di f. Tra questi vettori ce ne possono essere al massimo m_1 relativi all'autovalore λ_1: se ce ne fossero di più questi sarebbero tra loro linearmente dipendenti e, quindi, non potrebbero far parte della stessa base. Allo stesso modo tra i vettori della base di autovettori ce ne possono essere al massimo m_2 relativi all'autovalore 2 e così via: in conclusione la base di autovettori è formata al massimo da

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s$$

vettori. Poiché per ipotesi questo numero è minore di n avremmo una base formata di V da meno di n vettori, il che è assurdo.

EB.32.11 Le matrici considerate sono tutte diagonali e hanno gli stessi autovalori, cioè 1 e 2. Poiché la molteplicità di ciascun autovalore di una matrice triangolare (in particolare di una matrice diagonale) è uguale al numero di volte che tale autovalore compare sulla diagonale principale, abbiamo che sia A che B hanno polinomio caratteristico $(1-x)^2(2-x)$ mentre C ha polinomio caratteristico $(1-x)(2-x)^2$. Dunque C ha polinomio caratteristico diverso da quello da A e B e quindi non è simile né ad A né a B.

Consideriamo allora A e B. La matrice A è ovviamente diagonalizzabile (è essa stessa diagonale!): dunque essa è simile a una matrice diagonale i cui valori sulla diagonale sono gli autovalori di A ognuno riportato un numero di volte uguale alla sua molteplicità. L'ordine in cui mettiamo questi autovalori è arbitrario. Pertanto A è simile alla matrice B, così come a ogni altra matrice diagonale i cui elementi sono 1, 1 e 2 in qualsiasi ordine. C'è solo un'altra matrice siffatta:

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EB.32.12 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Questo polinomio non ha soluzioni reali: dunque la matrice A non è diagonalizzabile.

EB.32.15 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^2(x-1).$$

Dunque il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile e gli autovalori di f sono 0 di molteplicità 2 e 1 di molteplicità 1. La dimensione dell'autospazio relativo a 1 è necessariamente 1; calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo a 0. Si ha:

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque per l'autovalore 0 si ha $\dim E(0) < \mathrm{m}(0)$. Pertanto f non è diagonalizzabile.

EB.32.16 Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Per calcolare questo determinante conviene svilupparlo prima rispetto alla quarta riga e poi rispetto alla seconda riga:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^2(x^2-2x) = (1-x)^2 x(x-2). \end{aligned}$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile. Gli autovalori sono 1 di molteplicità 2 e 0 e 2 entrambi di molteplicità 1. Non è necessario fare la verifica delle dimensioni per gli autospazi relativi agli autovalori semplici. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo a 1. Si ha:

$$\dim E(1) = 4 - \operatorname{rk}(A - 1I) = 4 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Anche per questo autovalore, dunque, la molteplicità e la dimensione dell'autospazio relativo coincidono. Pertanto A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D. Calcoliamo $E(1)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 1I)X = 0.$$

Sappiamo già che il rango della matrice $A - 1I$ è 2. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 1I$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, t, 0, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è data dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (0, 1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (0, 0, 0, 1)$.

Determiniamo ora $E(0)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 0I)X = 0.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima, la seconda e la quarta:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-t, 0, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è data dal vettore $\boldsymbol{v}_3 := (-1, 0, 1, 0)$.

Determiniamo ora $E(2)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 2I)X = 0.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 2I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 2I$, ad esempio la prima, la seconda e la quarta:

$$\begin{cases} -x \quad + z \quad = 0 \\ \quad - y \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad - w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(t, 0, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(2)$ è data dal vettore $\boldsymbol{v}_4 := (1, 0, 1, 0)$.

Se consideriamo allora la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ rispetto alla base canonica si ha:

$$M^{-1}AM = D.$$

EB.32.17 Poiché $\det(A - 0I) = \det A = 0$, la matrice A ha 0 come autovalore e la dimensione del relativo autospazio è $\dim E(0) = 3 - \text{rk}(a - 0I) = 2$. Dal momento che $\dim E(0) \leq \text{m}_A(0)$, la molteplicità di 0 è almeno 2. Dunque A ha come autovalore 0 di molteplicità almeno 2 e 4 di molteplicità almeno 1. Poiché A ha ordine 3, la somma delle molteplicità dei suoi autovalori è al massimo 3. La molteplicità di 0 è allora esattamente 2 e la molteplicità di 4 è esattamente 1. In particolare il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile. Inoltre $\dim E(0) = \text{m}_A(0) = 2$ e $\dim E(4) = \text{m}_A(4)$ (ricordiamo che per gli autovalori di molteplicità 1 l'uguaglianza tra molteplicità e dimensione del relativo autospazio è automaticamente soddisfatta.

EB.32.18 Analogamente all'esercizio di base precedente la matrice A ha 0 come autovalore e la dimensione del relativo autospazio è, questa volta, uguale a 1. Quello che dunque sappiamo è che A ha come autovalori 0 e 4 di molteplicità almeno 1: le informazioni non sono sufficienti a stabilire se A è diagonalizzabile. Consideriamo ad esempio la matrice

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che questa matrice ha rango 2 e ammette 4 come autovalore. La matrice A_1 soddisfa quindi le ipotesi dell'esercizio ma non è diagonalizzabile: infatti $\dim E(4) = 3 - \text{rk}(A - 4I) = 1$ e $\text{m}_{A_1}(4) = 2$. Se prendiamo invece la matrice

$$A_2 := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo subito che anch'essa ha rango 2 e ammette 4 come autovalore. Ovviamente A_2 è diagonalizzabile: è già essa stessa diagonale!

32.3 Sunto

Diagonalizzazione

Teorema *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se sono verificate entrambe le condizioni*

- *il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile;*
- *per ciascun autovalore λ_i di f si ha $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}_f(\lambda_i)$.*

In tal caso una base di V formata da autovettori di f si ottiene prendendo una base per ciascun autospazio e unendole. Rispetto a tale base f si rappresenta con una matrice diagonale i cui elementi lungo la diagonale sono gli autovalori di f ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

Osservazione Se λ è un autovalore semplice allora $\dim E(\lambda) = 1$. Pertanto la seconda condizione del teorema appena dato va esplicitamente verificata solo per gli autovalori di molteplicità almeno 2. △

Proposizione *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se f ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.*

Possiamo adesso descrivere il metodo per la ricerca di una eventuale base di autovettori di un endomorfismo.

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

1. Scegliamo vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ che formano una base di V.

2. Determiniamo la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base scelta. Ovviamente in alcuni casi la matrice A è già nota in partenza.

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_f(x) := \det(A - xI)$ dell'endomorfismo f. Il polinomio caratteristico è un polinomio di grado n.

4. Risolviamo l'equazione $\det(A - xI) = 0$. Le soluzioni λ_1, λ_2, ..., λ_s di tale equazione sono gli autovalori di f. Se il polinomio $p_f(x)$ non è totalmente riducibile, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile e il procedimento ha termine.

5. Per ciascun autovalore verifichiamo se la sua molteplicità e la dimensione del corrispondente autospazio coincidono (non è necessaria questa verifica per gli autovalori di molteplicità 1).

6. Se esiste almeno un autovalore λ_i per cui si ha $\dim E(\lambda_i) < \mathrm{m}(\lambda_i)$ l'endomorfismo f non è diagonalizzabile: il procedimento ha termine.

7. Se per tutti gli autovalori λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) = \mathrm{m}(\lambda_i)$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Rispetto a una base opportuna di V l'endomorfismo f si rappresenta con una matrice diagonale D: gli elementi lungo la diagonale principale di D sono gli autovalori di f, ciascuno riportato un numero di volte uguale alla propria molteplicità (che è uguale alla dimensione del relativo autospazio). Se vogliamo solo stabilire se f è diagonalizzabile o meno possiamo fermarci qui: se invece vogliamo determinare esplicitamente una base di V formata da autovettori di f e quindi trovare esplicitamente una matrice di passaggio da A a D, proseguiamo.

8. Determiniamo una base per ciascun autospazio $E(\lambda_i)$: per far ciò risolviamo il sistema lineare:
$$(A - \lambda_i I)X = 0.$$

Trovata una base per l'insieme delle soluzioni di questo sistema, troviamo in corrispondenza una base per l'autospazio $E(\lambda_i)$. Ovviamente il numero di vettori della base di E_i deve coincidere con la dimensione dell'autospazio calcolata in precedenza.

9. Unendo le basi di tutti gli autospazi troviamo una base di V formata da autovettori di f. La matrice M di passaggio dalla base fissata inizialmente alla base di autovettori così trovata soddisfa la relazione:

$$D = M^{-1}AM.$$

Ricordiamo che M è la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori della base di autovettori rispetto alla base di partenza. È importante che l'ordine in cui mettiamo gli autovalori lungo la diagonale di D e l'ordine in cui scriviamo le colonne di M siano coerenti: se il k-esimo elemento lungo la diagonale di D è un certo autovalore λ_i, la k-esima colonna di M deve dare le componenti di un autovettore relativo allo stesso autovalore λ_i.

Tutti i risultati di questo capitolo possono essere rienunciati in termini matriciali.

32.4 Esercizi

E.32.1 Sia dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := (2a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + a_1)x.$$

Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata da autovettori di f.

E.32.2 Sia dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := (2a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x.$$

Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata da autovettori di f. In caso affermativo determinarne una.

E.32.3 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.4 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.5 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2, e sia data una base di V formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. Stabilire se l'endomorfismo di V definito da $f(\boldsymbol{v}_1) := \mathbf{0}$ e $f(\boldsymbol{v}_2) := \boldsymbol{v}_1$ è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una base di V formata da autovettori di f.

E.32.6 Stabilire se l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2[x]$ definito da:

$$f(a+bx) := (3a+2b) + (2a+3b)x,$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^2[x]$ formata da autovettori di f e la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base.

E.32.7 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.8 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.9 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.10 Stabilire se la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

E.32.11 Stabilire se le seguenti matrici reali A_i sono diagonalizzabili e in caso affermativo determinare, per ciascun i, una matrice diagonale D_i e una matrice invertibile M_i tali che $D_i = M_i^{-1} A_i M_i$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 7 & -13 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -13 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.32.12 Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 6 & 3 & 6 \\ -k & -1 & -k \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per ciascuno di questi valori k determinare una matrice invertibile M_k e una matrice diagonale D_k tali che $D_k = M_k^{-1} A_k M_k$.

32.5 Soluzioni degli esercizi

E.32.1 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è allora:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 - x = -x(x^2 - 3x + 1).$$

Le radici di $x^2 - 3x + 1$ sono $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Gli autovalori di f sono allora 0, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dunque f ha 3 autovalori distinti: per la proposizione 32.7, l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

E.32.2 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A è una matrice triangolare gli autovalori di f sono gli elementi lungo la diagonale principale di A. Dunque gli autovalori di A sono 2, 1 e 0. Per la proposizione 32.7, l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Pertanto f è diagonalizzabile. Determiniamo esplicitamente gli autospazi. Per trovare $E(2)$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$(A - 2I)X = 0.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 2I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 2I$, ad esempio la seconda e la terza:

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(t, 0, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$ (notiamo che anche se a_0 non compare esplicitamente nel sistema le incognite sono a_0, a_1 e a_2). Una base per $E(2)$ è data dal polinomio $p_1(x) := 1$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(1, 0, 0)$.

Determiniamo ora $E(1)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 1I)X = 0.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 1I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 1I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-t, t, 0)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è data dal polinomio $p_2(x) := -1 + x$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(-1, 1, 0)$.

Determiniamo ora $E(0)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - 0I)X = 0.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, -t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è data dal polinomio $p_3(x) := -x + x^2$, le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(0, -1, 1)$.

Una base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata da autovettori di f è allora quella costituita dai polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Rispetto a tale base f si rappresenta con la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E.32.3 La matrice A è triangolare: dunque il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile è gli autovalori sono 1 di molteplicità 1 e 0 di molteplicità 2. La dimensione dell'autospazio relativo a 1 è necessariamente 1 mentre la dimensione dell'autospazio relativo a 0 è

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 1.$$

Poiché $\dim E(0) < \mathrm{m}_A(0)$, la matrice A non è diagonalizzabile.

E.32.4 Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x = x(x-3).$$

Dunque A ha 2 autovalori e per la proposizione 32.7 è diagonalizzabile. La matrice A è simile alla matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per determinare la matrice di passaggio dobbiamo determinare esplicitamente gli autovettori di A.

Per ottenere $E(0)$ dobbiamo risolvere il sistema $(A - 0I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $2 - 1 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non banale della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima:

$$x + y = 0$$

le cui soluzioni sono del tipo $(-t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è allora formata dal vettore $\boldsymbol{e}_1 := (-1, 1)$.

Per ottenere $E(3)$ dobbiamo risolvere il sistema $(A - 3I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 3I$ è $2 - 1 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non banale della matrice $A - 3I$, ad esempio la prima:

$$-2x + y = 0$$

le cui soluzioni sono del tipo $(t, 2t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(3)$ è allora formata dal vettore $\boldsymbol{e}_2 := (1, 2)$.

Prendiamo allora come matrice di passaggio la matrice M le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ rispetto alla base canonica:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E.32.5 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è triangolare e, dunque, A ha come unico autovalore 0 di molteplicità 2. La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è

$$\dim E(0) = 2 - \operatorname{rk}(A - 0I) = 1.$$

Poiché $\dim E(0) < \mathrm{m}_f(0)$, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile.

E.32.6 La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è allora

$$p_f(x) = \begin{pmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5).$$

Poiché f ha 2 autovalori, per la proposizione 32.7 l'endomorfismo f è diagonalizzabile e, rispetto a una opportuna base di $\mathbb{R}^2[x]$ formata da autovettori di f, si rappresenta con la matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base rispetto a cui f si rappresenta con questa matrice, determiniamo esplicitamente gli autospazi. Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 1 dobbiamo risolvere il sistema $(A - 1I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 1I$ è $2 - 1 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non banale della matrice $A - 1I$, ad esempio la prima:

$$2a + 2b = 0$$

le cui soluzioni sono del tipo $(-t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è allora formata dal vettore $p_1(x) := -1 + x$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 5 dobbiamo risolvere il sistema $(A-5I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 5 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A-5I$ è $2-1 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non banale della matrice $A - 5I$, ad esempio la prima:

$$-2a + 2b = 0$$

le cui soluzioni sono del tipo (t, t) al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(5)$ è allora formata dal vettore $p_2(x) := 1 + x$.

Pertanto rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x) := -1 + x$ e $p_2(x) := 1 + x$ l'endomorfismo f si rappresenta con la matrice D.

E.32.7 La matrice A non è diagonalizzabile: infatti il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) := x^2 - 2x + 3,$$

che non ha radici reali.

E.32.8 Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)(x^2-2x-3) = (3-x)^2(-1-x).$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile e gli autovalori di A sono 3 di molteplicità 2 e -1 di molteplicità 1. Per quest'ultimo la dimensione del relativo autospazio è automaticamente 1. Calcoliamo invece la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 3. Si ha

$$\dim E(3) = 3 - \operatorname{rk}(A - 3I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Poiché per ciascun autovalore la dimensione dell'autospazio relativo e la molteplicità coincidono la matrice A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per determinare una matrice di passaggio calcoliamo gli autospazi di A.

Per determinare $E(-1)$ dobbiamo risolvere il sistema lineare $(A - (-1)I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A-(-1)I$ è $3-1=2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A-(-1)I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 2x \qquad + 2z = 0 \\ \qquad 2y \qquad = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono del tipo $(-t,0,t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(-1)$ è allora formata dal vettore $\boldsymbol{v}_1 := (-1,0,1)$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 3 dobbiamo risolvere il sistema $(A-3I)X=0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A-3I$ è $3-2=1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non nulla della matrice $A-3I$, ad esempio la prima:

$$-2x+2z=0$$

le cui soluzioni sono del tipo (t,u,t) al variare di t e u in $\mathbb{R}$ (anche se y non appare esplicitamente, nondimeno è un'incognita di questa equazione). Una base per $E(3)$ è allora formata dai vettori $\boldsymbol{v}_2 := (1,0,1)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (0,1,0)$.

Se consideriamo allora la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica (attenzione a prendere questi vettori in ordine coerente con quello in cui abbiamo scritto gli autovalori lungo la diagonale principale di D) si ha $D = M^1 AM$.

E.32.9 La matrice A è triangolare: pertanto il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile e il suo unico autovalore è 1 di molteplicità 3. La dimensione dell'autospazio relativo a 1 è $3-\operatorname{rk}(A-1I)=1$. Poiché $\dim E(1) < \mathrm{m}_A(1)$, la matrice A non è diagonalizzabile.

E.32.10 Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 2 \\ 0 & 3-x & 8 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} &= (-1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 8 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (-1-x)(x^2-4x-5) = (-1-x)^2(5-x).\end{aligned}$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile e gli autovalori di A sono -1 di molteplicità 2 e 5 di molteplicità 1. Per quest'ultimo la dimensione del relativo autospazio è automaticamente 1. Calcoliamo invece la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1. Si ha

$$\dim E(-1) = 3-\operatorname{rk}(A-(-1)I) = 3-\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Poiché per ciascun autovalore la dimensione dell'autospazio relativo e la molteplicità coincidono la matrice A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per determinare una matrice di passaggio calcoliamo gli autospazi di A.

Per determinare $E(-1)$ dobbiamo risolvere il sistema lineare $(A-(-1)I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A-(-1)I$ è $3-2=1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non banale della matrice $A-(-1)I$, ad esempio la prima:

$$y + 2z = 0$$

le cui soluzioni sono del tipo $(t, -2u, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$ (notiamo che anche se x non compare esplicitamente nel sistema le incognite sono x, y e z). Una base per $E(-1)$ è allora formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 \coloneqq (1,0,0)$ e $\boldsymbol{v}_2 \coloneqq (0,-2,1)$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 5 dobbiamo risolvere il sistema $(A-5I)X = 0$. Sappiamo già che l'autospazio relativo a 5 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A-5I$ è $3-1=2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A-5I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} -6x + y + 2z = 0 \\ - 2y + 8z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono del tipo $(t, 4t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(5)$ è allora formata dal vettore $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq (1,4,1)$.

Se consideriamo allora la matrice

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica (attenzione a prendere questi vettori in ordine coerente con quello in cui abbiamo scritto gli autovalori lungo la diagonale principale di D) si ha $D = M^1AM$.

E.32.11 Il polinomio caratteristico della matrice

$$A_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 7 & -13 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -13 & 11 \end{pmatrix}$$

è $p_{A_1}(x) = -x^3 + 10x^2 - 25x$. Dunque il polinomio caratteristico di A_1 è totalmente riducibile e le sue radici sono 0 di molteplicità 1 e 5 di molteplicità 2. La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è automaticamente 1 mentre la dimensione dell'autospazio relativo a 5 è

$$\dim E(5) = 3 - \operatorname{rk}(A_1 - 5I) = 2.$$

Poiché la molteplicità di ciascun autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio la matrice A_1 è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

in cui ciascun autovalore della matrice A_1 è riportato sulla diagonale principale un numero di volte uguale alla sua molteplicità. Per determinare una matrice di passaggio M_1 determiniamo esplicitamente una base per ciascun autospazio.

Un vettore (x,y,z) appartiene all'autospazio $E(0)$ se e solo se:

$$(A_1 - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 7x - 13y + 6z = 0 \\ 2x - 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo (t, t, t) al variare di t in $\mathbb{R}$. Dunque, una base per $E(0)$ è costituita dal vettore $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1, 1)$.

Analogamente un vettore (x, y, z) appartiene all'autospazio $E(5)$ se e solo se:

$$(A_1 - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 5 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 5I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non nulla della matrice $A - 5I$, ad esempio la prima:

$$2x - 13y + 6z = 0$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $\left(\frac{13}{2}t - 3u, t, u\right)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Dunque, una base per $E(5)$ è costituita dai vettori $\boldsymbol{v}_2 := \left(\frac{13}{2}, 1, 0\right)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (-3, 0, 1)$. Ora i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori di A_1.

Se consideriamo la matrice

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{2} & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ rispetto alla base canonica si ha:

$$D_1 = M_1^{-1} A_1 M_1.$$

Si noti che è importante prendere gli autovettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ in un ordine coerente con quello che abbiamo usato per scrivere gli autovalori di A_1 lungo la diagonale di D_1.

Il polinomio caratteristico della matrice

$$A_2 := \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

è $p_{A_2}(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$. Dunque il polinomio caratteristico di A_2 è totalmente riducibile e le sue radici sono 0 di molteplicità 1 e 2 di molteplicità 2. La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è automaticamente 1 mentre la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è

$$\dim E(5) = 3 - \operatorname{rk}(A_1 - 2I) = 1.$$

Poiché esiste un autovalore la cui molteplicità non coincide con la dimensione del relativo autospazio la matrice A_2 non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico della matrice

$$A_3 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è $p_{A_3}(x) = -x^3 - x$, che ha come unica radice reale 0 di molteplicità 1. Poiché il polinomio caratteristico di A_3 non è totalmente riducibile, la matrice A_3 non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico della matrice

$$A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è $p_{A_4}(x) = x^2(x+1)(x-1)$. Dunque il polinomio caratteristico di A_4 è totalmente riducibile e le sue radici sono 0 di molteplicità 2 e 1 e -1 entrambi di molteplicità 1. Per gli autovalori semplici vale automaticamente l'uguaglianza tra molteplicità e dimensione dell'autospazio relativo. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0:

$$\dim E(0) = 4 - \operatorname{rk}(A_4 - 0I) = 2.$$

Poiché la molteplicità di ciascun autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio la matrice A_4 è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

in cui ciascun autovalore della matrice A_4 è riportato sulla diagonale principale un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Per determinare una matrice di passaggio M_4 determiniamo esplicitamente una base per ciascun autospazio.

Un vettore (x, y, z, w) appartiene all'autospazio $E(0)$ se e solo se:

$$(A_4 - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 4 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A - 4I$ è $4 - 2 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 4I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(0, 0, t, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$ (anche se z e w non appaiono esplicitamente, nondimeno sono incognite di questo sistema). Dunque, una base per $E(0)$ è costituita dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (0, 0, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (0, 0, 0, 1)$.

Analogamente un vettore (x, y, z, w) appartiene all'autospazio $E(1)$ se e solo se:

$$(A_4 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 1I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 1I$, ad esempio la prima, la terza e la quarta:

$$\begin{cases} -2x + 2y & = 0 \\ 2y - z & = 0 \\ -x + y - w & = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t, 0\right)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Dunque, una base per $E(1)$ è costituita dal vettore $\boldsymbol{v}_3 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Infine un vettore (x, y, z, w) appartiene all'autospazio $E(-1)$ se e solo se:

$$(A_4 - (-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - (-1)I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - (-1)I$, ad esempio la prima, la terza e la quarta:

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -x + y + w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(t, 0, 0, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Dunque, una base per $E(-1)$ è costituita dal vettore $\boldsymbol{v}_4 := (1, 0, 0, 1)$.

Ora i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ formano una base di $\mathbb{R}^4$ costituita di autovettori di A_4. Se consideriamo la matrice

$$M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ rispetto alla base canonica si ha:

$$D_4 = M_4^{-1} A_4 M_4.$$

Si noti che è importante prendere gli autovettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ in un ordine coerente con quello che abbiamo usato per scrivere gli autovalori di A_4 lungo la diagonale di D_4.

E.32.12 Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_k:

$$p_{A_k}(x) = \begin{vmatrix} k - x & 1 & k \\ 6 & 3 - x & 6 \\ -k & -1 & -k - x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 = -x^2(x - 3).$$

Dunque il polinomio caratteristico di A non dipende da k. Il polinomio caratteristico di A_k è totalmente riducibile e le sue radici sono 0 di molteplicità 2 e 3 di molteplicità 1. La dimensione dell'autospazio relativo a 3 è automaticamente 1 qualunque sia k mentre la dimensione dell'autospazio relativo a 0 è

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 0I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 6 & 3 & 6 \\ -k & -1 & -k \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

Dunque se $k = 2$ per ogni autovalore la molteplicità e la dimensione del relativo autospazio coincidono e, pertanto, la matrice è diagonalizzabile, mentre se $k \neq 2$ esiste un autovalore (cioè 3) per cui la molteplicità e la dimensione del relativo autospazio non coincidono e dunque la matrice non è diagonalizzabile. Consideriamo allora l'unico valore di k per cui la matrice è diagonalizzabile, cioè $k = 2$. Per tale valore la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è simile alla matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere M determiniamo una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A. Determiniamo innanzitutto l'autospazio relativo all'autovalore 0: un vettore (x, y, z) appartiene a questo autospazio se e solo se:

$$(A_1 - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che la dimensione dell'autospazio considerato è 2, e, pertanto, una sola delle equazioni di questo sistema è essenziale: $2x + y + 2z = 0$. risolvendo l'equazione troviamo $y = -2x - 2z$. Una base per $E(0)$ è allora data dai vettori $(1, -2, 0)$ e $(0, -2, 1)$. Analogamente determiniamo l'autospazio $E(3)$: questo si ottiene risolvendo il sistema:

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $E(3)$ ha dimensione 1, le equazioni essenziali in questo sistema sono 2 ovvero:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 6x \qquad + 6z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo che il vettore $(1, 3, -1)$ forma una base per $E(3)$. Dunque una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A è data dai vettori $(1, -2, 0)$, $(0, -2, 1)$, $(1, 3, -1)$. Come matrice M possiamo allora prendere la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono le componenti dei vettori della base di autovettori (si noti che l'ordine in cui vanno posti gli autovettori deve essere coerente con quello in cui avevamo posto gli autovalori lungo la diagonale di D).

CAPITOLO 33

Prodotto scalare di vettori geometrici

Torniamo ora a occuparci di geometria del piano o dello spazio. In tutto questo capitolo supponiamo di aver scelto nel piano o nello spazio un suo punto O e un'unità di misura.

Introduciamo negli spazi vettoriali $V^2(O)$ e $V^3(O)$ due nuove operazioni: l'operazione di norma di un vettore e l'operazione di prodotto scalare di due vettori. Vedremo che il primo è legato alla lunghezza di un vettore e che il secondo è legato, oltre che alla lunghezza dei vettori coinvolti, all'angolo formato dai due vettori.

Lo studio delle proprietà del prodotto scalare ci porterà alla scelta di particolari basi di $V^2(O)$ e $V^3(O)$ per le quali la formula con cui si calcola il prodotto scalare di due vettori è particolarmente semplice.

33.1 Norma di un vettore geometrico

Definizione 33.1 Dato un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$, chiamiamo **norma** di $\boldsymbol{v}$ la distanza tra il suo punto iniziale O e il suo punto finale P. Usiamo per la norma il simbolo $\|\boldsymbol{v}\|$. Dunque, per definizione, $\|\boldsymbol{v}\| := \mathrm{d}(O, P)$.△

L'operazione di norma quindi associa a ogni vettore di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$ un numero reale.

Teorema 33.2 *La norma soddisfa le proprietà:*

1. $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$*;*
2. $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$*;*
3. $\|a\boldsymbol{v}\| = |a|\|\boldsymbol{v}\|$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\boldsymbol{v}$*;*
4. $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$*.*

La quarta proprietà viene detta ***disuguaglianza triangolare****.*

DIMOSTRAZIONE Deriva dalle proprietà della distanza tra punti. ∎

33.2 Prodotto scalare di vettori geometrici

Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OB}$ possiamo definire l'angolo $\widehat{\boldsymbol{vw}}$ formato da essi, come l'angolo formato dalla semiretta di origine O e contenente A e la semiretta di origine O e contenente B. Ricordiamo che se le due semirette coincidono l'angolo è uguale a 0, se le due semirette sono opposte l'angolo è uguale a π. Pertanto l'angolo formato da due vettori è compreso tra 0 e π (estremi inclusi).

Definizione 33.3 Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$, associamo ad essi un numero reale, detto **prodotto scalare** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e indicato con il simbolo $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, nel seguente modo:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := \begin{cases} \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\| \cos \widehat{\boldsymbol{vw}} & \text{se } \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \text{ e } \boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ oppure } \boldsymbol{w} = \mathbf{0}. \end{cases}$$ △

Abbiamo quindi introdotto un'operazione di prodotto scalare sia nello spazio vettoriale $V^2(O)$ che nello spazio vettoriale $V^3(O)$.

Teorema 33.4 *Il prodotto scalare (di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$) soddisfa le proprietà:*

1. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$;
2. $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_2$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1$ *e* $\boldsymbol{w}_2$;
3. $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ *e* $\boldsymbol{w}$;
4. $\boldsymbol{v} \times (h\boldsymbol{w}) = (h\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = h(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, *e* $h \in \mathbb{R}$;
5. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$;
6. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

DIMOSTRAZIONE Le proprietà 1, 5 e 6 seguono facilmente dalla definizione di prodotto scalare, la proprietà 4 segue dalla definizione di prodotto scalare e dalla definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Le dimostrazioni delle proprietà 2 e 3 vengono omesse. ∎

Teorema 33.5 *Per ogni vettore* $\boldsymbol{v}$ *di* $V^2(O)$ *o di* $V^3(O)$ *si ha:*

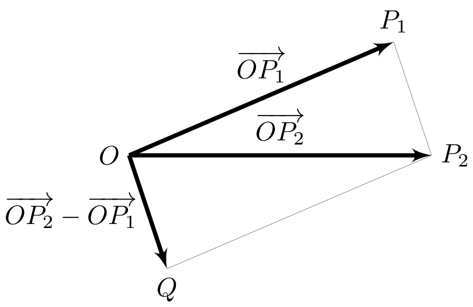
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}}.$$

Esercizio di base 33.6 Dimostrare il teorema 33.5.

Teorema 33.7 *Dati due punti* P_1 *e* P_2 *si ha:*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\|.$$

DIMOSTRAZIONE Consideriamo il punto Q del piano tale che OQP_2P_1 sia un parallelogramma (eventualmente degenere).



Abbiamo $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$ e quindi $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Pertanto:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \mathrm{d}(O, Q) = \|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\|. \qquad \blacksquare$$

Dalla definizione di prodotto scalare segue immediatamente che due vettori non nulli $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OQ}$ hanno prodotto scalare nullo se e solo se le rette r_{OP} e r_{OQ} sono tra loro ortogonali. Ciò suggerisce la:

Definizione 33.8 Due vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OQ}$ sono detti **ortogonali** se $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0$. △

Osservazione 33.9 Dalla definizione di prodotto scalare segue immediatamente che il vettore nullo è ortogonale a ogni vettore. △

Notazione 33.10 Utilizzeremo la scrittura $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ per indicare che i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono ortogonali. Più avanti utilizzeremo il simbolo $\perp$ anche per indicare l'ortogonalità tra rette e piani. △

33.3 Basi ortogonali e ortonormali nel piano

Sia data una base di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Con semplici passaggi, applicando le proprietà del prodotto scalare, vediamo che:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + y_1y_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

Pertanto, se conosciamo i prodotti scalari $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$, è possibile calcolare il prodotto scalare di due qualsiasi vettori decomposti rispetto alla base assegnata.

Vogliamo ora scegliere particolari basi di $V^2(O)$ per le quali il calcolo del prodotto scalare di due vettori risulti particolarmente semplice.

Definizione 33.11 Una **base** di $V^2(O)$ si dice **ortogonale** se è formata da vettori $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ ed $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ fra loro ortogonali. △

Supponiamo allora di avere una base ortogonale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Poiché $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = 0$ la formula data sopra per il prodotto scalare tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in questo caso si riduce a:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + y_1y_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2.$$

Abbiamo visto che la scelta di una base ortogonale rende la formula del prodotto scalare molto più semplice. Ma possiamo fare di più.

Definizione 33.12 Una **base** di $V^2(O)$ si dice **ortonormale** se è formata da vettori $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ ed $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ di norma 1 e fra loro ortogonali. △

In questo caso la formula per il prodotto scalare è ancora più semplice:

Teorema 33.13 *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Si ha allora:*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Utilizzando il teorema 33.5 troviamo subito la:

Proposizione 33.14 *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e sia dato il vettore $\boldsymbol{v} := x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$. Si ha allora:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Occorre fare attenzione a non utilizzare la formula data dal teorema 33.13 se utilizziamo decomposizioni rispetto a basi non ortonormali. In tal caso occorre utilizzare la formula più generale data all'inizio del paragrafo.

33.4 Basi ortogonali e ortonormali nello spazio

Sia data una base di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ e siano dati i vettori: $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$. In maniera analoga a quanto avviene nel piano si trova allora che:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &= x_1x_2\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + y_1y_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + z_1z_2\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + (x_1y_2 + y_1x_2)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + (x_1z_2 + z_1x_2)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 + (y_1z_2 + z_1y_2)\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Vogliamo ora scegliere particolari basi di $V^3(O)$ per le quali il calcolo del prodotto scalare di due vettori risulti particolarmente semplice. Il modo di procedere è analogo a quello svolto nella geometria del piano. Estendiamo innanzitutto alla geometria dello spazio la definizione di basi ortogonali e di basi ortonormali vista nel caso della geometria del piano.

Definizione 33.15 Una base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$, $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ ed $\boldsymbol{e}_3 := \overrightarrow{OU_3}$ di $V^3(O)$ si dice:

- **ortogonale** se è formata da vettori a due a due ortogonali;
- **ortonormale** se è formata da vettori a due a due ortogonali e di norma uguale a 1. △

Teorema 33.16 *Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata da $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$. Si ha allora:*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ∎

Utilizzando il teorema 33.5 troviamo subito la:

Proposizione 33.17 *Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ e sia dato il vettore $\boldsymbol{v} := x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Si ha allora:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Come nel caso del piano, occorre fare attenzione a non utilizzare queste formule con decomposizioni rispetto a basi non ortonormali.

33.5 Calcolo di angoli

Se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono due vettori non nulli, sappiamo che per definizione si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}.$$

Ma allora:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|}.$$

Dalla formula precedente vediamo che se conosciamo il prodotto scalare dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e le loro norme, possiamo ottenere il coseno dell'angolo compreso tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Poiché l'angolo tra due vettori è compreso tra 0 e π (estremi inclusi) e in tale intervallo angoli diversi hanno coseni diversi, possiamo calcolare l'angolo compreso tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Questo procedimento è particolarmente comodo se abbiamo a che fare con vettori decomposti rispetto a una base ortonormale.

Esempio 33.18 Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$. Vogliamo calcolare l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$. Calcoliamo il prodotto scalare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 = -13.$$

Ora calcoliamo la norma di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$

Dunque abbiamo

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{-13}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}.$$

△

Possiamo riassumere quanto visto nella:

Proposizione 33.19 *Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in $V^2(O)$ o $V^3(O)$ l'angolo tra loro compreso è dato dalla formula:*

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|}.$$

Volendo, possiamo dare più esplicitamente una formula per l'angolo tra due vettori decomposti rispetto a una base ortonormale:

Proposizione 33.20 *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Se $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$ sono vettori non nulli si ha*

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

In particolare

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \quad \textit{se e solo se} \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Proposizione 33.21 *Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$. Se $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$ sono vettori non nulli si ha*

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

In particolare

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \quad \textit{se e solo se} \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Esercizio di base 33.22 Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Calcolare l'angolo formato dalle coppie di vettori:

a. $\boldsymbol{v} := 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$;

b. $\boldsymbol{v} := 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$. △

33.6 Soluzioni degli esercizi di base

EB.33.6 Se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, per definizione di prodotto scalare abbiamo $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$, per definizione di norma abbiamo $\|\boldsymbol{v}\| = 0$: pertanto vale l'uguaglianza cercata.

Se $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, notiamo che l'angolo formato da $\boldsymbol{v}$ con sé stesso è nullo e, quindi, $\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} = 1$. Pertanto:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} = \|\boldsymbol{v}\|^2,$$

come volevamo dimostrare.

EB.33.22

a. Si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$$

e

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

Dunque abbiamo

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = -\frac{4}{\sqrt{377}}.$$

b. Si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Dunque i due vettori formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ (non è necessario calcolare la norma dei due vettori in questo caso).

33.7 Sunto

Norma di un vettore geometrico

Definizione Dato un vettore $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$, chiamiamo **norma** di $\boldsymbol{v}$ la distanza tra il suo punto iniziale O e il suo punto finale P. Usiamo per la norma il simbolo $\|\boldsymbol{v}\|$. Dunque, per definizione, $\|\boldsymbol{v}\| := \mathrm{d}(O, P)$.△

L'operazione di norma quindi associa a ogni vettore di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$ un numero reale.

Teorema *La norma soddisfa le proprietà:*

1. $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$*;*

2. $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$*;*

3. $\|a\boldsymbol{v}\| = |a|\|\boldsymbol{v}\|$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\boldsymbol{v}$*;*

4. $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$.

La quarta proprietà viene detta ***disuguaglianza triangolare****.*

Prodotto scalare di vettori geometrici

Definizione Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ di $V^2(O)$ o di $V^3(O)$, associamo ad essi un numero reale, detto **prodotto scalare** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e indicato con il simbolo $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, nel seguente modo:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := \begin{cases} \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\| \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} & \text{se } \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \text{ e } \boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ oppure } \boldsymbol{w} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Abbiamo quindi introdotto un'**operazione di prodotto scalare** sia nello spazio vettoriale $V^2(O)$ che nello spazio vettoriale $V^3(O)$. △

Teorema *Il prodotto scalare (di* $V^2(O)$ *o di* $V^3(O)$*) soddisfa le proprietà:*

1. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$*;*

2. $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_2$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$*,* $\boldsymbol{w}_1$ *e* $\boldsymbol{w}_2$*;*

3. $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v}_1$*,* $\boldsymbol{v}_2$ *e* $\boldsymbol{w}$*;*

4. $\boldsymbol{v} \times (h\boldsymbol{w}) = (h\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = h(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$*,* $\boldsymbol{w}$*, e* $h \in \mathbb{R}$*;*

5. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{v}$*;*

6. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Teorema *Per ogni vettore* $\boldsymbol{v}$ *di* $V^2(O)$ *o di* $V^3(O)$ *si ha:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}}.$$

Teorema *Dati due punti* P_1 *e* P_2 *si ha:*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\|.$$

Definizione Due vettori $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$ e $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OQ}$ sono detti **ortogonali** se $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0$. △

Osservazione Dalla definizione di prodotto scalare segue immediatamente che il vettore nullo è ortogonale a ogni vettore. △

Notazione Utilizzeremo la scrittura $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ per indicare che i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono ortogonali. △

Basi ortogonali e ortonormali

Definizione Una base di $V^2(0)$ o di $V^3(O)$ si dice:

- **ortogonale** se è formata da vettori a due a due ortogonali;

- **ortonormale** se è formata da vettori a due a due ortogonali e di norma uguale a 1. △

Teorema *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Si ha allora:*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Proposizione *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ e sia dato il vettore $\boldsymbol{v} := x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$. Si ha allora:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Teorema *Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ e siano dati i vettori $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$. Si ha allora:*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Proposizione *Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ e sia dato il vettore $\boldsymbol{v} := x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Si ha allora:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calcolo di angoli

Proposizione *Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in $V^2(O)$ o $V^3(O)$ l'angolo tra loro compreso è dato dalla formula:*

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}.$$

Proposizione *Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Se $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$ sono vettori non nulli si ha*

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

In particolare

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \quad \text{se e solo se} \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Proposizione *Sia data una base ortonormale di* $V^3(O)$ *formata dai vettori* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *e* $\boldsymbol{e}_3$. *Se* $\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3$ *e* $\boldsymbol{w} := x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3$ *sono vettori non nulli si ha*

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

In particolare

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \quad \textit{se e solo se} \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

33.8 Esercizi

E.33.1 Sia data una base di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ tali che $\|\boldsymbol{e}_1\| = 2$, $\|\boldsymbol{e}_2\| = \frac{1}{3}$ e i vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ formino un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Calcolare il prodotto scalare dei vettori $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$. Calcolare poi l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

E.33.2 Sia data una base ortonormale di $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Calcolare l'angolo formato dalle coppie di vettori:

a. $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := 1\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$;

b. $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$;

c. $\boldsymbol{v} := -3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

E.33.3 Sia data una base ortonormale di $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$. Calcolare l'angolo formato dalle coppie di vettori:

a. $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$;

b. $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} := 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$;

c. $\boldsymbol{v} := -2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} := -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$.

E.33.4 In questo esercizio i vettori sono dati tramite componenti rispetto a una base ortonormale di $V^2(O)$. Sia dato il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(1, 2)$.

a. Verificare se il vettore $\boldsymbol{u}$ di componenti $(-1, 1)$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$.

b. Verificare se il vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti $(2, -1)$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$.

c. Determinare tutti i vettori ortogonali al vettore $\boldsymbol{v}$.

E.33.5 In questo esercizio i vettori sono dati tramite componenti rispetto a una base ortonormale di $V^2(O)$. Determinare tutti i vettori di norma 1 e ortogonali al vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(1, 3)$.

33.9 Soluzioni degli esercizi

E.33.1 Notiamo preliminarmente che

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \times (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = 2\|\boldsymbol{e}_1\|^2 + 3\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 - 2\|\boldsymbol{e}_2\|^2 \\ = 2 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{79}{9}.\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la norma di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in modo da poter determinare l'angolo da essi formato:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\| &= \sqrt{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}} = \sqrt{(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \times (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)} \\ &= \sqrt{4\|\boldsymbol{e}_1\|^2 - 4\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + \|\boldsymbol{e}_2\|^2} = \sqrt{\frac{133}{9}}, \\ \|\boldsymbol{w}\| &= \sqrt{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) \times (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)} = \\ &= \sqrt{\|\boldsymbol{e}_1\|^2 + 4\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + 4\|\boldsymbol{e}_2\|^2} = \sqrt{\frac{52}{9}}.\end{aligned}$$

Dunque:

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{\frac{79}{9}}{\sqrt{\frac{133}{9}}\sqrt{\frac{52}{9}}} = \frac{79}{2\sqrt{1729}}.$$

E.33.2

a. Si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 2 \cdot 1 + 3(-3) = -7$$

e

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Dunque abbiamo

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{-7}{\sqrt{13}\sqrt{10}} = -\frac{7}{\sqrt{130}}.$$

b. Si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 2 \cdot 1 - 1(-1) = 3$$

e

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Dunque abbiamo

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

c. Si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -2$$

e

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Dunque abbiamo

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{-2}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

E.33.3

a. Si ha
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0.$$
Dunque i due vettori formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ (non è necessario calcolare la norma dei due vettori in questo caso).

b. Si ha
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$
e
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$
Dunque abbiamo
$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$
cioè
$$\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{\pi}{3}$$

c. Si ha
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 10$$
e
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20} \quad \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{14}.$$
Dunque abbiamo
$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{7}}.$$

E.33.4

a. Si ha:
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$
I due vettori non sono ortogonali.

b. Si ha:
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$
I due vettori sono ortogonali.

c. Indichiamo con (a, b) le componenti di un vettore $\boldsymbol{t}$ generico. Imponiamo che i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{t}$ siano ortogonali:
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{t} = 1 \cdot a + 2 \cdot b = 0.$$
Pertanto
$$a = -2b.$$
I vettori $\boldsymbol{t}$ ortogonali al vettore $\boldsymbol{v}$ hanno quindi componenti $(-2b, b)$, dove b è un numero reale qualsiasi. Notiamo che tali vettori $\boldsymbol{t}$ sono dati dai vettori $-b\boldsymbol{w}$.

E.33.5 Siano (a, b) le componenti di un vettore $\boldsymbol{w}$ generico. Imponendo la condizione di ortogonalità, troviamo che i vettori $\boldsymbol{w}$ ortogonali a $\boldsymbol{v}$ hanno componenti $(-3b, b)$, al variare di b in $\mathbb{R}$. Cerchiamo tra questi quelli che hanno norma uguale a 1. Abbiamo:
$$\|\boldsymbol{w}\|^2 = 9b^2 + b^2 = 10b^2 = 1,$$
vale a dire
$$b = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$
Abbiamo quindi due vettori. Il primo ha componenti:
$$\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Il secondo ha componenti:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

CAPITOLO 34

Riferimenti cartesiani

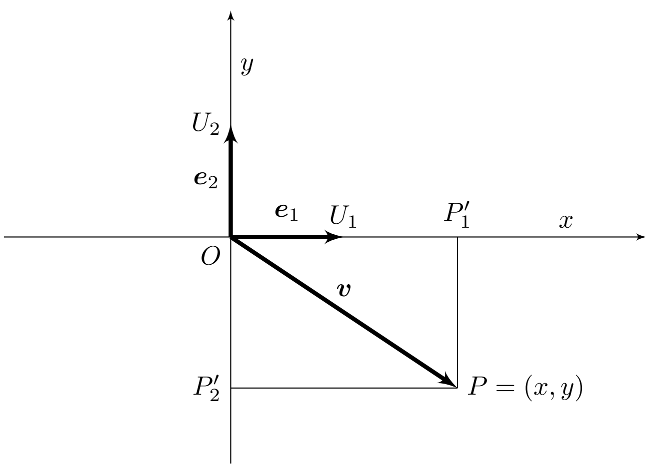
Nel capitolo 21 abbiamo introdotto i riferimenti affini nel piano e nello spazio e abbiamo visto come tramite essi sia possibile studiare proprietà quali, ad esempio, il parallelismo e l'incidenza tra rette e piani, l'allineamento e la complanarità di punti e così via. Finora non abbiamo visto come trattare proprietà quali la distanza tra punti, rette e piani, l'ortogonalità tra rette piani e così via. Per far questo in maniera conveniente dobbiamo introdurre un tipo particolare di riferimenti, i cosiddetti riferimenti cartesiani.

34.1 Sistemi di riferimento cartesiani

Definizione 34.1 Sia dato un riferimento affine nel piano, vale a dire un punto O del piano e una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ e $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ di $V^2(O)$. Il riferimento è detto **cartesiano** o **euclideo** se la base assegnata è ortonormale. A ogni punto P del piano vengono associate le **coordinate cartesiane** (x, y) definite da

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OU_1} + y\overrightarrow{OU_2}.$$

△



In maniera del tutto analoga possiamo definire i sistemi di riferimento cartesiani nello spazio

Definizione 34.2 Sia dato un riferimento affine nello spazio, vale a dire un punto O dello spazio e una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$, $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ e $\boldsymbol{e}_3 := \overrightarrow{OU_3}$ di $V^3(O)$. Il riferimento è detto **cartesiano** o **euclideo** se la base assegnata è ortonormale. A ogni punto P dello spazio vengono associate le **coordinate cartesiane** (x, y, z) definite da

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OU_1} + y\overrightarrow{OU_2} + z\overrightarrow{OU_3}. \qquad \triangle$$

34.2 Distanza tra punti

Supponiamo di aver fissato, una volta per tutte, un sistema di riferimento cartesiano (nel piano o nello spazio).

Consideriamo ora due punti $P_1 := (x_1, y_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2)$. Questo significa che $\overrightarrow{OP_1} = x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2$ e $\overrightarrow{OP_2} = x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$. Per il teorema 33.7 abbiamo allora

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\|,$$

e, dunque,

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|(x_2 - x_1)\boldsymbol{e}_1 + (y_2 - y_1)\boldsymbol{e}_2\|.$$

Ma sappiamo che calcolare la norma di un vettore decomposto rispetto a una base ortonormale è particolarmente semplice (proposizione 33.14). Otteniamo così il:

Teorema 34.3 *Dati due punti $P_1 := (x_1, y_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2)$ del piano si ha*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esempio 34.4 siano dati i punti $P_1 := (3, -1)$ e $P_2 := (2, 6)$. Allora la distanza tra P_1 e P_2 è:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(2-3)^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{50}. \qquad \triangle$$

In maniera del tutto analoga (usando la proposizione 33.17) possiamo dare una formula per la distanza tra due punti nello spazio:

Teorema 34.5 *Dati due punti $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ dello spazio si ha*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Esempio 34.6 Dati i punti $P_1 := (1, 2, 3)$ e $P_2 := (0, 1, -1)$ si ha:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{18}. \qquad \triangle$$

34.3 Sunto

Sistemi di riferimento cartesiani

Definizione Sia dato un riferimento affine nel piano, vale a dire un punto O del piano e una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$ e $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ di $V^2(O)$. Il riferimento è detto **cartesiano** o **euclideo** se la base assegnata è ortonormale. A ogni punto P del piano vengono associate le **coordinate cartesiane** (x, y) definite da

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OU_1} + y\overrightarrow{OU_2}. \qquad \triangle$$

Definizione Sia dato un riferimento affine nello spazio, vale a dire un punto O dello spazio e una base $\boldsymbol{e}_1 := \overrightarrow{OU_1}$, $\boldsymbol{e}_2 := \overrightarrow{OU_2}$ e $\boldsymbol{e}_3 := \overrightarrow{OU_3}$ di $V^3(O)$. Il riferimento è detto **cartesiano** o **euclideo** se la base assegnata è ortonormale. A ogni punto P dello spazio vengono associate le **coordinate cartesiane** (x, y, z) definite da

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OU_1} + y\overrightarrow{OU_2} + z\overrightarrow{OU_3}. \qquad \triangle$$

Distanza tra punti

Supponiamo di aver fissato, una volta per tutte, un sistema di riferimento cartesiano (nel piano o nello spazio).

Teorema *Dati due punti $P_1 := (x_1, y_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2)$ del piano si ha*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Teorema *Dati due punti $P_1 := (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 := (x_2, y_2, z_2)$ dello spazio si ha*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

CAPITOLO 35

Geometria analitica metrica del piano

In questo capitolo fissiamo una volta per tutte un sistema di riferimento cartesiano nel piano. Sia cioè data un'origine O e una base ortonormale per $V^2(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$. Vogliamo tradurre in formule algebriche alcune proprietà del piano legate alla distanza e alla ortogonalità.

35.1 Ortogonalità fra rette

Supponiamo di voler stabilire se due rette r e s siano o meno ortogonali. Per far ciò possiamo semplicemente considerare un vettore direttore $\boldsymbol{v}$ di r e un vettore direttore $\boldsymbol{w}$ di s. È del tutto ovvio che le rette sono ortogonali se e solo se lo sono i rispettivi vettori direttori. Sappiamo che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Possiamo dare dunque il:

Teorema 35.1 *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1)$ *e* $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2)$*, le due rette sono ortogonali se e solo se*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

Esempio 35.2 Dati il punto $A := (1, 2)$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

vogliamo determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A e ortogonale alla retta r.

Una generica retta passante per A ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 2 + mt \end{cases}$$

Dobbiamo determinare una coppia (l, m) in modo tale da ottenere una retta ortogonale a r. Poiché r ha parametri direttori $(-3, -1)$, dal teorema precedente abbiamo la condizione

$$-3 \cdot l + (-1) \cdot m = 0,$$

da cui otteniamo $m = -3l$. Pertanto $(l, m) = (l, -3l)$ con $l \in \mathbb{R}^*$. I vettori che otteniamo sono tutti proporzionali tra loro, quindi ciascuno di essi individua la stessa direzione. Ponendo, per esempio, $l := 1$ otteniamo le equazioni parametriche della retta s:

$$s \colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

△

Esempio 35.3 Dati il punto A e la retta r dell'esempio 35.2, vogliamo determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto A sulla retta r.

Sappiamo che la proiezione del punto A sulla retta r è il punto di intersezione della retta r con la retta s passante per A e ortogonale a r. Nell'esempio 35.2 abbiamo già determinato s. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 3 - 3t = 1 + u \\ 2 - t = 2 - 3u \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data da $(t = \frac{3}{5},\ u = \frac{1}{5})$. Sostituendo il valore $\frac{3}{5}$ a t nelle equazioni parametriche di r (oppure il valore $\frac{1}{5}$ a u nelle equazioni parametriche di s) otteniamo:

$$H = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

△

Esempio 35.4 Dati il punto A e la retta r dell'esempio 35.2 vogliamo determinare il punto B simmetrico del punto A rispetto alla retta r.

Sappiamo che il punto B cercato è il punto tale che la proiezione H di A su r è il punto medio di AB.

Le coordinate (x, y) di B devono quindi verificare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{2} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{2 + y}{2} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Quindi:

$$B = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

△

Esempio 35.5 Dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (3, 8)$, vogliamo determinare le equazioni parametriche dell'asse s del segmento AB.

Sappiamo che l'asse del segmento è la retta passante per il punto medio M di AB e ortogonale alla retta r passante per A e B. Abbiamo quindi $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (2, 5)$. L'asse s ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + \ \ lt \\ y = 5 + mt \end{cases}$$

con il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (l, m) ortogonale a un vettore direttore di r. La retta r, passando per A e B, ha parametri direttori $(3 - 1, 8 - 2) = (2, 6)$. Prendiamo allora il vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti $(2, 6)$ come vettore direttore di r.

Imponiamo l'ortogonalità tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 2l + 6m = 0.$$

Ponendo $m = 1$, otteniamo $l = -3$. L'asse ha quindi equazioni parametriche:

$$s\colon \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 + \ \ t \end{cases}$$ △

Gli esempi precedenti suggeriscono che è possibile dare anche una definizione di ortogonalità tra un vettore e una retta.

Definizione 35.6 Un vettore $\boldsymbol{w}$ si dice **ortogonale** a una retta r se è ortogonale a tutti i vettori paralleli alla retta r. △

Osservazione 35.7 Si verifica facilmente che un vettore $\boldsymbol{w}$ è ortogonale alla retta r se e solo se è ortogonale a un vettore direttore di r. △

Esercizio di base 35.8 Dimostrare l'osservazione precedente.

Nell'esempio 35.2 abbiamo cercato i vettori ortogonali al vettore direttore $(-3, -1)$ di r. Svolgendo i calcoli abbiamo visto che i vettori ortogonali a $(-3, -1)$ (e, quindi, a r) formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Si può facilmente mostrare che ciò ha validità generale:

Osservazione 35.9 L'insieme dei vettori ortogonali a una retta forma un sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ di dimensione 1. △

Esercizio di base 35.10 Dimostrare l'osservazione precedente.

Esempio 35.11 Sia data la retta $r\colon 2x + 3y - 7 = 0$ Consideriamo il vettore $\boldsymbol{v}$ avente le componenti $(2, 3)$ uguali ai coefficienti delle variabili x e y nell'equazione cartesiana di r. Vogliamo mostrare che il vettore $\boldsymbol{v}$ è ortogonale alla retta r. Per far ciò verifichiamo che esso è ortogonale a un vettore direttore $\boldsymbol{w}$ di r. Un vettore $\boldsymbol{w}$ siffatto ha come componenti le differenze delle coordinate di due punti distinti di r. Ponendo $x = 0$ nell'equazione della retta r otteniamo il punto $A := \left(0, \frac{7}{3}\right)$ della retta r. Ponendo $y = 0$ otteniamo il punto $B := \left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Pertanto un vettore parallelo alla retta r è $\boldsymbol{w} := \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{3}\right)$. Si ha chiaramente $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0$. Il vettore $\boldsymbol{v}$ è pertanto ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ e quindi alla retta r. △

Quello che abbiamo appena visto nell'esempio precedente vale per ogni retta:

Teorema 35.12 *Data una retta r di equazione cartesiana*

$$r\colon ax + by + c = 0,$$

il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (a, b) (che è non nullo) è ortogonale alla retta r.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a un vettore direttore di r. Consideriamo la retta r' passante per O e parallela alla retta r. Preso su di essa un punto di coordinate (l, m) diverso da O, il vettore di componenti (l, m) può essere preso come vettore direttore di r. Il vettore $\boldsymbol{v}$ è allora ortogonale a r se e solo se $al + bm = 0$. Osserviamo che la retta r' ha equazione

$$ax + by = 0.$$

Poiché (l, m) appartiene a r' si ha:

$$al + bm = 0,$$

che è la condizione cercata. ■

Nota 35.13 Il teorema precedente ci dice che il vettore (a, b) è **ortogonale** alla retta r non che è parallelo ad essa. Attenzione dunque a non confondere le due cose e a dire che (a, b) sono i parametri direttori della retta r di equazione $ax + by + c = 0$. Questo non è vero. △

Questo teorema ci permette di verificare facilmente l'ortogonalità tra due rette le cui equazioni siano date in forma cartesiana. Se infatti r e s sono due rette del piano e se $\boldsymbol{v}$ è un vettore non nullo ortogonale a r e $\boldsymbol{w}$ è un vettore non nullo ortogonale a s si vede immediatamente che r è ortogonale a s se e solo se $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a $\boldsymbol{w}$. Abbiamo dunque il:

Teorema 35.14 *Le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

sono ortogonali se e solo se

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Esempio 35.15 Le rette

$$r\colon 2x - y + 7 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon 4x + 8y - 21 = 0$$

sono ortogonali. Infatti $2 \cdot 4 + (-1) \cdot 8 = 0$. △

Esempio 35.16 Sia data la retta r di equazione cartesiana

$$r\colon x + 2y + 3 = 0.$$

Vogliamo determinare un'equazione cartesiana della retta s ortogonale ad r e passante per $A := (3, 5)$.

Consideriamo il fascio di rette passanti per A:

$$a(x-3)+b(y-5)=0.$$

Imponendo la condizione di ortogonalità tra le due rette otteniamo $1\cdot a+2\cdot b=0$ e quindi $a=-2b$. Ponendo $b=1$ otteniamo

$$-2(x-3)+(y-5)=0,$$

cioè

$$s\colon -2x+y+1=0. \qquad \triangle$$

Esempio 35.17 Riprendiamo l'esempio 35.5 in cui abbiamo trovato le equazioni parametriche dell'asse s del segmento di estremi i punti $A\coloneqq(1,2)$ e $B\coloneqq(3,8)$. Ora vogliamo determinare un'equazione cartesiana di s.

Dal momento che abbiamo trovato equazioni parametriche di s, potremmo ottenere da esse un'equazione cartesiana. Vogliamo però determinare direttamente un'equazione cartesiana di s senza passare per le equazioni parametriche.

Abbiamo già visto che il punto medio di A e B è il punto $M\coloneqq(2,5)$. Consideriamo il fascio di rette passanti per M:

$$a(x-2)+b(y-5)=0.$$

Dobbiamo determinare la coppia (a,b) in modo tale da ottenere l'asse. Il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (a,b), essendo ortogonale all'asse, dovrà essere parallelo alla retta r congiungente i punti A e B. Possiamo quindi porre la coppia (a,b) uguale ai parametri direttori della retta r. Quindi poniamo $a\coloneqq2$ e $b\coloneqq6$ (ricordiamo che nell'esempio 35.5 abbiamo già calcolato i parametri direttori di r). L'asse s ha quindi equazione cartesiana:

$$2(x-2)+6(y-5)=0$$

o, equivalentemente,

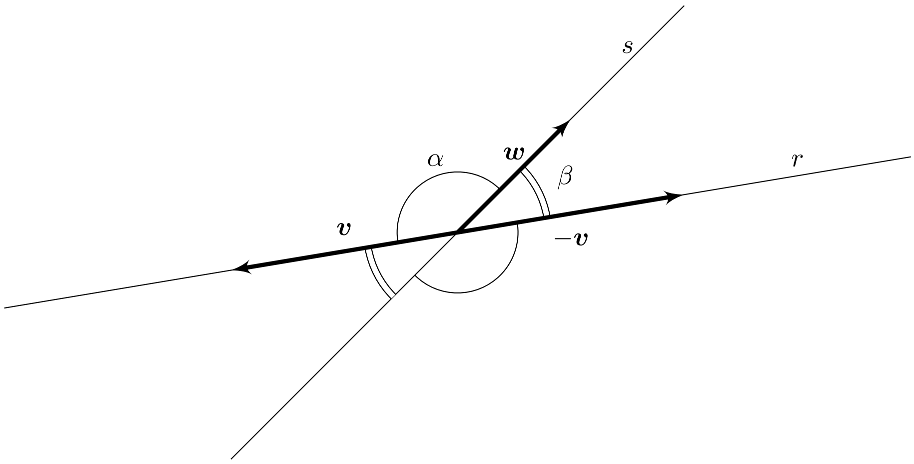
$$x+3y-17=0. \qquad \triangle$$

35.2 Angoli tra rette

Finora abbiamo visto come stabilire se due rette sono ortogonali. Supponiamo ora, più in generale, di voler determinare l'angolo formato da due rette r ed s. Notiamo innanzitutto che parlare di "angolo" formato da due rette è ambiguo. Consideriamo innanzitutto il caso in cui r e s siano incidenti. In tal caso esse formano infatti quattro angoli: nel caso particolare in cui le rette sono ortogonali tutti questi angoli sono retti, ma in generale questi angoli sono (solo) a due a due uguali. Tuttavia, se determiniamo l'ampiezza di uno di questi angoli, quello ad esso adiacente è il suo supplementare[1]. Consideriamo ora il caso in cui le due rette siano parallele (coincidenti oppure no): per convenzione diciamo che gli angoli che esse formano sono 0 e π, in questo modo anche in questo caso gli angoli sono fra loro supplementari.

[1]Ricordiamo che due angoli si dicono supplementari se la loro somma è uguale a un angolo piatto.

Per determinare gli angoli formati da due rette r e s (non importa se incidenti o parallele) possiamo considerare un vettore direttore $\boldsymbol{v}$ di r e un vettore direttore $\boldsymbol{w}$ di s. L'angolo α formato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ è uguale a uno degli angoli formati da r e s, mentre uno degli altri angoli β formato da r e s è il supplementare di α. Sappiamo che il vettore direttore di una retta non è univocamente determinato. Cosa succede se consideriamo vettori direttori diversi? Se, ad esempio, prendiamo come vettore direttore di r il vettore $-\boldsymbol{v}$ e utilizziamo come vettore direttore di s il vettore $\boldsymbol{w}$, l'angolo formato da questi due vettori direttori sarà β e il suo supplementare α. Otteniamo comunque la stessa coppia di angoli. Ciò avviene qualunque siano i vettori direttori che scegliamo per r e s. Tutto ciò può essere chiarito meglio dal prossimo disegno che si riferisce al caso di rette incidenti: per comodità abbiamo considerato due rette r e s passanti per l'origine in modo da poter disegnare i vettori direttori sovrapposti alle rette.



Dal momento che gli angoli α e β sono supplementari, sono legati dalla relazione $\cos\alpha = -\cos\beta$. Ricordiamo ora che, grazie alla proposizione 33.19 siamo in grado di calcolare l'angolo tra due vettori. Abbiamo così la:

Proposizione 35.18 *Date due rette r ed s di vettori direttori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r ed s sono dati dalle formule:*

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}.$$

Se ora le due rette sono date in forma parametrica utilizzando la proposizione 33.20 possiamo in maniera più esplicita dare il:

Teorema 35.19 *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} \coloneqq (l_1, m_1)$ e $\boldsymbol{w} \coloneqq (l_2, m_2)$, gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r e s sono dati dalle formule:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Il teorema 35.12 ci dice come determinare un vettore ortogonale non nullo ad una retta assegnata tramite equazione cartesiana. Poiché l'angolo tra due vettori non nulli l'uno ortogonale a una retta r, l'altro ortogonale a una retta s coincide con uno degli angoli formati dalle rette r e s abbiamo immediatamente il:

Teorema 35.20 *Siano date le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Posto $\boldsymbol{v} := (a_1, b_1)$ e $\boldsymbol{w} := (a_2, b_2)$, gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r e s sono dati dalle formule:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Consideriamo ora la retta

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Sappiamo che il suo vettore direttore $\boldsymbol{v}$ di componenti (l, m) è parallelo alla retta r.

Prendiamo ora il vettore:

$$\boldsymbol{w} := \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

È anch'esso un vettore direttore della retta r: inoltre ha norma uguale a 1. Dalla proposizione 33.14 sappiamo che la norma di $\boldsymbol{v}$ è uguale a $\sqrt{l^2 + m^2}$. Dunque le componenti di $\boldsymbol{w}$ relative alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ sono:

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right).$$

Calcoliamo ora gli angoli formati da $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Dalla proposizione 33.20, tenuto conto che le componenti del vettore $\boldsymbol{e}_1$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono $(1, 0)$ otteniamo

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_1} = \frac{l \cdot 1 + m \cdot 0}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Analogamente, si vede che:

$$\cos\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_2} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Dunque vediamo che le componenti del vettore $\boldsymbol{w}$ hanno un significato geometrico. Abbiamo infatti:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{w}\boldsymbol{e}_1} = \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_1} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},$$
$$\cos \widehat{\boldsymbol{w}\boldsymbol{e}_2} = \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_2} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

Tutto ciò giustifica la:

Definizione 35.21 Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

i numeri:

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)$$

vengono chiamati **coseni direttori** della retta r. △

Osservazione 35.22 Una retta r ha infinite equazioni parametriche. Cambiando le equazioni parametriche della retta r, i suoi coseni direttori o rimangono invariati oppure sono moltiplicati entrambi per -1. Da ciò deriva che i coseni direttori di una retta sono determinati a meno del segno. △

Esempio 35.23 La retta r passante per i punti $O := (0, 0)$ e $A := \left(1, \sqrt{3}\right)$ ha equazioni parametriche:

$$r\colon \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$$

I suoi coseni direttori sono pertanto:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

e anche i loro opposti:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

△

35.3 Distanza tra un punto e una retta

Per calcolare la distanza tra un punto A e una retta r del piano possiamo cercare il punto della retta r più vicino al punto A. Questo punto è la proiezione ortogonale di A su r. Abbiamo già visto come determinare la proiezione ortogonale di un punto su una retta.

Esempio 35.24 Vogliamo ora determinare la distanza tra il punto A e la retta r dati nell'esempio 35.2.

Sappiamo che la distanza tra A e r è data dalla distanza tra A e la sua proiezione ortogonale H su r. Nell'esempio 35.3 abbiamo calcolato il punto H, cioè $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$. Pertanto abbiamo:

$$\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \sqrt{\left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \qquad \triangle$$

Abbiamo quindi delineato un procedimento per il calcolo della distanza tra un punto e una retta. Diamo ora una formula che permette di calcolare direttamente questa distanza senza bisogno di determinare esplicitamente la proiezione ortogonale del punto sulla retta.

Teorema 35.25 *Sia dato il punto $P_0 \coloneqq (x_0, y_0)$ e la retta $r\colon ax + by + c = 0$. La distanza tra il punto P_0 e la retta r è data da:*

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dimostrazione Sappiamo che si ha $\mathrm{d}(P_0, r) = \mathrm{d}(P_0, H)$ dove H è la proiezione del punto P_0 sulla retta r. La retta s passante per P_0 e ortogonale alla retta r ha equazioni parametriche:

$$s\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Cerchiamo le coordinate del punto H di intersezione tra r e s. Sostituendo le equazioni di s nell'equazione cartesiana di r otteniamo:

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0.$$

Pertanto il valore di t_1 di t che determina il punto H è:

$$t_1 = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Sostituendo nelle equazioni parametriche di s otteniamo le coordinate del punto H:

$$H = (x_0 + at_1, y_0 + bt_1).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P_0, r) = \mathrm{d}(P_0, H) &= \sqrt{(x_0 + at_1 - x_0)^2 + (y_0 + bt_1 - y_0)^2} \\ &= \sqrt{(at_1)^2 + (bt_1)^2} = |t_1|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 35.26 Nell'esempio 35.24 abbiamo calcolato la distanza tra il punto $A \coloneqq (1, 2)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Vogliamo ricalcolare la distanza utilizzando la formula data dal teorema 35.25. Per far ciò troviamo un'equazione cartesiana della retta r. Ricavando t dalla seconda equazione otteniamo $t = 2 - y$. Sostituendo nella prima otteniamo:

$$r \colon x - 3y + 3 = 0.$$

Abbiamo pertanto:

$$\mathrm{d}(A, r) = \frac{|1 - 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1+9}} = \frac{2}{\sqrt{10}}. \qquad \triangle$$

35.4 Distanza tra due rette

Possiamo applicare la formula della distanza tra punto e retta in varie circostanze. Siano date ad esempio due rette r e s. Ricordiamo che la loro distanza è uguale a 0 se le due rette sono coincidenti o se sono incidenti in un punto. Se invece le rette sono parallele e distinte, la loro distanza si può calcolare molto facilmente perché si ha:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(P, s)$$

dove P è un punto qualunque di r.

Esempio 35.27 Calcoliamo la distanza tra la retta $r \colon 3x + 4y + 3 = 0$ e la retta $s \colon 3x + 4y + 7$.

Scegliamo un punto $A \in r$. Per esempio, prendiamo $A \coloneqq (-1, 0)$. Abbiamo:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(A, s) = \frac{|3(-1) + 4 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}. \qquad \triangle$$

35.5 Bisettrici

La formula della distanza tra punto e retta ci è molto utile anche nella ricerca delle bisettrici di due rette incidenti. Sappiamo infatti che, date due rette incidenti r e s, ci sono due bisettrici degli angoli da esse formati e che i punti che stanno sulle bisettrici sono tutti e soli i punti equidistanti da r e s. Vediamo ciò con un esempio:

Esempio 35.28 Consideriamo le rette r e s:

$$r \colon 3x + 4y + 3 = 0 \quad \text{e} \quad s \colon 2x - 3y + 5 = 0.$$

Un punto generico $P \coloneqq (x, y)$ sta su una delle due bisettrici se e solo se è equidistante da r e s. La distanza di P da r è data da:

$$\mathrm{d}(P, r) = \frac{|3x + 4y + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y + 3|}{5}.$$

La distanza di P da s è data da:

$$\mathrm{d}(P, s) = \frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{13}}.$$

Dunque il punto P appartiene a una delle due bisettrici se e solo se:

$$\frac{|3x+4y+3|}{5} = \frac{|2x-3y+5|}{\sqrt{13}}.$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se una delle due equazioni seguenti è soddisfatta:

$$\frac{3x+4y+3}{5} = \frac{2x-3y+5}{\sqrt{13}},$$
$$\frac{3x+4y+3}{5} = -\frac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}.$$

Queste sono le equazioni delle due bisettrici che possono essere riscritte così:

$$\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)x+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{\sqrt{13}}\right)y+\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{\sqrt{13}}\right)=0,$$
$$\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{\sqrt{13}}\right)x+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)y+\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)=0. \qquad \triangle$$

L'esempio precedente può essere generalizzato dal:

Teorema 35.29 *Siano date le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x+b_1y+c_1=0 \quad e \quad s\colon a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Le equazioni delle bisettrici delle rette r e s sono:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

DIMOSTRAZIONE Sappiamo che l'insieme dei punti delle bisettrici di r e s coincide con l'insieme dei punti $P := (x,y)$ tali che $\mathrm{d}(P,r)=\mathrm{d}(P,s)$. Abbiamo pertanto:

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Da ciò segue la tesi. ■

35.6 Circonferenze

Teorema 35.30 *Sia $P_0 := (x_0,y_0)$ e sia r un numero reale non negativo. L'insieme dei punti appartenenti alla circonferenza $\mathcal{C}$ di centro P_0 e raggio r coincide con l'insieme dei punti $P := (x,y)$ le cui coordinate verificano l'equazione:*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$$

che viene detta ***equazione cartesiana della circonferenza****.*

L'insieme dei punti della circonferenza $\mathcal{C}$ è dato anche da tutti e soli i punti $P = (x, y)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ verificante le equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$$

che vengono dette ***equazioni parametriche*** *della circonferenza $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione Segue dalla definizione di circonferenza. ■

Esempio 35.31 La circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $A := (1, 2)$ e raggio uguale 3 ha equazione cartesiana:

$$\mathcal{C}\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 - 9 = 0$$

ed equazioni parametriche

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}$$

L'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ può essere così espansa:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0,$$

vale a dire:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

△

Nell'esempio 35.31 abbiamo espanso l'equazione di una circonferenza. Ciò può essere fatto in generale. Se abbiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

possiamo, con semplici passaggi, riscrivere l'equazione così:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Dunque la circonferenza $\mathcal{C}$ ha equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Ci chiediamo se, viceversa, ogni equazione di questo tipo rappresenta effettivamente una circonferenza. Vediamo qualche esempio.

Esempio 35.32 Ci chiediamo se l'equazione:

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y + 7 = 0$$

rappresenti una circonferenza. Cerchiamo di trasformare, tramite manipolazioni algebriche, questa equazione nell'equazione di una circonferenza. Proviamo a riscriverla così

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 4y + 4 - \frac{9}{4} - 4 + 7 = 0$$

da cui

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2+\frac{3}{4}=0,$$

o, equivalentemente,

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=-\frac{3}{4}.$$

Vediamo che il primo membro è una somma di quadrati, e, quindi, non può mai assumere il valore $-\frac{3}{4}$. Pertanto l'equazione assegnata non è l'equazione di una circonferenza. △

Esempio 35.33 Consideriamo ora l'equazione:

$$x^2+y^2+3x-4y+3=0.$$

Proviamo a riscriverla così

$$x^2+3x+\frac{9}{4}+y^2-4y+4-\frac{9}{4}-4+3=0$$

da cui

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2-\frac{13}{4}=0.$$

Dunque questa equazione rappresenta la circonferenza di centro $\left(-\frac{3}{2},2\right)$ e di raggio $\sqrt{\frac{13}{4}}$. △

Esempio 35.34 I punti $A:=(2,1)$, $B:=(3,2)$ e $C:=(1,3)$ non sono allineati. Vogliamo determinare la circonferenza $\mathcal{C}$ passante per essi. Presentiamo due metodi alternativi.

Scriviamo l'equazione di una generica circonferenza:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

e imponiamo il passaggio per i punti A, B e C. Otteniamo in questo modo le condizioni:

$$\begin{cases} 2a+b+c+5=0\\ 3a+2b+c+13=0\\ a+3b+c+10=0\end{cases}$$

Risolvendo questo sistema nelle incognite a, b e c determiniamo l'unica soluzione:

$$\begin{cases} a=-\dfrac{11}{3}\\ b=-\dfrac{13}{3}\\ c=\dfrac{20}{3}\end{cases}$$

da cui troviamo l'equazione:

$$x^2+y^2-\frac{11}{3}x-\frac{13}{3}y+\frac{20}{3}=0.$$

Alternativamente, sappiamo che il centro della circonferenza è il circocentro, cioè il punto di intersezione degli assi del triangolo di vertici A, B e C. Consideriamo pertanto due assi e troviamone il punto di intersezione. L'asse del segmento AB ha equazione $x+y-4=0$. L'asse del segmento AC ha equazione $x-2y+\frac{5}{2}=0$. Intersecando queste due rette troviamo il centro della circonferenza $\mathcal{C}$, cioè il punto $D := \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$. Il suo raggio è dato dalla distanza di D da uno qualunque dei tre punti A, B e C:

$$\mathrm{d}(D,A) = \sqrt{\left(\frac{11}{6}-2\right)^2 + \left(\frac{13}{6}-1\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{18}}.$$

L'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ è quindi:

$$\mathcal{C}\colon \left(x-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{6}\right)^2 - \frac{25}{18} = 0.$$

Le equazioni parametriche di $\mathcal{C}$ sono:

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{11}{6} + \dfrac{5}{\sqrt{18}}\cos t \\ y = \dfrac{13}{6} + \dfrac{5}{\sqrt{18}}\sin t \end{cases}$$

$\triangle$

Esempio 35.35 Consideriamo il triangolo di vertici $A := (0,0)$, $B := (0,5)$ e $C := (4,3)$. Vogliamo determinare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza $\mathcal{C}$ inscritta nel triangolo ABC. Sappiamo che essa ha centro nell'incentro D del triangolo ABC. L'incentro D è il punto di intersezione delle bisettrici del triangolo ABC. Determiniamo pertanto due bisettrici interne del triangolo.

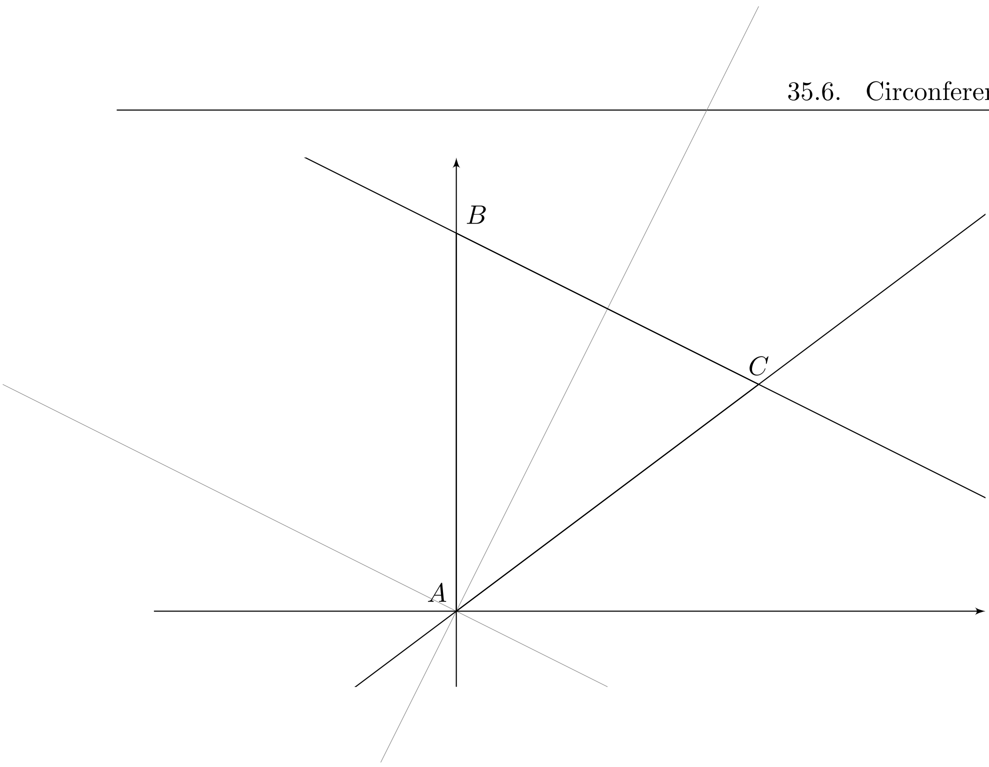
La retta r_{AB} passante per A e B ha equazione $x=0$, cioè è l'asse delle y, la retta r_{AC} passante per A e C ha equazione $3x-4y=0$. I punti delle due bisettrici di queste due rette sono i punti equidistanti da r_{AB} e r_{AC}. Dato un punto generico di coordinate (x,y) la sua distanza dall'asse delle y è uguale a $|x|$ mentre la sua distanza dalla retta r_{AC} è uguale a $\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$. Dunque il punto (x,y) appartiene a una delle due bisettrici se e solo se:

$$|x| = \frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}},$$

cioè

$$5|x| = |3x-4y|.$$

Ricordando che due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono uguali oppure opposte abbiamo che (x,y) appartiene a una delle due bisettrici se e solo se $5x = 3x-4y$ oppure $5x = -(3x-4y)$ da cui otteniamo pertanto che le due bisettrici hanno equazioni $x+2y=0$ e $2x-y=0$.

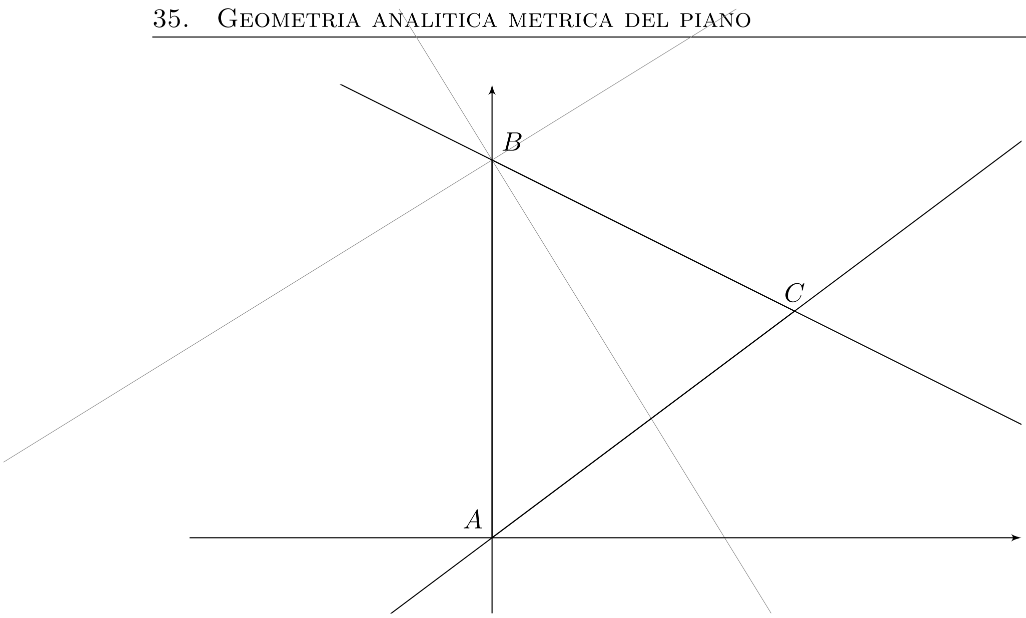


Dobbiamo scegliere, tra le bisettrici cercate, quella interna al triangolo. Come possiamo distinguere tra le due bisettrici quella interna al triangolo? Notiamo che la bisettrice interna al triangolo divide il piano in due semipiani in modo tale che B e C appartengono a semipiani diversi, mentre l'altra bisettrice divide il piano in due semipiani tali che B e C appartengono al medesimo semipiano. Consideriamo i semipiani delimitati dalla bisettrice di equazione $x + 2y = 0$. Poiché $0 + 2 \cdot 5 > 0$ e $4 + 2 \cdot 3 > 0$ i punti B e C appartengono al medesimo semipiano. Dunque la bisettrice di equazione $x + 2y = 0$ non è interna. La bisettrice interna è dunque quella di equazione $2x - y = 0$.

Consideriamo ora un'altra coppia di bisettrici: quelle passanti per il punto B. La retta r_{BC} passante per B e C ha equazione $x + 2y - 10 = 0$. Le bisettrici delle rette r_{AB} e r_{BC} si ottengono dall'equazione

$$|x| = \frac{|x + 2y - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}.$$

Svolgendo i calcoli analogamente a prima si trova che le due bisettrici hanno equazioni rispettive $\left(1 + \sqrt{5}\right) x + 2y - 10 = 0$ e $\left(1 - \sqrt{5}\right) x + 2y - 10 = 0$.



Consideriamo la bisettrice di equazione $\left(1+\sqrt{5}\right)x + 2y - 10 = 0$. Poiché $\left(1+\sqrt{5}\right)0 + 2\cdot 0 - 10 < 0$ e $\left(1+\sqrt{5}\right)4 + 2\cdot 3 - 10 > 0$ i punti A e C appartengono a semipiani diversi rispetto a questa bisettrice. Dunque la bisettrice di equazione $\left(1+\sqrt{5}\right)x + 2y - 10 = 0$ è interna.

Possiamo ora determinare il centro della circonferenza intersecando le due bisettrici interne determinate:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \left(1+\sqrt{5}\right)x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova il centro della circonferenza cercata, cioè $D := \left(\frac{10}{5+\sqrt{5}}, \frac{20}{5+\sqrt{5}}\right)$. Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza del punto D da uno qualsiasi dei lati, ad esempio dalla retta passante per A e B. Dunque il raggio della circonferenza è $\frac{10}{5+\sqrt{5}}$. La circonferenza inscritta ha quindi equazione cartesiana:

$$\mathcal{C}\colon \left(x - \frac{10}{5+\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{5+\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{10}{5+\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

ed equazioni parametriche:

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = \dfrac{10}{5+\sqrt{5}} + \left(\dfrac{10}{5+\sqrt{5}}\right)\cos t \\ y = \dfrac{20}{5+\sqrt{5}} + \left(\dfrac{10}{5+\sqrt{5}}\right)\sin t \end{cases}$$

△

Supponiamo di voler determinare l'intersezione tra una retta e una circonferenza. Vediamo come si può fare con un esempio:

Esempio 35.36 Siano date la retta r di equazione $2x - 3y + 4 = 0$ e la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x-3)^2 + (y+1)^2 - 5 = 0$. Per determinare le eventuali intersezioni di r e $\mathcal{C}$ dobbiamo risolvere il sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema possiamo ricavare un'espressione per x in funzione di y dalla prima equazione e sostituire l'espressione così ottenuta nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{3}{2}y \\ \left(-2 + \dfrac{3}{2}y - 3\right)^2 + (y+1)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene allora:

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{13}{4}y^2 - 13y + 21 = 0 \end{cases}$$

Ora possiamo risolvere l'equazione di secondo grado in y così ottenuta. Notiamo che questa equazione ha discriminante:

$$(-13)^2 - 4\frac{13}{4}21 = -104 < 0.$$

Dunque il sistema non ha soluzioni. Ciò significa che la retta e la circonferenza non hanno intersezioni, cioè che la retta r è esterna alla circonferenza. $\triangle$

Esempio 35.37 Siano date la retta r di equazione $x + 3y + 6 = 0$ e la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x+2)^2 + (y-3)^2 - 17 = 0$. Per determinare le eventuali intersezioni di r e $\mathcal{C}$ dobbiamo risolvere il sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} x + 3y + 6 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 - 17 = 0 \end{cases}$$

Con semplici passaggi arriviamo al sistema:

$$\begin{cases} x = -6 - 3y \\ 10y^2 + 18y + 8 = 0 \end{cases}$$

Ora possiamo risolvere l'equazione di secondo grado in y così ottenuta. Il discriminante di questa equazione è:

$$(18)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 8 = 4 > 0.$$

Dunque questa equazione ha due soluzioni distinte. Ciò significa che la retta e la circonferenza si intersecano in due punti, cioè che la retta r è secante la circonferenza.

Per determinare esplicitamente i punti di intersezione, risolviamo l'equazione di secondo grado in y che abbiamo ottenuto: le sue soluzioni sono $-\frac{4}{5}$ e -1.

Usando la prima equazione troviamo poi i corrispondenti valori di x. Il sistema ha, pertanto, le due soluzioni:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{18}{5} \\ y = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Pertanto la retta e la circonferenza si intersecano nei punti $P := \left(-\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e $Q := (-3, -1)$. △

Esempio 35.38 Siano date la retta r di equazione $x - 2y + 10 = 0$ e la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x-1)^2 + (y-3)^2 - 5 = 0$. Per determinare le eventuali intersezioni di r e $\mathcal{C}$ dobbiamo risolvere il sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Con semplici passaggi si ottiene allora:

$$\begin{cases} x = -10 + 2y \\ y^2 - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

Ora possiamo risolvere l'equazione di secondo grado in y così ottenuta. Il discriminante di questa equazione è:

$$(10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0.$$

Dunque questa equazione ha due soluzioni coincidenti. Ciò significa che la retta e la circonferenza hanno in comune un solo punto, cioè che la retta r è tangente la circonferenza.

Per determinare esplicitamente il punto di tangenza, risolviamo l'equazione di secondo grado in y che abbiamo ottenuto: la sua soluzione è 5. Il sistema ha, pertanto, l'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pertanto la retta è tangente alla circonferenza nel punto $P := (0, 5)$. △

Osservazione 35.39 Nei tre esempi che abbiamo appena dato, per stabilire se una certa retta era esterna, tangente o secante una circonferenza abbiamo determinato il segno del discriminante di un'equazione di secondo grado. Sappiamo però che possiamo distinguere queste situazioni calcolando la distanza tra il centro della circonferenza e la retta: se questa distanza è maggiore del raggio della circonferenza la retta è esterna, se questa distanza è uguale al raggio della circonferenza la retta è tangente, se infine la distanza è minore del raggio la retta è secante. △

Esempio 35.40 Applichiamo l'osservazione precedente nei vari esempi fin qui visti. Nell'esempio 35.36 la circonferenza ha centro $(3, -1)$ e raggio $\sqrt{5}$. La distanza della retta dal centro della circonferenza è

$$\frac{|2 \cdot 3 - 3(-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}.$$

Poiché $\frac{13}{\sqrt{13}} > \sqrt{5}$ la retta è esterna alla circonferenza.

Nell'esempio 35.37 la circonferenza ha centro $(-2, 3)$ e raggio $\sqrt{17}$. La distanza della retta dal centro della circonferenza è

$$\frac{|-2 + 3 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}}.$$

Poiché $\frac{13}{\sqrt{10}} < \sqrt{17}$ la retta è secante la circonferenza.

Nell'esempio 35.38 la circonferenza ha centro $(1, 3)$ e raggio $\sqrt{5}$. La distanza della retta dal centro della circonferenza è

$$\frac{|1 - 2 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

Poiché $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ la retta è tangente alla circonferenza. △

Esempio 35.41 Vogliamo determinare le equazioni cartesiane di tutte le circonferenze tangenti alla retta $r \colon x - 2y + 3 = 0$ nel punto $A := (-3, 0)$ e aventi raggio uguale a 3.

Le circonferenze tangenti alla retta r in A hanno il centro sulla retta s passante per A ortogonale a r. La retta s ha equazioni parametriche:

$$s \colon \begin{cases} x = -3 + t \\ y = - 2t \end{cases}$$

Cerchiamo i punti di s aventi distanza da A uguale a 3 imponendo la condizione:

$$\mathrm{d}((-3 + t, -2t), A)^2 = 9$$

cioè

$$t^2 + 4t^2 = 9.$$

Abbiamo quindi $t = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. Le due circonferenze cercate hanno equazione cartesiana:

$$\left(x + 3 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + 2\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 9 = 0,$$
$$\left(x + 3 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y - 2\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 9 = 0.$$ △

Esempio 35.42 Data la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C := (4, 3)$ e raggio 5 e dato il punto $A := (-6, 8)$, vogliamo determinare, se esistono, le rette passanti per A tangenti a $\mathcal{C}$ e i punti di tangenza. La distanza tra A e C è uguale a $\sqrt{125} > 5$, pertanto esistono due rette tangenti. Per determinarle consideriamo il fascio di rette passanti per A:

$$r_{a,b} \colon a(x + 6) + b(y - 8) = 0.$$

Le tangenti alla circonferenza hanno distanza da C uguale a 5. Imponiamo quindi la condizione:

$$\mathrm{d}(r_{a,b}, C)^2 = 25$$

cioè:

$$\frac{(a(4+6)+b(3-8))^2}{a^2+b^2} = 25.$$

Risolvendo rispetto a a otteniamo $a = \frac{4}{3}b$ e $a = 0$. Le due tangenti cercate sono pertanto:

$$s_1 \colon 4x + 3y = 0 \quad \text{e} \quad s_2 \colon y - 8 = 0.$$

La retta s_1 interseca la circonferenza $\mathcal{C}$ nell'origine. Quest'ultimo è quindi uno dei due punti di tangenza. La retta s_2 interseca la circonferenza nel punto $D \coloneqq (4, 8)$. △

35.7 Soluzioni degli esercizi di base

EB.35.8 Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore direttore di r. I vettori paralleli a r sono i vettori del tipo $k\boldsymbol{v}$ con k numero reale. Se $\boldsymbol{w}$ è ortogonale a r, per definizione è ortogonale a tutti i vettori paralleli a r, in particolare a $\boldsymbol{v}$. Viceversa se $\boldsymbol{w}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ cioè $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} = 0$, allora per ogni numero reale k si ha $\boldsymbol{w} \times k\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} = k \cdot 0 = 0$, cioè $\boldsymbol{w}$ è ortogonale a ogni vettore parallelo a r.

EB.35.10 Sia $\boldsymbol{v} \coloneqq (l, m)$ un vettore direttore di una retta r. Un vettore $\boldsymbol{w} \coloneqq (x, y)$ è ortogonale a r se e solo se è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ cioè se e solo se $lx + my = 0$. Notiamo che l e m sono numeri noti e almeno uno di essi è non nullo (altrimenti $\boldsymbol{v}$ sarebbe il vettore nullo e non potrebbe essere un vettore direttore). Dunque la condizione $lx + my = 0$ è un'equazione omogenea non banale nelle incognite x e y. L'insieme delle sue soluzioni è allora un sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ di dimensione $2 - 1 = 1$, come richiesto.

35.8 Sunto

Ortogonalità fra rette

Teorema *Siano date le rette:*

$$r \colon \begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \end{cases} \quad e \quad s \colon \begin{cases} x = x'_0 + l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} \coloneqq (l_1, m_1)$ *e* $\boldsymbol{w} \coloneqq (l_2, m_2)$, *le due rette sono ortogonali se e solo se*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

Definizione Un vettore $\boldsymbol{w}$ si dice **ortogonale** a una retta r se è ortogonale a tutti i vettori paralleli alla retta r. △

Osservazione Un vettore $\boldsymbol{w}$ è ortogonale alla retta r se e solo se è ortogonale a un vettore direttore di r. △

Osservazione L'insieme dei vettori ortogonali a una retta forma un sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ di dimensione 1. △

Teorema *Data una retta* r *di equazione cartesiana*

$$r \colon ax + by + c = 0,$$

il vettore $\boldsymbol{v}$ *di componenti* (a, b) *(che è non nullo) è ortogonale alla retta* r*.*

Nota Il teorema precedente ci dice che il vettore (a, b) è **ortogonale** alla retta r non che è parallelo ad essa. Attenzione dunque a non confondere le due cose e a dire che (a, b) sono i parametri direttori della retta r di equazione $ax + by + c = 0$. Questo non è vero. △

Teorema *Le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

sono ortogonali se e solo se

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Angoli tra rette

Due rette formano quattro angoli a due a due uguali. Data l'ampiezza di uno di questi angoli, quello ad esso adiacente è il suo supplementare.

Teorema *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1t \\ y = y_0 + m_1t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ \ l_2t \\ y = y'_0 + m_2t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1)$ e $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2)$, gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r e s sono dati dalle formule:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Teorema *Siano date le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Posto $\boldsymbol{v} := (a_1, b_1)$ e $\boldsymbol{w} := (a_2, b_2)$, gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r e s sono dati dalle formule:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Definizione Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

i numeri:

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right)$$

vengono chiamati **coseni direttori** della retta r. Essi danno gli angoli formati da un vettore direttore della retta con gli assi cartesiani. △

Osservazione Una retta r ha infinite equazioni parametriche. Cambiando le equazioni parametriche della retta r, i suoi coseni direttori o rimangono invariati oppure sono moltiplicati entrambi per -1. Da ciò deriva che i coseni direttori di una retta sono determinati a meno del segno. △

Distanza tra un punto e una retta

Teorema *Sia dato il punto $P_0 := (x_0, y_0)$ e la retta $r\colon ax + by + c = 0$. La distanza tra il punto P_0 e la retta r è data da:*

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Distanza tra due rette

Teorema *Date due rette r e s, la loro distanza è uguale a 0 se le due rette sono coincidenti o se sono incidenti in un punto. Se invece le rette sono parallele e distinte, si ha:*

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(P, s)$$

dove P è un punto qualsiasi di r.

Bisettrici

Teorema *Siano date le rette r e s di equazioni cartesiane:*

$$r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Le equazioni delle bisettrici delle rette r e s sono:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},.$$

Circonferenze

Teorema *Sia $P_0 := (x_0, y_0)$ e sia r un numero reale non negativo. L'insieme dei punti appartenenti alla circonferenza $\mathcal{C}$ di centro P_0 e raggio r coincide con l'insieme dei punti $P := (x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

*che viene detta **equazione cartesiana della circonferenza**.*

L'insieme dei punti della circonferenza $\mathcal{C}$ è dato anche da tutti e soli i punti $P = (x, y)$ per i quali esiste $t \in \mathbb{R}$ verificante le equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$$

*che vengono dette **equazioni parametriche** della circonferenza $\mathcal{C}$.*

Se abbiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

possiamo, con semplici passaggi, riscrivere l'equazione così:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Dunque la circonferenza $\mathcal{C}$ ha equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Viceversa, non tutte le equazioni di questo tipo rappresentano effettivamente una circonferenza.

Osservazione Per stabilire se una certa retta era esterna, tangente o secante una circonferenza si possono mettere a sistema le equazioni della retta e della circonferenza e considerare il segno del discriminante dell'equazione risolvente di secondo grado. Possiamo anche distinguere queste situazioni calcolando la distanza tra il centro della circonferenza e la retta: se questa distanza è maggiore del raggio della circonferenza la retta è esterna, se questa distanza è uguale al raggio della circonferenza la retta è tangente, se infine la distanza è minore del raggio la retta è secante. △

35.9 Esercizi

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano.

E.35.1 Determinare il punto simmetrico del punto $A \coloneqq (2, -3)$ rispetto alla retta $r\colon 3x - 5y - 4 = 0$.

E.35.2 Determinare l'equazione cartesiana della retta t simmetrica della retta $r\colon 2x - 3y + 5 = 0$ rispetto alla retta $s\colon 4x - y + 2 = 0$.

E.35.3 Siano dati il punto $A \coloneqq (0, 5)$ e la retta r di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 - 6t \end{cases}$$

Determinare due punti B e C sulla retta r tali che il triangolo di vertici A, B e C abbia i lati AB e AC uguali e abbia area uguale a 5.

E.35.4 Determinare le equazioni parametriche della retta passante per il punto $A \coloneqq (1, 2)$ e ortogonale alla retta r avente equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases}.$$

E.35.5 Determinare le equazioni cartesiane e parametriche delle rette determinate dalle condizioni:

a. passante per il punto $P \coloneqq (1, 3)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{v} \coloneqq (3, 1)$;

b. passante per il punto $P \coloneqq (1, -1)$ e ortogonale alla retta r di equazione cartesiana $x - 2y + 2 = 0$;

c. passante per il punto $P \coloneqq (1, -3)$ e ortogonale alla retta di equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

E.35.6 Sia data la retta $r\colon 2x - 5y + 4 = 0$ e il punto $P \coloneqq (0, -5)$ determinare:

a. le coordinate della proiezione ortogonale P' di P su r;

b. le coordinate del simmetrico P'' del punto P rispetto alla retta r;

c. la distanza di P da r.

E.35.7 Siano dati i punti $P_1 \coloneqq (2, 1)$, $P_2 \coloneqq (-4, 5)$ e $P_3 \coloneqq (0, 0)$.

a. Dimostrare che P_1, P_2 e P_3 non sono allineati.

b. Determinare le equazioni parametriche dell'asse r_3 del segmento P_1P_2.

c. Determinare le equazioni parametriche dell'asse r_1 del segmento P_2P_3.

d. Determinare le coordinate del punto C di intersezione delle rette r_3 e r_1.

e. Determinare il centro e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3.

E.35.8 Date le rette parallele $r\colon x + 4y + 3 = 0$ e $s\colon x + 4y + 7 = 0$, determinare la retta t parallela a r e s ed equidistante da esse.

35.10 Soluzioni degli esercizi

E.35.1 La retta s ortogonale a r e passante per A ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - 5t \end{cases}$$

Intersecando r con s troviamo l'equazione:

$$3(2 + 3t) - 5(-3 - 5t) - 4 = 0,$$

che ha come soluzione $t = -\frac{1}{2}$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo la proiezione $H = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ di A su r. Il punto $B \coloneqq (\bar{x}, \bar{y})$, simmetrico di A rispetto a r, è tale che H sia il punto medio di A e B, ovvero:

$$\frac{\bar{x} + 2}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\bar{y} - 3}{2} = -\frac{1}{2},$$

da cui troviamo $B = (-1, 2)$.

E.35.2 Per determinare la retta simmetrica t della retta r rispetto alla retta s scegliamo due punti distinti A e B di r, ne determiniamo i punti simmetrici A' e B' rispetto a s e consideriamo la retta t passante per A'e B'.

Consideriamo due punti distinti di r, ad esempio $A := \left(0, \frac{5}{3}\right)$, $B := \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$. Con il procedimento descritto nell'esercizio precedente troviamo i simmetrici di A e B rispetto a s: $A' := \left(-\frac{8}{51}, \frac{29}{17}\right)$, $B' := \left(\frac{43}{34}, -\frac{16}{17}\right)$. Ora t è la retta congiungente i punti A' e B'. Essa ha equazione cartesiana:

$$54x + 29y - 41 = 0.$$

E.35.3 Per calcolare l'area del triangolo possiamo considerare il lato BC e l'altezza del triangolo relativa a tale lato. Questa altezza h del nostro triangolo è uguale alla distanza del punto A dalla retta r. Per calcolare h, determiniamo un'equazione cartesiana della retta r. Dalla prima delle equazioni parametriche della retta r otteniamo

$$3t = 2 - x,$$

sostituendo $3t$ nella seconda delle equazioni parametriche di r otteniamo $y = 2x$. Dunque la retta r ha equazione cartesiana:

$$2x - y = 0.$$

Applicando la formula della distanza punto-retta, otteniamo

$$h = \mathrm{d}(A, r) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Sia b la distanza tra i punti B e C cercati. Poiché il triangolo ABC deve avere area uguale a 5, si ha che

$$5 = \frac{1}{2} b\sqrt{5}.$$

Pertanto $b = 2\sqrt{5}$. Poiché Il triangolo ABC deve essere isoscele in A, l'altezza del triangolo passante per A deve intersecare la base passante per B e C nel punto medio H di B e C. Possiamo ora seguire vari metodi. Ne indichiamo due.

- Il triangolo ABH deve essere rettangolo in H. Applicando il teorema di Pitagora otteniamo

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}.$$

Il punto B (e quindi anche il punto C) devono quindi appartenere sia alla circonferenza di centro A e raggio $\sqrt{10}$ sia alla retta r. Pertanto le coordinate di B e C devono essere soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = 10 \\ y = 2x \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $B = (3, 6)$ e $C = (1, 2)$.

- Determiniamo le coordinate del punto H. Per far ciò scriviamo l'equazione della retta s passante per A e ortogonale alla retta r e determiniamo il punto di intersezione H tra r e s. Facendo i calcoli otteniamo $H = (2, 4)$. Abbiamo visto che la distanza tra B e C deve essere uguale a $2\sqrt{5}$. Pertanto il punto H deve distare $\sqrt{5}$ sia da B che da C. I punti B e C devono quindi appartenere sia alla circonferenza di centro H e raggio $\sqrt{5}$ sia alla retta r. Determinando le soluzioni del sistema dato dalle equazioni della circonferenza e della retta, si ottengono le coordinate dei punti B e C.

E.35.4 La retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

E.35.5 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo in maniera indipendente le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta cercata. Ovviamente determinata una forma per l'equazione della retta sarebbe possibile determinare da essa l'altra.

a. La direzione della retta è quella ortogonale al vettore $(3,1)$, cioè i parametri direttori della retta sono $(1,-3)$. Pertanto le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana di una retta ortogonale al vettore $(3,1)$ è $3x+y+c=0$. Imponendo il passaggio per $P=(1,3)$ troviamo $3\cdot 1+3+c=0$, cioè $c=-6$. L'equazione cercata è dunque $3x+y-6=0$.

b. Un vettore ortogonale alla retta di equazione cartesiana $x-2y+2=0$ è $(1,-2)$. Dunque le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana della generica retta ortogonale alla retta di equazione cartesiana $x-2y+2=0$ è $2x+y+c=0$: imponendo il passaggio per $P=(1,-1)$ troviamo $2\cdot 1+(-1)+c=0$, cioè $c=-1$. L'equazione cercata è dunque $2x+y-1=0$.

c. La retta assegnata r ha parametri direttori $(-2,3)$. La retta cercata ha perciò parametri direttori $(3,2)$: le sue equazioni parametriche sono allora:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana della generica retta ortogonale al vettore $(-2,3)$ è $-2x+3y+c=0$. Imponendo il passaggio per $P=(1,-3)$ troviamo $-2\cdot 1+3\cdot(-3)+c=0$, cioè $c=11$. L'equazione cercata è dunque $-2x+3y+11=0$.

E.35.6 Determiniamo innanzitutto la retta n ortogonale a r e passante per P. Poiché il vettore $(2,-5)$ è ortogonale a r, le equazioni parametriche di n sono:

$$\begin{cases} x = \phantom{-5-{}} 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases}.$$

a. Il punto P' è intersezione di n e r. Sostituendo quindi le coordinate del generico punto di n nell'equazione della retta r troviamo:

$$2(2t) - 5(-5-5t) + 4 = 0,$$

e, risolvendo quest'equazione nell'incognita t, troviamo la soluzione $t=-1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate di P', e cioè, $(-2,0)$.

b. La proiezione P' è il punto medio del segmento congiungente P a P''. Sappiamo che P' ha coordinate $(-2,0)$. Se P'' ha coordinate (x'',y'') si ha allora $\frac{x''+0}{2}=-2$ e $\frac{y''-5}{2}=0$, da cui ricaviamo $P''=(-4,5)$.

c. Il calcolo della distanza di P da r si ottiene applicando la formula:

$$\mathrm{d}(P,r) = \frac{|2\cdot 0 - 5(-5) + 4|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \sqrt{29}.$$

Equivalentemente, la distanza di P da r è uguale alla distanza di P da P'.

E.35.7

a. Calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 2-0 & -4-0 \\ 1-0 & 5-0 \end{vmatrix}.$$

Poiché questo determinante è non nullo abbiamo che i tre punti non sono allineati.

b. L'asse del segmento P_1P_2 è la retta passante per il punto medio M dei punti P_1P_2 e ortogonale alla retta passante per P_1 e per P_2. Abbiamo :

$$M = (-1, 3).$$

La retta passante per P_1 e per P_2 ha parametri direttori $(-6, 4)$. I parametri direttori (l, m) di una retta ortogonale alla retta passante per P_1 e P_2 devono verificare la condizione:

$$-6l + 4m = 0.$$

Possiamo quindi porre $l = 2$ e $m = 3$. Le equazioni parametriche dell'asse sono quindi:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$$

c. Utilizzando lo stesso procedimento, si ottengono le seguenti equazioni parametriche per l'asse r_1:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = \dfrac{5}{2} + 4t \end{cases}$$

d. Vogliamo determinare il punto C di intersezione delle rette r_3 e r_1. Per far ciò cambiamo il nome del parametro della retta r_1:

$$\begin{cases} x = -2 + 5u \\ y = \dfrac{5}{2} + 4u \end{cases}$$

e determiniamo t e u in modo tale che essi corrispondano allo stesso punto:

$$\begin{cases} -1 + 2t = -2 + 5u \\ 3 + 3t = \dfrac{5}{2} + 4u \end{cases}$$

Facendo i calcoli si ottiene

$$\begin{cases} t = \dfrac{3}{14} \\ u = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Sostituendo il valore di t nelle equazioni parametriche della retta r_3 si ottengono le coordinate del punto di intersezione:

$$C = \left(-\frac{4}{7}, \frac{51}{14}\right).$$

Ovviamente sostituendo il valore di u nelle equazioni parametriche della retta r_1 si ottiene lo stesso risultato.

e. Il punto C è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza di C dal punto P_3. Sappiamo che questa distanza coincide con la distanza di C dai punti P_1 e P_2. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\mathrm{d}(C, P_3) = \frac{\sqrt{2665}}{14}.$$

E.35.8 Consideriamo il fascio di rette parallele alle rette r e s:

$$t_k \colon x + 4y + k = 0$$

Cerchiamo tra le rette t_k la retta t equidistante dalle due rette assegnate. Per far ciò consideriamo un punto A di t_k. Si ponga, per esempio, $A := (-k, 0)$. Imponiamo che $\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, s)$:

$$\frac{|-k+3|}{\sqrt{17}} = \frac{|-k+7|}{\sqrt{17}}$$

da cui segue $k = 5$. Pertanto la retta cercata è $t \colon x + 4y + 5 = 0$.

CAPITOLO 36

Geometria analitica metrica dello spazio

In questo capitolo fissiamo una volta per tutte un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Sia cioè data un'origine O e una base ortonormale per $V^3(O)$ formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$. Vogliamo tradurre in formule algebriche alcune proprietà del piano legate alla distanza e alla ortogonalità.

36.1 Ortogonalità di rette

Date due rette r e s nello spazio come possiamo parlare degli angoli compresi tra di esse? Le rette potrebbero essere sghembe, cioè non complanari. Vogliamo però introdurre (e poi utilizzare) comunque il concetto di angoli tra rette e, in particolare, la nozione di ortogonalità tra rette. Possiamo allora considerare le rette r' e s' parallele a r e s rispettivamente e passanti per un punto arbitrario P. Le rette r' e s' sono complanari e gli angoli formati dalle rette r' e s' non dipendono dal punto P scelto. Per definizione diciamo allora che gli angoli formati da r e s sono gli angoli formati dalle rette r' e s': se r e s fossero complanari questa definizione dà gli stessi angoli che otterremmo considerandole come rette del piano che le contiene. In particolare possiamo anche definire una nozione di ortogonalità tra rette: diremo dunque che le rette r e s sono ortogonali se le rette r' e s' sono ortogonali.

Come già nel caso del piano vediamo allora che tutti questi concetti possono essere espressi semplicemente in termini dei vettori direttori delle rette.

Cominciamo a considerare l'ortogonalità.

Teorema 36.1 *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ n_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ \ l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \\ z = z'_0 + \ n_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ *e* $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$*, le due rette sono ortogonali se e solo se*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Esempio 36.2 Le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \phantom{1+{}} 2t \\ z = \phantom{1+2{}} t \end{cases}$$

sono ortogonali: infatti $1 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0$. △

Esercizio di base 36.3 Stabilire se le rette dell'esempio precedente sono incidenti.

Osservazione 36.4 La soluzione dell'esercizio di base precedente ci mostra che nello spazio due rette ortogonali non sono necessariamente incidenti. △

Esempio 36.5 Sia data la retta

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

e il punto $A := (3, 1, -1)$. Vogliamo trovare una retta ortogonale a r e passante per A. La retta r ha parametri direttori $(1, -2, 5)$. Se indichiamo con (l, m, n) i parametri direttori di una retta generica, questa è ortogonale a r se e solo se $1 \cdot l + (-2) \cdot m + 5 \cdot n = 0$, vale a dire se e solo se $l = 2m - 5n$. Le soluzioni di questa equazione non sono tutte proporzionali tra loro, dunque abbiamo diverse rette ortogonali a r e passanti per P, ad esempio

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Potremmo continuare e trovare infinite rette diverse. Notiamo che nel piano le rette ortogonali a una retta data sono tutte parallele tra loro, mentre nello spazio ciò non è vero. △

Osservazione 36.6 Nell'esempio precedente abbiamo trovato alcune rette ortogonali alla stessa retta. Notiamo che, poiché queste rette non hanno parametri direttori proporzionali tra loro, esse non sono parallele fra loro. A differenza di quanto avviene nel piano, rette ortogonali alla stessa retta non è detto siano parallele fra loro. △

Come già fatto nel piano possiamo dare la definizione di vettore ortogonale a una retta.

Definizione 36.7 Un vettore $\boldsymbol{w}$ si dice **ortogonale** a una retta r se è ortogonale a tutti i vettori paralleli alla retta r. △

Osservazione 36.8 Si verifica facilmente che un vettore $\boldsymbol{w}$ è ortogonale alla retta r se e solo se è ortogonale a un vettore direttore di r. △

Abbiamo visto che nel piano l'insieme dei vettori ortogonali a una data retta forma un sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ di dimensione 1. Nello spazio abbiamo invece:

Proposizione 36.9 *L'insieme dei vettori ortogonali a una retta è un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 2.*

Esercizio di base 36.10 Dimostrare la proposizione precedente.

Nell'esempio 36.5 abbiamo visto che la condizione di ortogonalità a una retta non individua una direzione ma infinite. Il fatto che la dimensione dello spazio vettoriale dei vettori ortogonali a una retta sia 2 e non 1 dovrebbe chiarire ulteriormente questo concetto.

36.2 Angoli tra rette

Torniamo ora al caso più generale di voler determinare gli angoli tra due rette (come detto nel paragrafo precedente possiamo dar senso a questo concetto anche nel caso in cui le due rette non abbiano punti in comune). In maniera analoga a quanto visto nel piano dobbiamo determinare due angoli supplementari fra loro e per far ciò possiamo usare dei vettori direttori delle due rette. Più esplicitamente

Teorema 36.11 *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ \ n_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x_0' + \ \ l_2 t \\ y = y_0' + m_2 t \\ z = z_0' + \ \ n_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ e $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$, gli angoli supplementari α e β formati dalle rette r e s sono dati dalle formule:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \qquad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$
$$\cos\beta = -\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Anche nello spazio, come nel piano, si introducono i coseni direttori di una retta:

Definizione 36.12 Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ \ nt \end{cases}$$

i numeri:

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right)$$

vengono chiamati **coseni direttori** della retta r. △

Osservazione 36.13 I coseni direttori sono le componenti di un vettore di lunghezza uguale a 1 e parallelo alla retta r. Una retta r ha infinite equazioni parametriche. Cambiando le equazioni parametriche della retta r, i suoi coseni direttori rimangono invariati oppure sono tutti e tre moltiplicati per -1. Da ciò deriva che i coseni direttori di una retta sono determinati a meno del segno. △

Come nel caso della geometria del piano, i coseni direttori di una retta hanno un significato geometrico. Abbiamo infatti il seguente teorema la cui dimostrazione lasciamo per esercizio.

Teorema 36.14 *Data una retta r di equazioni parametriche:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ nt \end{cases}$$

Considerato il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (l, m, n) parallelo ad r si ha:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_1} &= \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_2} &= \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ \cos \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_3} &= \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \end{aligned}$$

36.3 Ortogonalità tra rette e piani

Ricordiamo che un vettore $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{OQ}$ si dice parallelo al piano π se il suo vertice Q appartiene al piano π' passante per O e parallelo al piano π. L'insieme dei vettori paralleli a un dato piano forma un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 3.

Definizione 36.15 Un **vettore $\boldsymbol{v}$** si dice **ortogonale** a un piano π se esso è ortogonale a tutti i vettori $\boldsymbol{w}$ paralleli al piano π. △

Teorema 36.16 *Siano dati un piano π e un vettore $\boldsymbol{v}$. Se il vettore $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a due vettori linearmente indipendenti paralleli al piano π, allora esso è ortogonale al piano.*

Dimostrazione Deriva dal fatto ben noto di geometria dello spazio che, se una retta r è ortogonale a due rette non parallele contenute in un piano π, allora essa è ortogonale al piano π. ■

Esempio 36.17 Sia dato il piano π di equazioni parametriche:

$$\pi \colon \begin{cases} x = 2 + t - u \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3u \end{cases}$$

e la retta r di equazioni parametriche:

$$r \colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 7 + 3t \\ z = 9 + t \end{cases}$$

Vogliamo verificare se il piano π e la retta r sono ortogonali. Il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(3, 3, 1)$, è parallelo alla retta r. I vettori $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ di componenti rispettive $(1, -1, 0)$ e $(-1, 0, 3)$ sono paralleli al piano π e linearmente indipendenti. Poiché $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_1 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0$ e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_2 = 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 0$ abbiamo che $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}_2$. Pertanto, per il teorema 36.16, il piano π e la retta r sono ortogonali. △

Abbiamo visto che i vettori dello spazio ortogonali a una retta formano un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Per i vettori ortogonali a un piano vale invece la:

Proposizione 36.18 *L'insieme dei vettori ortogonali a un piano è un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 1.*

Dimostrazione Consideriamo due vettori linearmente indipendenti e paralleli al piano: $\boldsymbol{v}_1 := (l_1, m_1, n_1)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (l_2, m_2, n_2)$. Un vettore (x, y, z) è ortogonale al piano se e solo se è ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, cioè se e solo se $l_1x + m_1y + n_1z = 0$ e $l_2x + m_2y + n_2z = 0$. Abbiamo dunque il sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} l_1x + m_1y + n_1z = 0 \\ l_2x + m_2y + n_2z = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti questa matrice ha rango 2 e, dunque, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione $3 - 2 = 1$, come richiesto. ■

Il teorema precedente può essere interpretato dicendo che tutte le rette ortogonali allo stesso piano hanno vettori direttori paralleli tra loro, sono cioè parallele fra loro. Questo è un fatto che già conosciamo dalla geometria dello spazio. Notiamo inoltre che nella proposizione 36.9 abbiamo mostrato che l'insieme dei vettori ortogonali a una retta è un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Anche questo corrisponde a un noto fatto geometrico, e cioè che tutti i piani ortogonali alla stessa retta sono paralleli fra loro.

Esercizio di base 36.19 Determinare le equazioni parametriche del piano π passante per il punto $A := (4, 7, 2)$ e ortogonale alla retta r di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$
△

Abbiamo visto nel 35.12 come nel piano si possa ricavare facilmente un vettore ortogonale a un retta data tramite equazione cartesiana. Analogamente nello spazio abbiamo il:

Teorema 36.20 *Dato un piano π di equazione cartesiana*

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0.$$

Allora il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (a, b, c) (che è non nullo) è ortogonale al piano π.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a ogni vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti (l, m, n) il cui vertice giace sul piano π' passante per O e parallelo al piano π. Dobbiamo dimostrare quindi che si ha:

$$al + bm + cn = 0.$$

Notiamo ora che l'equazione di π' è:

$$ax + by + cz = 0.$$

Il vertice di $\boldsymbol{w}$ è il punto (l, m, n). Poiché questo punto appartiene a π' si ha:

$$al + bm + cn = 0,$$

che è la relazione cercata. ■

Esempio 36.21 Consideriamo il piano

$$\pi \colon 2x + 4y - 6z - 5 = 0,$$

e la retta

$$r \colon \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 7 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$

Il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti $(2, 4, -6)$ è ortogonale al piano π. Il vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti $(-1, -2, 3)$ è un vettore direttore di r. Questi vettori sono uno multiplo dell'altro, quindi la retta r è ortogonale al piano π. △

Esempio 36.22 Vogliamo determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $A := (1, 2, -2)$ e ortogonale alla retta r di equazioni parametriche:

$$r \colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 7t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Il piano π deve essere ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti $(2, -7, -1)$. Sfruttando il teorema 36.20 otteniamo che il generico piano ortogonale a r ha equazione cartesiana del tipo:

$$2x - 7y - z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione $2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 - (-2) + k = 0$ da cui ricaviamo $k = 10$ e l'equazione del piano è, dunque:

$$\pi\colon 2x - 7y - z + 10 = 0. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 36.23 Determinare un'equazione cartesiana del piano π definito nell'esercizio di base 36.19.

Esempio 36.24 Siano dati i punti $A := (1, 1, 1)$ e $B := (1, 3, 5)$. Vogliamo determinare il piano asse del segmento di estremi i due punti A e B.

Il piano asse di un segmento di estremi A e B è, per definizione, il piano passante per il punto medio di A e B e ortogonale alla retta passante per A e B.

La retta passante per gli estremi A e B del segmento ha parametri direttori $(1 - 1, 3 - 1, 5 - 1) = (0, 2, 4)$. Il generico piano ortogonale al segmento di estremi A e B ha quindi equazione del tipo $0 \cdot x + 2y + 4z + k = 0$, cioè, più semplicemente, $2y + 4z + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto medio tra A e B, cioè il punto $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (1, 2, 3)$, otteniamo la condizione $2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = -16$. Il piano ha dunque equazione $2y + 4z - 16 = 0$.

Possiamo determinare il piano asse in un modo alternativo. Sappiamo infatti che esso è formato da tutti e soli i punti equidistanti da A e B. Pertanto un punto $P := (x, y, z)$ appartiene al piano asse se e solo se

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2},$$

cioè

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2.$$

Apparentemente questa è un'equazione di secondo grado, ma, svolgendola, si vede che i termini di secondo grado si elidono e si ottiene quindi l'equazione del piano $4y + 8z - 32 = 0$, equivalente a quella trovata in precedenza. $\triangle$

36.4 Ortogonalità tra piani

Consideriamo ora il concetto di ortogonalità tra piani. È ben noto che due piani sono fra loro ortogonali se e solo se presa una retta ortogonale al primo piano e una retta ortogonale al secondo piano queste sono fra loro ortogonali. Poiché dal teorema 36.20 sappiamo determinare facilmente un vettore ortogonale a un piano dato tramite equazione cartesiana, abbiamo immediatamente il:

Teorema 36.25 *I piani π e σ di equazioni cartesiane:*

$$\pi\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

sono ortogonali se e solo se

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Esempio 36.26 Sia dato il piano $\pi\colon 2x-3y+5z-1 = 0$. Vogliamo determinare l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale al piano π e passante per i punti $A := (1, 2, -1)$ e $B := (0, 1, 1)$.

Un piano ha equazione generica $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo che sia ortogonale a π otteniamo la condizione $2a - 3b + 5c = 0$. Imponendo che il piano passi per A abbiamo la condizione $a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot (-1) + d = 0$. Infine, imponendo che il piano passi per B abbiamo la condizione $a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 1+d = 0$. Considerando queste tre condizioni nel loro complesso abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5c \phantom{{}+d} = 0 \\ a + 2b - c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema omogeneo in a, b, c e d si ottengono le soluzioni

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{14}h \\ b = -\dfrac{9}{14}h \\ c = -\dfrac{5}{14}h \\ d = \phantom{-\dfrac{1}{14}}h \end{cases}$$

Queste soluzioni sono tutte proporzionali tra loro: quindi le equazioni cartesiane che otteniamo sono tutte proporzionali fra loro, rappresentano cioè lo stesso piano. Assegniamo allora a h un valore qualsiasi non nullo. Potremmo dargli il valore $h := 1$, oppure, per ottenere valori interi, poniamo $h := 14$. Otteniamo così l'equazione cartesiana del piano cercato:

$$-x - 9y - 5z + 14 = 0. \qquad \triangle$$

Osservazione 36.27 Nell'esempio precedente abbiamo trovato il piano ortogonale a un piano dato e passante per due punti assegnati. Se avessimo richiesto il passaggio per uno solo dei due punti avremmo avuto un sistema in a, b, c e d formato da due sole equazioni. Le soluzioni in questo caso non sarebbero più dipese da un solo parametro ma da due. In particolare avremmo avuto infiniti piani $\triangle$

36.5 Parallelismo e ortogonalità

In questo capitolo e nei precedenti abbiamo trovato varie formule riguardanti parallelismo e ortogonalità tra vettori, rette e piani. In effetti, a ben vedere, tutte queste formule si basano su alcuni risultati già visti in precedenza:

- Data una retta r di equazioni parametriche:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \;\; l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \;\; n_1 t \end{cases}$$

il vettore (l_1, m_1, n_1), (vettore direttore di r), è parallelo alla retta r.

- Dato un piano π di equazione cartesiana:

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0,$$

il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano π.

Se si ricordano questi teoremi è possibile ricavare facilmente varie formule:

- le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \;\; l_1 t \\ y = y_0 + \;\; l_1 t \\ z = z_0 + n_1 t \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \;\; l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \\ z = z'_0 + \;\; n_2 t \end{cases}$$

sono:

– parallele se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 1,$$

(cioè i loro vettori direttori sono tra loro linearmente dipendenti);
– ortogonali se e solo se

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

(cioè i loro vettori direttori sono tra loro ortogonali).

- i piani

$$\pi\colon a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma\colon a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 = 0$$

sono:

– paralleli se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1,$$

(cioè i vettori a loro ortogonali sono tra loro linearmente dipendenti);
– ortogonali se e solo se

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

(cioè i vettori a loro ortogonali sono tra loro ortogonali).

- La retta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \;\; lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$$

e il piano

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0$$

sono:

– paralleli se e solo se

$$al + bm + cn = 0,$$

(cioè il vettore direttore della retta r e il vettore ortogonale al piano π sono tra loro ortogonali);

– ortogonali se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1,$$

(cioè il vettore direttore della retta r e il vettore ortogonale al piano sono tra loro linearmente dipendenti).

Esercizio di base 36.28 Siano date le rette:

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 - \ \ t \\ y = 3 - 5t \\ z = 7 \end{cases}$$

$$n: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - t \\ z = 7 \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i piani:

a. il piano π passante per r e ortogonale a s;

b. il piano σ passante per r e ortogonale a n. △

36.6 Distanze

Teorema 36.29 *La distanza tra il punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e il piano*

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0$$

è data da:

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

DIMOSTRAZIONE Ricordiamo che la distanza tra un punto e un piano è data dalla distanza tra il punto e la sua proiezione sul piano.

La dimostrazione è analoga a quella data nella geometria del piano per la distanza tra un punto e una retta data tramite equazione cartesiana. Viene lasciata per esercizio. ■

Esempio 36.30 La distanza tra il punto $P_0 := (1, 2, -8)$ e il piano

$$\pi\colon x - 2y + 5z - 7 = 0$$

è uguale a:

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-8) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{50}{\sqrt{30}}.$$ △

Esercizio di base 36.31 Calcolare la distanza tra il punto $P_0 := (5, -1, 0)$ e il piano
$$\pi\colon x - 2y + 5z - 7 = 0. \qquad \triangle$$

Esempio 36.32 Vogliamo determinare la distanza tra i piani paralleli
$$\pi\colon x - y + 3z - 1 = 0, \quad \text{e} \quad \sigma\colon x - y + 3z - 2 = 0.$$
Ricordiamo che la distanza tra due piani paralleli π e σ è data dalla distanza tra un qualsiasi punto del piano π e il piano σ. Cerchiamo un punto di π. Ponendo $y = z = 0$ nell'equazione del piano π, determiniamo il punto $A := (1, 0, 0)$. Abbiamo pertanto:
$$\mathrm{d}(\pi, \sigma) = \mathrm{d}(A, \sigma) = \frac{|1 - 0 + 3 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}. \qquad \triangle$$

Esempio 36.33 Vogliamo determinare la distanza tra il piano
$$\pi\colon x - 2y + z - 1 = 0$$
e la retta:
$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 7 \end{cases}$$
Per il teorema 24.35 la retta r e il piano sono paralleli. La distanza tra una retta r e un piano π paralleli è data dalla distanza tra un qualsiasi punto A della retta r e il piano π. Prendiamo quindi il punto $A := (1, -3, 7)$ sulla retta r. Abbiamo:
$$\mathrm{d}(r, \pi) = \mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|1 - 2(-3) + 7 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{6}}. \qquad \triangle$$

Esempio 36.34 Vogliamo calcolare la distanza tra la retta :
$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
e il punto $A := (2, 1, 0)$.

Tale distanza è uguale alla distanza tra il punto A e la sua proiezione ortogonale H sulla retta r. Consideriamo il piano π passante per A e ortogonale a r. Il generico piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x - 2y + 2z + k = 0$. Imponendo il passaggio per A troviamo la condizione $2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = 0$. Il piano ha perciò equazione $x - 2y + 2z = 0$. Intersecando questo piano con la retta r otteniamo l'equazione $(1+t) - 2(3-2t) + 2(1+2t) = 0$ che, risolta, dà $t = \frac{1}{3}$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di r troviamo quindi
$$H = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Abbiamo allora:

$$\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{5}.$$

△

Esempio 36.35 Vogliamo determinare la distanza tra le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Abbiamo vari metodi per determinare la loro distanza.

• Verifichiamo innanzitutto se le rette sono parallele o no. I vettori direttori $\boldsymbol{v} := (-1, 3, 2)$ e $\boldsymbol{w} := (1, -1, 1)$ non sono linearmente dipendenti, quindi le due rette non sono parallele. Possono essere incidenti o sghembe. La loro distanza è data dalla distanza tra un punto B della retta s e il piano π passante per r e parallelo alla retta s. Per determinare il piano π prendiamo un punto della retta r, per esempio il punto $A := (1, 0, 2)$ e consideriamo il piano passante per A e parallelo alle rette r e s. Il piano π ha pertanto equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\pi\colon 5x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

Prendiamo ora un punto qualsiasi su s, ad esempio $B := (1, 2, 3)$. Abbiamo allora:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(B, \pi) = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{38}}.$$

• La distanza tra r e s è uguale alla distanza tra un punto R su r e un punto S su s tale che il segmento RS è ortogonale sia alla retta r che alla retta s. Il generico punto di r ha coordinate $(1 - t, 3t, 2 + 2t)$, il generico punto di s ha coordinate $(1 + u, 2 - u, 3 + u)$ (notiamo che abbiamo cambiato il parametro). Dunque la retta che passa per questi punti ha parametri direttori $(-t - u, 3t + u - 2, 2t - u - 1)$. Imponiamo l'ortogonalità con r e s:

$$\begin{aligned} (-t - u)(-1) + (3t + u - 2) \cdot 3 + (2t - u - 1) \cdot 2 = 0 \\ (-t - u) \cdot 1 + (3t + u - 2)(-1) + (2t - u - 1) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Ciò ci fornisce il sistema nelle incognite t e u:

$$\begin{cases} 14t + 2u = 8 \\ -2t - 3u = -1 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $t = \frac{11}{19}$, $u = -\frac{1}{19}$. In corrispondenza di questi valori troviamo i punti $R := \left(\frac{8}{19}, \frac{33}{19}, \frac{60}{19}\right)$ e $S := \left(\frac{18}{19}, \frac{39}{19}, \frac{56}{19}\right)$. Ora

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(r, s) &= \mathrm{d}(R, S) \\ &= \sqrt{\left(\frac{8}{19} - \frac{18}{19}\right)^2 + \left(\frac{33}{19} - \frac{39}{19}\right)^2 + \left(\frac{60}{19} - \frac{56}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{152}}{19} = \frac{2\sqrt{38}}{19}. \end{aligned}$$

Ovviamente la distanza così determinata è uguale a quella determinata con il metodo precedente, anche se è espressa in maniera differente. △

Esercizio di base 36.36 Determinare la retta n incidente e ortogonale alle rette r e s dell'esempio 36.35.

36.7 Sfere e circonferenze

Teorema 36.37 *Sia $C := (x_0, y_0, z_0)$ e sia $r \geq 0$. L'insieme dei punti appartenenti alla sfera $\mathcal{S}$ di centro C e raggio r coincide con l'insieme dei punti $P := (x, y, z)$ le cui coordinate verificano l'equazione:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

*L'equazione precedente viene detta **equazione cartesiana** della sfera.*

Dimostrazione Per definizione, la sfera di centro C e raggio r è data da tutti e soli i punti che hanno distanza da C uguale a r. ■

Esempio 36.38 La sfera di centro $C := (1, 2, -3)$ e raggio uguale a 5 ha equazione cartesiana:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 - 25 = 0$$ △

Esempio 36.39 L'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 2z + 17 = 0$$

può essere scritta nella forma:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 - 1 = 0$$

e quindi rappresenta la sfera di centro il punto $C := (1, -2, -1)$ e raggio uguale a 1. △

Esempio 36.40 L'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 2z + 19 = 0$$

può essere scritta nella forma:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 + 1 = 0$$

cioè:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = -1.$$

Notiamo che il primo membro, essendo somma di quadrati, è positivo o nullo. Poiché il secondo membro è negativo, non esiste alcun punto che verifica l'equazione assegnata. △

Esempio 36.41 Vogliamo determinare le equazioni cartesiane di tutte le sfere di raggio uguale a 3 e tangenti nel punto $A := (2, -1, 0)$ al piano di equazioni cartesiana $\pi\colon x + y + z - 1 = 0$. Le sfere da noi cercate, per rispettare la condizione di tangenza, devono avere il centro sulla retta r passante per A e ortogonale a π. Questa retta ha equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = \phantom{-1+{}} t \end{cases}$$

Scegliamo ora tra tutti i punti della retta r, quelli aventi distanza da A uguale a 3. Calcolando la distanza del punto $(2 + t, -1 + t, t)$ da A troviamo

$$\sqrt{(2 + t - 2)^2 + (-1 + t - (-1))^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{3}|t|.$$

Ponendo uguale a 3 questa distanza troviamo le soluzioni $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. I centri delle sfere cercate sono quindi:

$$C_1 := \left(2 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$$

$$C_2 := \left(2 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$$

Le sfere cercate hanno pertanto equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} &\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(y + 1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(z - \sqrt{3}\right)^2 - 9 = 0 \\ &\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(y + 1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z + \sqrt{3}\right)^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

$\triangle$

Esempio 36.42 Sia data la sfera $\mathcal{S}$ di centro $C := (1, 0, 2)$ e raggio 6 e il piano

$$\pi\colon 4x + 3y - 29 = 0.$$

Vogliamo descrivere l'intersezione di $\mathcal{S}$ con π. Questa è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 36 = 0 \\ \phantom{(x - 1)^2 + y^2 + {}} 4x + 3y - 29 = 0 \end{cases}$$

Per vedere se il piano π interseca la sfera $\mathcal{S}$ calcoliamo la sua distanza dal centro C della sfera. Abbiamo $\mathrm{d}(\pi, C) = \frac{|4\cdot 1 + 3\cdot 0 - 29|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = 5$.

Pertanto la sfera e il piano si intersecano in una circonferenza di raggio uguale $\sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$ e centro il punto H proiezione del punto C sul piano π.

Il punto H è quindi l'intersezione del piano π con la retta s passante per C e ortogonale a π:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = \phantom{1 + {}} 3t \\ z = 2 \end{cases}$$

Imponendo l'appartenenza del punto generico di s al piano π otteniamo $t = 1$. Il centro della circonferenza è pertanto $H = (5, 3, 2)$. $\triangle$

Esempio 36.43 Vogliamo determinare tutte le sfere passanti per i quattro punti $A := (2, 5, -1)$, $B := (2, 1, -1)$, $C := (0, 5, 1)$ e $D := (2, 3, 1)$. Verifichiamo innanzitutto se i quattro punti sono complanari:

$$\begin{vmatrix} 2-2 & 1-5 & -1-(-1) \\ 0-2 & 5-5 & 1-(-1) \\ 2-2 & 3-5 & 1-(-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dunque i quattro punti non sono complanari: sappiamo che per essi passa una e una sola sfera. Abbiamo vari metodi per determinarla.

- Cerchiamo il centro E della sfera. Tale centro E, dovendo essere equidistante dai quattro punti, deve appartenere ai piani asse dei segmenti da essi determinati. L'asse del segmento di estremi A e B è il piano:

$$\pi_{A,B} \colon y - 3 = 0.$$

L'asse del segmento di estremi A e C è il piano:

$$\pi_{A,C} \colon \; -2x + 2z + 2 = 0.$$

L'asse del segmento di estremi A e D è il piano:

$$\pi_{A,D} \colon \; -2y + 2z + 8 = 0.$$

Non abbiamo bisogno di determinare altri assi: intersecando questi tre piani troviamo il punto $E := (0, 3, -1)$. Il raggio della sfera è uguale alla distanza di E da uno qualsiasi dei quattro punti A, B, C e D. Calcolando, ad esempio, la distanza di E da A troviamo che la sfera ha raggio $\sqrt{32}$. La sfera cercata ha quindi equazione cartesiana:

$$x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 - 32 = 0$$

- Consideriamo un'equazione generica di una sfera:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

che possiamo riscrivere così:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0.$$

Utilizzando parametri diversi possiamo dunque scrivere:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Imponiamo il passaggio per i quattro punti. Otteniamo il sistema nelle incognite a, b, c e d: $A := (2, 5, -1)$, $B := (2, 1, -1)$, $C := (0, 5, 1)$ e $D := (2, 3, 1)$

$$\begin{cases} 2a + 5b - c + d = -30 \\ 2a + b - c + d = -6 \\ \phantom{2a + {}} 5b + c + d = -26 \\ 2a + 3b + c + d = -14 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $a = 0$, $b = -6$, $c = 2$, $d = 2$. La sfera ha, dunque, equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z + 2 = 0.$$

△

Il teorema seguente, che dimostriamo solo in parte, mostra che anche per la sfera è possibile dare delle equazioni parametriche

Teorema 36.44 *L'insieme dei punti della sfera $\mathcal{S}$ di centro $C := (x_0, y_0, z_0)$ e raggio uguale a r è dato da tutti e soli i punti $P := (x, y, z)$ per i quali esistono $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \cos u \\ y = y_0 + r \sin t \cos u \\ z = z_0 + \quad\quad r \sin u \end{cases}$$

*Le equazioni precedenti vengono chiamate **equazioni parametriche** della sfera $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione È abbastanza facile verificare che, per ogni t e u, i punti dati dalle equazioni parametriche di una sfera appartengono effettivamente alla sfera: basta sostituire le espressioni date dalle equazioni parametriche nell'equazione cartesiana:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$$

e vedere che si ottiene un'identità.

Un po' più difficile e mostrare che dalle equazioni parametriche si ottengono tutti i punti di una sfera. Per aiutare i volenterosi che si vogliono cimentare nella dimostrazione, diciamo che i parametri t e u vengono chiamati rispettivamente **longitudine** e **latitudine** del punto $P(t, u)$ della sfera $\mathcal{S}$. ■

36.8 Soluzioni degli esercizi di base

EB.36.3 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3 + \ \ t = 1 + 2u \\ 1 - 3t = \quad\ 2u \\ 2 + 4t = \quad\quad u \end{cases}.$$

Il sistema non è risolubile, quindi le due rette non hanno punti in comune.

EB.36.10 Sia $\boldsymbol{v} := (l, m, n)$ un vettore direttore di una retta r. Un vettore $\boldsymbol{w} := (x, y, z)$ è ortogonale a r se e solo se è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ cioè se e solo se $lx + my + nz = 0$. Notiamo che l, m e n sono numeri noti e almeno uno di essi è non nullo (altrimenti $\boldsymbol{v}$ sarebbe il vettore nullo e non potrebbe essere un vettore direttore). Dunque la condizione $lx + my + nz = 0$ è un'equazione omogenea non banale nelle incognite x, y e z. L'insieme delle sue soluzioni è allora un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione $3 - 1 = 2$, come richiesto.

EB.36.19 Il vettore $\boldsymbol{v} := (1, -2, 4)$ è parallelo alla retta r. Cerchiamo due vettori linearmente indipendenti e ortogonali al vettore $\boldsymbol{v}$. Un vettore (a, b, c) è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ se e solo se $a - 2b + 4c = 0$, cioè se $a = 2b - 4c$. Dunque i vettori ortogonali a $\boldsymbol{v}$ sono tutti e soli i vettori del tipo $(2b - 4c, b, c)$ al variare dei parametri b e c. Ponendo $b := 1$ e $c := 0$ otteniamo il vettore $\boldsymbol{w}_1 := (2, 1, 0)$, ponendo invece $b := 0$ e $c := 1$ troviamo il vettore $\boldsymbol{w}_2 := (-4, 0, 1)$. Il piano cercato π ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 4 + 2t - 4u \\ y = 7 + \ \ t \\ z = 2 + \quad\quad\ \ u \end{cases}$$

EB.36.23 Nell'esercizio di base 36.19 abbiamo determinato le equazioni parametriche del piano π. Per determinare una sua equazione cartesiana, possiamo partire da quest'ultime e eliminare i parametri.

Alternativamente si determina immediatamente un'equazione cartesiana del piano π usando il teorema 36.20. Abbiamo che il generico piano ortogonale a r ha equazione:

$$x - 2y + 4z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si trova la condizione $4 - 2 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = 2$. Il piano ha dunque equazione:

$$x - 2y + 4z + 2 = 0.$$

EB.36.28

a. Scriviamo l'equazione del fascio di piani passanti per r

$$\lambda(x + y + 1) + \mu(x + z - 2) = 0,$$

che possiamo riscrivere come:

$$(\lambda + \mu)x + \lambda y + \mu z + \lambda - 2\mu = 0.$$

Si ottiene un piano ortogonale a s se e solo se il vettore $(\lambda + \mu, \lambda, \mu)$ è multiplo del vettore direttore di s, cioè $(-1, -5, 0)$. Si vede facilmente che ciò non è possibile, e, dunque, non esiste alcun piano passante per r e ortogonale a s.

b. Consideriamo nuovamente il fascio di piani passante per r

$$(\lambda + \mu)x + \lambda y + \mu z + \lambda - 2\mu = 0.$$

Si ottiene un piano ortogonale a n se e solo se il vettore $(\lambda + \mu, \lambda, \mu)$ è multiplo del vettore direttore di n, cioè $(-1, -1, 0)$. Ciò si ottiene ponendo $\lambda := -1$ e $\mu := 0$ (o qualunque altra coppia di valori a questi proporzionale). Il piano cercato ha, dunque, equazione:

$$-x - y - 1 = 0.$$

Ci chiediamo come mai nel primo caso non c'era alcun piano con le caratteristiche cercate e nel secondo sì. Cerchiamo di capire che cosa differenzia geometricamente le due situazioni.

Innanzitutto svolgendo i calcoli si trova che r ha parametri direttori $(1, -1, -1)$. Applicando la condizione di ortogonalità si vede facilmente che r non è ortogonale a s mentre r è ortogonale a n. Pertanto non può esistere nessun piano π contenente r e ortogonale a s perché allora ogni retta contenuta in π (in particolare r) dovrebbe essere ortogonale a s. Poiché r e n sono ortogonali è possibile invece trovare un piano contenente r e ortogonale a n.

EB.36.31 Applicando la formula data nel teorema 36.29 abbiamo:

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{0}{\sqrt{30}} = 0.$$

Notiamo che, se avessimo osservato che il punto P_0 appartiene al piano π, avremmo immediatamente concluso che la distanza tra il punto e il piano è uguale a 0.

EB.36.36 A seconda di come abbiamo calcolato la distanza tra le rette r e s nell'esempio 36.35, possiamo determinare la retta n utilizzando metodi diversi.

• Supponiamo di aver calcolato la distanza tra r e s, determinando il piano π passante per r e parallelo alla retta s:

$$\pi\colon 5x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

Sappiamo che la retta s cercata è data dall'intersezione del piano α passante per la retta r e ortogonale al piano π e il piano β passante per la retta s e ortogonale al piano π.

Determiniamo pertanto il piano α. Scegliamo un punto sulla retta r, ad esempio $A := (1, 0, 2)$. Il piano α deve passare per A ed essere parallelo al vettore direttore $v := (-1, 3, 2)$ della retta r e al vettore $w := (5, 3, -2)$ ortogonale al piano π. Quindi:

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$-12x + 8y - 18z + 48 = 0.$$

Determiniamo ora il piano β. Scegliamo un punto sulla retta s, ad esempio $B := (1, 2, 3)$. Il piano β deve passare per B ed essere parallelo al vettore direttore $v := (1, -1, 1)$ della retta s e al vettore $w := (5, 3, -2)$ ortogonale al piano π. Quindi:

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$-x + 7y + 8z - 37 = 0.$$

Dunque la retta n ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} -12x + 8y - 18z + 48 = 0 \\ \quad -x + 7y + \ 8z - 37 = 0 \end{cases}$$

• Supponiamo di aver calcolato la distanza tra r e s determinando i punti R su r ed S su s tali che il segmento RS è ortogonale sia alla retta r che alla retta s. La retta s è allora quella passante per i punti R e S ed ha, pertanto, equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{19} + \dfrac{10}{19}t \\ y = \dfrac{33}{19} + \dfrac{6}{19}t \\ z = \dfrac{60}{19} - \dfrac{4}{19}t \end{cases}$$

Volendo potremmo poi ottenerne le equazioni cartesiane.

36.9 Sunto

Ortogonalità di rette

Teorema *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ n_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \\ z = z'_0 + \ n_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ *e* $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$*, le due rette sono ortogonali se e solo se*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Osservazione Nello spazio due rette ortogonali non sono necessariamente incidenti. △

Osservazione A differenza di quanto avviene nel piano, rette ortogonali alla stessa retta non è detto siano parallele fra loro. △

Definizione Un vettore $\boldsymbol{w}$ si dice **ortogonale** a una retta r se è ortogonale a tutti i vettori paralleli alla retta r. △

Osservazione Un vettore $\boldsymbol{w}$ è ortogonale alla retta r se e solo se è ortogonale a un vettore direttore di r. △

Proposizione *L'insieme dei vettori ortogonali a una retta è un sottospazio vettoriale di* $V^3(O)$ *di dimensione* 2.

Angoli tra rette

Teorema *Siano date le rette:*

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ l_1 t \\ y = y_0 + m_1 t \\ z = z_0 + \ n_1 t \end{cases} \quad e \quad s\colon \begin{cases} x = x'_0 + \ \ l_2 t \\ y = y'_0 + m_2 t \\ z = z'_0 + \ n_2 t \end{cases}$$

Posto $\boldsymbol{v} := (l_1, m_1, n_1)$ *e* $\boldsymbol{w} := (l_2, m_2, n_2)$*, gli angoli supplementari* α *e* β *formati dalle rette* r *e* s *sono dati dalle formule:*

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \cos\beta = -\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|},$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \\ \cos\beta &= -\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \end{aligned}$$

Definizione Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + \ nt \end{cases}$$

i numeri:

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right)$$

vengono chiamati **coseni direttori** della retta r. △

Osservazione I coseni direttori sono le componenti di un vettore di lunghezza uguale a 1 e parallelo alla retta r. Una retta r ha infinite equazioni parametriche. Cambiando le equazioni parametriche della retta r, i suoi coseni direttori rimangono invariati oppure sono tutti e tre moltiplicati per -1. Da ciò deriva che i coseni direttori di una retta sono determinati a meno del segno. △

Ortogonalità tra rette e piani

Definizione Un **vettore** $\boldsymbol{v}$ si dice **ortogonale** a un piano π se esso è ortogonale a tutti i vettori $\boldsymbol{w}$ paralleli al piano π. △

Teorema *Siano dati un piano π e un vettore $\boldsymbol{v}$. Se il vettore $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a due vettori linearmente indipendenti paralleli al piano π, allora esso è ortogonale al piano.*

Proposizione *L'insieme dei vettori ortogonali a un piano è un sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 1.*

Teorema *Dato un piano π di equazione cartesiana*

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0.$$

Allora il vettore $\boldsymbol{v}$ di componenti (a, b, c) (che è non nullo) è ortogonale al piano π.

Ortogonalità tra piani

Teorema *I piani π e σ di equazioni cartesiane:*

$$\pi \colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \sigma \colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

sono ortogonali se e solo se

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Distanze

Teorema *La distanza tra il punto $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ e il piano*

$$\pi \colon ax + by + cz + d = 0$$

è data da:

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sfere

Teorema *Sia $C := (x_0, y_0, z_0)$ e sia $r \geq 0$. L'insieme dei punti appartenenti alla sfera $\mathcal{S}$ di centro C e raggio r coincide con l'insieme dei punti $P := (x, y, z)$ le cui coordinate verificano l'equazione:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

*L'equazione precedente viene detta **equazione cartesiana** della sfera.*

Teorema *L'insieme dei punti della sfera $\mathcal{S}$ di centro $C := (x_0, y_0, z_0)$ e raggio uguale a r è dato da tutti e soli i punti $P := (x, y, z)$ per i quali esistono $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \cos u \\ y = y_0 + r\sin t \cos u \\ z = z_0 + \qquad r\sin u \end{cases}$$

*Le equazioni precedenti vengono chiamate **equazioni parametriche** della sfera $\mathcal{S}$.*

36.10 Esercizi

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano.

E.36.1 Determinare le coordinate della proiezione H di $P := (1, 3, 2)$ sul piano $\pi\colon 2x - y + 3z - 4 = 0$.

E.36.2 Determinare le coordinate del punto P' simmetrico del punto $P := (1, 3, 2)$ rispetto al piano $\pi\colon 2x - y + 3z - 4 = 0$.

E.36.3 Determinare la distanza tra i piani: $\pi\colon x + 2y + 3z - 1 = 0$ e $\sigma\colon x + 2y + 3z = 0$.

E.36.4 Siano dati il punto $A := (2, -1, 3)$ e la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \phantom{-1 -{}} 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

a. Determinare le coordinate della proiezione H del punto A sulla retta r;

b. determinare la distanza del punto A dalla retta r;

c. determinare il punto A' simmetrico del punto A rispetto alla retta r.

E.36.5 Siano dati il punto A e la retta r dell'esercizio E.36.4. Sia s la retta parallela a r e passante per il punto A. Determinare la distanza tra le rette r e s.

E.36.6 Determinare le equazioni cartesiane e parametriche delle rette dello spazio determinate dalle condizioni:

a. passante per il punto $P := (1, 0, 1)$ e ortogonale ai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (0, 1, 2)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (1, 3, 1)$;

b. passante per il punto $P := (1, -1, 3)$ e ortogonale al piano π di equazione cartesiana $x + 2y - 3z - 2 = 0$;

c. passante per il punto $P := (1, 3, 5)$ e ortogonale al piano di equazioni parametriche

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2 - 2t + u \\ y = 2 + 3t - 2u \\ z = 1 - t \end{cases}$$

E.36.7 Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani dello spazio determinate dalle condizioni:

a. passante per il punto $P := (1, -1, 1)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{v} := (3, 1, 2)$;

b. passante per il punto $P := (1, -1, 3)$ e ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} x + 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases};$$

c. passante per il punto $P := (1, 3, 5)$ e ortogonale alla retta di equazioni parametriche

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases};$$

E.36.8 Calcolare la distanza tra le rette

$$r\colon \begin{cases} 3x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

e

$$s\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

E.36.9 Siano date le rette

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - z \phantom{{}-1} = 0 \end{cases}$$

e

$$s\colon \begin{cases} x - y \phantom{{}+z+5} = 0 \\ x \phantom{{}-y} + z + 5 = 0 \end{cases}.$$

a. Determinare il piano π parallelo a r e s ed equidistante da esse;

b. determinare la retta n ortogonale e incidente r e s;

c. determinare la distanza di r da s.

E.36.10 Siano dati il piano di equazione cartesiana $\pi\colon 2x + y + 3z - 1 = 0$, la retta

$$r\colon \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x + y - z \phantom{{}-1} = 0 \end{cases}$$

e il punto $P := (1, 2, 1)$. Determinare:

a. la proiezione ortogonale P' di P su π;

b. il simmetrico P'' di P rispetto a π;

c. la proiezione ortogonale Q di P su r;

d. il simmetrico Q' di P rispetto a r.

36.11 Soluzioni degli esercizi

E.36.1 Il punto H è il punto di intersezione del piano π con la retta s passante per P e ortogonale al piano π. La retta s ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Intersecando π con s troviamo l'equazione:

$$2(1 + 2t) - (3 - t) + 3(2 + 3t) - 4 = 0,$$

che ha come soluzione $t = -\frac{1}{14}$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo la proiezione $H = \left(\frac{6}{7}, \frac{43}{14}, \frac{25}{14}\right)$ del punto P sul piano π.

E.36.2 Il simmetrico del punto P rispetto al piano π, è il punto simmetrico di P rispetto alla sua proiezione H sul piano π. Nell'esercizio E.36.1 abbiamo già determinato la proiezione H. Pertanto:

$$P' = 2\left(\frac{6}{7}, \frac{43}{14}, \frac{25}{14}\right) - (1, 3, 2) = \left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

E.36.3 Sappiamo che la distanza tra i due piani è uguale alla distanza di un punto di un piano dall'altro piano. Prendiamo pertanto il punto O sul piano σ e calcoliamo la sua distanza dal piano π. Abbiamo:

$$\mathrm{d}(\pi, \sigma) = \mathrm{d}(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

E.36.4

a. La proiezione H del punto A sulla retta r è, per definizione, l'intersezione della retta r con il piano π passante per A e ortogonale alla retta r. Pertanto il piano π ha equazione cartesiana:

$$\pi\colon 1(x - 2) + 3(y + 1) - 2(z - 3) = 0,$$

cioè:

$$\pi\colon x + 3y - 2z + 7 = 0.$$

Per determinare il punto H sostituiamo nell'equazione di π al posto delle variabili le coordinate di un punto generico della retta r. Otteniamo:

$$1 + t + 3(3t) - 2(-1 - 2t) + 7 = 0,$$

da cui ricaviamo

$$t = -\frac{5}{7}.$$

Sostituendo il valore di t ottenuto nelle equazioni parametriche di r otteniamo:

$$H = \left(\frac{2}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

b. La distanza del punto A dalla retta r è, per definizione, la distanza tra il punto A e H. Abbiamo pertanto:

$$\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \frac{2}{7}\sqrt{133}.$$

c. Il punto A' simmetrico del punto A rispetto alla retta r è, per definizione, il punto simmetrico di A rispetto a H. Abbiamo quindi:

$$A' = \left(-\frac{10}{7}, -\frac{23}{7}, -\frac{15}{7}\right).$$

E.36.5 La distanza tra le due rette è, per definizione, la distanza tra un punto qualsiasi sulla retta s e la sua proiezione sulla retta r. Scegliamo allora il punto A della retta s. Abbiamo già calcolato nell'esercizio E.36.4 la distanza tra A e la sua proiezione H sulla retta r. Abbiamo pertanto:

$$\mathrm{d}(r, s) = \frac{2}{7}\sqrt{133}.$$

E.36.6 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo in maniera indipendente le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta cercata.

a. Se (m, n, p) sono i parametri direttori della retta cercata allora dall'ortogonalità con i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ otteniamo $n+2p = 0$ e $m+3n+p = 0$. Risolvendo questo sistema troviamo $n = -2p$, $m = 5p$. Possiamo allora scegliere come parametri direttori la terna $(5, -2, 1)$. Le equazioni parametriche sono allora

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = \quad - 2t \\ z = 1 + \quad t \end{cases}.$$

Per determinare le equazioni cartesiane della retta, cerchiamo due piani che la contengono. Il piano di equazione $y + 2z + d = 0$ è ortogonale al vettore $\boldsymbol{v}_1$ ed è quindi parallelo alla retta cercata. Imponendo il passaggio per P troviamo il piano di equazione $y + 2z - 2 = 0$ che contiene la retta cercata. Analogamente il piano di equazione $x + 3y + z - 2 = 0$ contiene la retta cercata. Dunque la retta ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} \qquad y + 2z - 2 = 0 \\ x + 3y + \quad z - 2 = 0 \end{cases}.$$

b. La direzione ortogonale al piano π è individuata dal vettore $(1, 2, -3)$. Le equazioni parametriche della retta sono allora

$$\begin{cases} x = \quad 1 + \quad t \\ y = -1 + 2t \\ z = \quad 3 - 3t \end{cases}.$$

Per determinare le equazioni cartesiane della retta, cerchiamo due piani che la contengono. Un generico piano parallelo alla retta cercata ha equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con (a, b, c) ortogonale a $(1, 2, -3)$ ovvero $a + 2b - 3c = 0$ cioè $a = -2b + 3c$. Due piani paralleli alla retta cercata ma non paralleli tra loro sono, ad esempio, $-2x + y + d = 0$ e $3x + z + e = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = 3$, $e = -6$, da cui otteniamo le equazioni cartesiane della retta:

$$\begin{cases} -2x + y \qquad + 3 = 0 \\ \quad 3x \qquad + z - 6 = 0 \end{cases}.$$

c. Il piano π è parallelo ai vettori $(-2, 3, -1)$ e $(1, -2, 0)$. Se (m, n, p) individua la direzione della retta deve allora essere $-2m + 3n - p = 0$ e $m - 2n = 0$. risolvendo questo sistema troviamo $m = 2n$, $p = -n$. I parametri direttori della retta cercata sono allora $(2, 1, -1)$. Dunque la retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - t \end{cases}.$$

Per determinare le equazioni cartesiane della retta, cerchiamo due piani che la contengono. Sappiamo che la retta cercata è ortogonale ai vettori $(-2, 3, -1)$ e $(1, -2, 0)$: dunque i piani di equazioni rispettive $-2x + 3y - z + d = 0$ e $x - 2y + e = 0$ sono paralleli alla retta cercata. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = -2$, $e = 2$, da cui otteniamo le equazioni cartesiane della retta

$$\begin{cases} -2x + 3y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}.$$

E.36.7 In ciascuno dei punti di questo esercizio determineremo in maniera indipendente le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano cercato.

a. Per determinare le equazioni parametriche del piano dobbiamo trovare due vettori linearmente indipendenti e paralleli al piano. Se (m, n, p) è un vettore parallelo al piano, allora (m, n, p) deve essere ortogonale a $(3, 1, 2)$ ovvero $3m + n + 2p = 0$. Due vettori siffatti linearmente indipendenti sono, ad esempio, $(1, -3, 0)$ e $(0, -2, 1)$. Le equazioni parametriche del piano sono allora

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t - 2u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

L'equazione cartesiana del generico piano ortogonale a $(3, 1, 2)$ è $3x + y + 2z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = -4$, da cui otteniamo l'equazione del piano $3x + y + 2z - 4 = 0$.

b. I vettori $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 1)$ sono ortogonali alla retta r e quindi paralleli al piano cercato. Le equazioni parametriche del piano sono allora

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = -1 + 2t - u \\ z = 3 + 3t + u \end{cases}$$

Per scrivere l'equazione cartesiana del piano, osserviamo che se (a, b, c) è un vettore ortogonale al piano cercato, allora (a, b, c) è ortogonale ai vettori $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 1)$ ovvero $a + 2b + 3c = 0$ e $2a - b + c = 0$. Le soluzioni di questo sistema sono $a = -c$, $b = -c$. Dunque un vettore ortogonale al piano è $(-1, -1, 1)$: il piano ha equazione del tipo $-x - y + z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = -3$, da cui otteniamo l'equazione del piano $-x - y + z - 3 = 0$.

c. La direzione della retta è individuata dal vettore $(-2, -1, 2)$. Per determinare le equazioni parametriche del piano dobbiamo trovare due vettori linearmente indipendenti e paralleli al piano. Se (m, n, p) è un vettore parallelo al piano, allora (m, n, p) deve essere ortogonale a $(-2, -1, 2)$ ovvero $-2m - n + 2p = 0$. Due vettori siffatti linearmente indipendenti sono, ad esempio, $(1, 0, 1)$ e $(1, -2, 0)$. Le equazioni parametriche del piano sono allora

$$\begin{cases} x = 1 + t + u \\ y = 3 - 2u \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana del piano osserviamo che il generico piano ortogonale alla retta assegnata ha equazione cartesiana $-2x-y+2z+d=0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $d=-5$, da cui otteniamo l'equazione $-2x-y+2z-5=0$ del piano cercato.

E.36.8 Per calcolare la distanza tra due rette nello spazio dobbiamo anzitutto determinare il piano contenente una delle due rette e parallelo all'altra (nel caso ci sia più di un piano che soddisfa questa condizione, le due rette sono parallele). Dal momento che la retta r è data per mezzo di equazioni cartesiane conviene considerare il fascio di piani passanti per essa:

$$\lambda(3x+y-2z-1)+\mu(x+y+3z+2)=0$$

che può essere riscritto così:

$$(3\lambda+\mu)x+(\lambda+\mu)y+(-2\lambda+3\mu)z+(-\lambda+2\mu)=0.$$

Imponiamo il parallelismo tra questo piano e la retta s (i cui parametri direttori sono $(-2,3,-2)$):

$$-2\cdot(3\lambda+\mu)+3\cdot(\lambda+\mu)+(-2)\cdot(-2\lambda+3\mu)=0$$

vale a dire $\lambda-5\mu=0$. Le soluzioni di questa equazione sono tutte proporzionali tra loro e individuano, quindi, lo stesso piano. Scegliendo, ad esempio, $\lambda=5$ e $\mu=1$ troviamo allora l'equazione del piano π contenente r e parallelo a s:

$$\pi: 16x+6y-7z-3=0$$

La distanza tra r e s è allora uguale alla distanza tra π e un qualsiasi punto di s, ad esempio $P:=(1,-2,3)$:

$$\mathrm{d}(r,s)=\mathrm{d}(\pi,P)=\frac{|16\cdot 1+6\cdot(-2)-7\cdot 3-3|}{\sqrt{16^2+6^2+(-7)^2}}=\frac{20}{\sqrt{341}}.$$

E.36.9 Se (m,n,p) è un vettore parallelo alla retta r devono essere soddisfatte le equazioni $2m-n+3p=0$ e $m+n-p=0$ che, risolte, danno $p=\frac{3}{5}n$, $m=-\frac{2}{5}n$. Possiamo allora scegliere $(-2,5,3)$ come parametri direttori di r. Analogamente troviamo che un vettore parallelo a s è $(1,1,-1)$.

a. Se il piano cercato ha equazione $ax+by+cz+d=0$, allora il vettore (a,b,c) deve essere ortogonale a $(-2,5,3)$ e a $(1,1,-1)$, ovvero $-2a+5b+3c=0$ e $a+b-c=0$. Risolvendo questo sistema troviamo $a=-8b$, $c=-7b$. L'equazione generica del piano parallelo a r e s è allora: $8x-y+7z+d=0$. Consideriamo ora un punto qualunque su r, ad esempio, $P:=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e un punto qualunque su s, ad esempio $Q:=(0,0,-5)$. Imponendo che il piano sia equidistante da P e Q troviamo la condizione:

$$\frac{|8\cdot 0-\frac{1}{2}+7\cdot\frac{1}{2}+d|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+7^2}}=\frac{|8\cdot 0-0+7\cdot(-5)+d|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+7^2}}$$

che dà origine all'equazione

$$|3+d|=|-35+d|.$$

dunque, o $3+d=-35+d$, che non ha soluzione, o $3+d=35-d$ che dà come soluzione $d=16$. Il piano cercato è, pertanto, $8x-y+7z+16=0$.

b. Scriviamo le equazioni parametriche delle due rette (per far questo occorre risolvere i sistemi lineari che danno le loro equazioni cartesiane):

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{1}{2} - 5t \\ z = \dfrac{1}{2} - 3t \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = -5 - u \end{cases}$$

Il vettore che congiunge il punto generico di r con il punto generico di s è allora $\left(u - 2t, u + 5t - \frac{1}{2}, 3t - u - \frac{11}{2}\right)$. Imponiamo che questo vettore sia ortogonale a entrambe le rette: poiché i parametri direttori di r sono $(2, -5, -3)$ e quelli di s sono $(1, 1, -1)$, otteniamo le equazioni:

$$2(u - 2t) - 5\left(u + 5t - \frac{1}{2}\right) - 3\left(3t - u - \frac{11}{2}\right) = 0$$
$$(u - 2t) + \left(u + 5t - \frac{1}{2}\right) - \left(3t - u - \frac{11}{2}\right) = 0$$

Risolvendo questo sistema troviamo $t = \frac{1}{2}$, $u = -\frac{5}{3}$. In corrispondenza di questi valori troviamo i punti $R = (1, -2, -1)$ e $S = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ la cui congiungente è la retta cercata. Tale retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{8}{3}t \\ y = -2 + \dfrac{1}{3}t \\ z = -1 - \dfrac{7}{3}t \end{cases}.$$

c. La distanza di r da s è ora semplicemente la distanza di R da S cioè

$$\sqrt{\left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-2 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{114}.$$

Equivalentemente basta calcolare la distanza di r dal piano π e raddoppiarla. La distanza di r da π è la distanza di un qualsiasi punto di r da P. Prendiamo ad esempio il punto $P := \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ già utilizzato. Si ha

$$\mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|8 \cdot 0 - \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 16|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{114}.$$

Dunque $\mathrm{d}(r, s) = 2\frac{1}{6}\sqrt{114} = \frac{1}{3}\sqrt{114}$.

E.36.10 La retta n passante per P e ortogonale a π ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

a. Il punto P' è l'intersezione di π con n. Ciò si ottiene risolvendo l'equazione

$$2(1 + 2t) + (2 + t) + 3(1 + 3t) - 1 = 0,$$

che, ha come soluzione $t = -\frac{3}{7}$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo $P' = \left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

b. Il punto P'' è tale che P' sia il punto medio di P e P''. Se allora $P'' = (x, y, z)$ si ha $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{7}$, $\frac{y+2}{2} = \frac{11}{7}$, $\frac{z+1}{2} = -\frac{2}{7}$, da cui troviamo $P'' = \left(-\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{11}{7}\right)$.

c. Il punto Q è l'intersezione di r con il piano σ passante per P e ortogonale a r. I vettori $(2, 1, -3)$ e $(1, 1, -1)$ sono ortogonali a r. Se (m, n, p) sono i parametri direttori di r si ha allora $2m + n - 3p = 0$ e $m + n - p = 0$. Risolvendo questo sistema troviamo $m = 2p$, $n = -p$. dunque i parametri direttori di r sono $(2, -1, 1)$. Il generico piano ortogonale a r è allora $2x - y + z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = -1$. Pertanto σ ha equazione $2x - y + z - 1 = 0$. Risolviamo allora il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

e troviamo $Q = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

d. Il punto Q' è il punto tale che Q sia il punto medio di P e Q'. Se allora $Q' = (x, y, z)$ si ha $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{y+2}{2} = -\frac{2}{3}$, $\frac{z+1}{2} = -\frac{1}{3}$, da cui troviamo $Q' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

CAPITOLO 37

Endomorfismi dello spazio euclideo: due esempi

Nel capitolo 32 abbiamo visto come determinare eventuali basi di autovettori di endomorfismi di spazi vettoriali. Dovrebbe essere chiaro quale sia il vantaggio dell'utilizzo di una base di autovettori di un endomorfismo: la matrice associata all'endomorfismo relativamente a una base di autovettori è diagonale e quindi tutti i calcoli sull'endomorfismo sono facilitati. Vi sono però dei casi in cui il fatto che i calcoli sull'endomorfismo siano facilitati non è di molto aiuto. Vediamolo con un esempio.

Esempio 37.1 Consideriamo lo spazio vettoriale $V^3(O)$, il suo prodotto scalare standard e una base ortonormale formata dai vettori:

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}, \boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}, \boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OU_3}.$$

Ricordiamo che, scegliendo in $V^3(O)$ una base ortonormale, il prodotto scalare di due vettori dati $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ si calcola facilmente. Se, infatti, $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{w} = a'\boldsymbol{e}_1 + b'\boldsymbol{e}_2 + c'\boldsymbol{e}_3$, si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = aa' + bb' + cc'.$$

Consideriamo ora il piano π di equazione cartesiana:

$$\pi \colon x + y + z = 0$$

e sia $f \colon V^3(O) \to V^3(O)$ la funzione che associa a un vettore $\overrightarrow{OP}$ il vettore $f(\overrightarrow{OP}) := \overrightarrow{OH}$, dove H è la proiezione ortogonale del punto P sul piano π. In altre parole il punto H è il punto di intersezione del piano π con la retta passante per P e ortogonale al piano π. Se P ha coordinate (a, b, c) rispetto al riferimento assegnato, per trovare la sua proiezione ortogonale sul piano P consideriamo le equazioni parametriche della retta n passante per P e ortogonale al piano π

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + t \\ z = c + t \end{cases}.$$

Intersecando la retta n con il piano π troviamo l'equazione risolvente nell'incognita t:

$$(a+t)+(b+t)+(c+t)=0$$

la cui unica soluzione $t=-\frac{a+b+c}{3}$, sostituita nelle equazioni parametriche di n, dà le coordinate della proiezione di P:

$$H=\left(\frac{2a-b-c}{3},\frac{-a+2b-c}{3},\frac{-a-b+2c}{3}\right).$$

Poiché $f(\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OH}$ possiamo scrivere esplicitamente

$$f(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3)=\frac{2a-b-c}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{-a+2b-c}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{-a-b+2c}{3}\boldsymbol{e}_3$$

Notiamo che le componenti di $f(\overrightarrow{OP})$ sono polinomi omogenei di grado 1 nelle variabili a, b e c, componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$; pertanto la funzione f è un endomorfismo dello spazio vettoriale $V^3(O)$. La formula che definisce f è piuttosto complicata. Cerchiamo quindi, se esiste, una base di autovettori di f. La matrice rappresentativa di f relativamente alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ è:

$$A:=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli (esercizio) si trovano gli autovalori e gli autovettori di f. Gli autovalori sono 0 e 1; una base dell'autospazio $E(0)$ è formata dal vettore:

$$\boldsymbol{v}_1:=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,$$

mentre una base dell'autospazio $E(1)$ è formata dai vettori:

$$\boldsymbol{v}_2:=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{v}_3:=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3.$$

Abbiamo determinato autovalori e autospazi sfruttando gli algoritmi introdotti nel capitolo 32. Tuttavia una semplice analisi della definizione della funzione f dal punto di vista geometrico ci avrebbe fatto risparmiare molti calcoli. Infatti l'autospazio relativo all'autovalore 0 è formato, per definizione, dai vettori che hanno come immagine il vettore nullo. Questi vettori sono ovviamente tutti i vettori che hanno il punto finale sulla retta passante per O e ortogonale al piano π. Sono quindi tutti i vettori di componenti (a,a,a) (ricordiamo infatti che $(1,1,1)$ sono i coefficienti delle variabili nell'equazione del piano π). I vettori dell'autospazio relativo all'autovalore 1 sono tutti i vettori aventi come immagine sé stessi e quindi sono tutti e soli i vettori aventi il punto finale sul piano π. Torniamo al nostro endomorfismo. La matrice associata a f relativamente alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ è:

$$D:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Se decomponiamo dunque i vettori di $V^3(O)$ rispetto a quest'ultima base, possiamo rappresentare l'endomorfismo f con la formula:

$$f(a'\boldsymbol{v}_1+b'\boldsymbol{v}_2+c'\boldsymbol{v}_3)=b'\boldsymbol{v}_2+c'\boldsymbol{v}_3.$$

Non c'è dubbio che abbiamo una formula molto più semplice della formula originaria.

Nasce però un problema: la base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ non è ortonormale. Pertanto la formula per determinare il prodotto scalare in funzione delle componenti dei vettori relative a questa base è molto complicata. Abbiamo semplificato la formula dell'endomorfismo ma abbiamo complicato la formula del prodotto scalare. Ci chiediamo se esista una base di $V^3(0)$ che renda semplice la formula dell'endomorfismo e, nello stesso tempo, renda semplice la formula del prodotto scalare.

Una tale base, per rendere semplice la formula dell'endomorfismo, deve essere una base di autovettori di f; per rendere semplice la formula del prodotto scalare, deve essere una base ortonormale. Cerchiamo quindi una base che sia formata da autovettori di f e che sia ortonormale.

Determiniamo innanzitutto una base di $V^3(0)$ formata da autovettori di f che sia ortogonale. Poiché tale base è formata da autovettori di f, tra essi ce ne deve essere uno relativo all'autovalore 0 (cioè un vettore con il punto terminale sulla retta r passante per O e ortogonale al piano π) e due relativi all'autovalore 1 (cioè vettori con il punto terminale sul piano π). La base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ ha il vettore $\boldsymbol{v}_1$ ortogonale ai vettori $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ ma i vettori $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ non sono tra loro ortogonali.

Notiamo che il vettore $\boldsymbol{v}_1$ è ortogonale a tutti i vettori il cui punto terminale sta sul piano π, cioè a tutti i vettori dell'autospazio $E(1)$. Cerchiamo allora una base ortogonale di $E(1)$. Per far ciò fissiamo innanzitutto un vettore non nullo di $E(1)$, per esempio il vettore $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ e cerchiamo i vettori $\boldsymbol{v} \in E(1)$ che siano ortogonali a $\boldsymbol{v}_2$. Un generico vettore di $E(1)$ è dato dalla combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ (sappiamo infatti che questi formano una base di $E(1)$). Quindi:

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}_2 + b\boldsymbol{v}_3 = a(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) + b(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) = (a+b)\boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{e}_2 - b\boldsymbol{e}_3.$$

Imponiamo che questo vettore sia ortogonale al vettore $\boldsymbol{v}_2$. Per far ciò calcoliamo il prodotto scalare tra $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}$, sfruttando la loro decomposizione rispetto ai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ (che, lo ricordiamo, formano una base ortonormale per $V^3(O)$). Otteniamo:

$$\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v} = 1 \cdot (a+b) - 1 \cdot (-a) + 0 \cdot (-b).$$

Ponendo uguale a 0 questo prodotto scalare troviamo la relazione $2a + b = 0$. Ponendo $a = 1$ $b = -2$ otteniamo il vettore $\boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$. I vettori $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ sono autovettori di f che formano una base ortogonale di $V^3(O)$. Questa base non è però ortonormale. Infatti:

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{6}.$$

Consideriamo allora i vettori:

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}.$$

Questi vettori hanno allora norma 1 e sono a due a due ortogonali (questo segue facilmente dalle proprietà del prodotto scalare). Scriviamo esplicitamente questi vettori:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{w}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

Abbiamo finalmente determinato una base ortonormale di $V^3(O)$ formata da autovettori di f.

Sappiamo che abbiamo:

$$D = M^{-1}AM$$

dove M è la matrice di passaggio dalla base ortonormale formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ alla base ortonormale formata dai vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ e quindi abbiamo:

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Si può dimostrare che si ha:

$${}^tMM = I,$$

o equivalentemente

$${}^tM = M^{-1}. \qquad \triangle$$

Il fatto che la matrice M di passaggio tra due basi ortonormali verifichi la condizione ${}^tMM = I$ non è un caso. Si ha infatti, in generale, il seguente teorema che dimostreremo in un prossimo capitolo:

Teorema 37.2 *La matrice di passaggio M tra due basi ortonormali di $V^3(O)$ verifica la condizione:*

$${}^tMM = I.$$

Definizione 37.3 Una matrice M invertibile di ordine 3 a coefficienti reali si dice **ortogonale** se si ha ${}^tMM = I$. L'insieme di tali matrici si dice **gruppo ortogonale** e si indica con il simbolo $O(3)$. $\triangle$

Nota 37.4 Ricapitoliamo quel che abbiamo visto nell'esempio 37.1. Abbiamo considerato un endomorfismo f di $V^3(O)$ e abbiamo determinato una base di $V^3(O)$ che:

- è formata da autovettori di f;
- è una base ortonormale.

Per fare ciò abbiamo usato il seguente procedimento:

- Abbiamo determinato gli autospazi di f;
- abbiamo verificato se tutti i vettori di un autospazio sono ortogonali a tutti gli autovettori degli altri autospazi.

Una volta verificata questa condizione:

- abbiamo determinato per ogni autospazio una base ortogonale;
- abbiamo considerato la base di $V^3(0)$ ottenuta unendo le basi ortogonali di ciascun autospazio.

In tal modo abbiamo ottenuto una base ortogonale di $V^3(O)$. Per determinare una base ortonormale:

- abbiamo normalizzato i vettori della base ortogonale; abbiamo cioè diviso ogni vettore per la sua norma. △

Riprendiamo di nuovo l'esempio 37.1. Osserviamo che un punto cruciale del procedimento per la determinazione di una base ortonormale formata da autovettori di f risiede nella verifica che ogni vettore di un autospazio è ortogonale a tutti i vettori degli altri autospazi. Nel nostro esempio ciò accade, ma non è detto che accada sempre.

Esempio 37.5 Modifichiamo leggermente l'endomorfismo dell esempio 37.1, considerando il piano $\pi\colon x + y + z = 0$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

La retta r non è ortogonale al piano π. Sia $g\colon V^3(O) \to V^3(O)$ la funzione che associa al vettore $\overrightarrow{OP}$ il vettore $\overrightarrow{OK}$, dove K è la proiezione parallela alla retta r sul piano π del punto P; in altri termini, il punto K è il punto di intersezione del piano π con la retta s passante per P e parallela alla retta r.

Se P ha coordinate (a, b, c) rispetto alla base assegnata, la retta s ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \\ z = c + t \end{cases}.$$

Intersecando la retta s con il piano π troviamo l'equazione risolvente nell'incognita t:

$$(a + t) + (b + 2t) + (c + t) = 0$$

la cui unica soluzione $t = -\frac{a+b+c}{4}$, sostituita nelle equazioni parametriche di n, dà le coordinate della proiezione di P:

$$H = \left(\frac{3a - b - c}{4}, \frac{-2a + 3b - 2c}{4}, \frac{-a - b + 3c}{4} \right).$$

Poiché $g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OH}$ possiamo scrivere esplicitamente

$$g(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3) = \frac{3a - b - c}{4}\boldsymbol{e}_1 + \frac{-2a + 3b - 2c}{4}\boldsymbol{e}_2 + \frac{-a - b + 3c}{4}\boldsymbol{e}_3.$$

Come nell'esempio precedente si deduce dall'espressione di g che g è un endomorfismo di $V^3(O)$. La matrice rappresentativa di g relativamente alla base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ è:

$$B := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Vogliamo determinare, se esiste, una base di $V^3(O)$ formata da autovettori di g. Notiamo che i vettori che vengono proiettati nel vettore nullo sono quelli il cui punto finale giace sulla retta r. Questi vettori formano dunque l'autospazio $E(0)$. In modo analogo i vettori il cui punto finale giace sul piano π formano l'autospazio $E(1)$.

Notiamo allora che $\dim E(0) + \dim E(1) = 1 + 2 = 3$ e, dunque, l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Una base di $V^3(O)$ formata di autovettori di g è allora costituita da un vettore non nullo $\boldsymbol{v}_1$ il cui punto terminale giace sulla retta r e da due vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ il cui punto terminale giace sul piano π. Se fosse possibile scegliere questi vettori con $\boldsymbol{v}_1$ ortogonale sia a $\boldsymbol{v}_2$ che $\boldsymbol{v}_3$, allora $\boldsymbol{v}_1$ sarebbe ortogonale al piano π, cioè r sarebbe ortogonale al piano π, il che non è vero.

Non esiste allora alcuna base di $V^3(O)$ formata da autovettori di g. In questo caso non riusciamo pertanto a trovare una base di $V^3(O)$ rispetto a cui sia il prodotto scalare, sia l'endomorfismo g si descrivano in maniera semplice. $\triangle$

Riprendiamo ancora una volta l'esempio 37.1 osservando tutto ciò che abbiamo fatto dal punto di vista delle matrici.

- Abbiamo determinato la matrice A rappresentativa di f relativamente alla base ortonormale formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$;

- abbiamo determinato una matrice di passaggio $M \in O(3)$ tale che la matrice $A' = M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Vogliamo ora generalizzare questo procedimento al caso di matrici A a coefficienti reali di ordine n qualsiasi. Vogliamo cioè stabilire se esiste una matrice M tale che ${}^tMM = I$ e per la quale si abbia che la matrice $A' = M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale. Data una matrice $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$ possiamo considerare l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato ad A rispetto alla base canonica. Per poter operare sulla falsariga di quanto fatto nell'esempio 37.1 dobbiamo però dare un significato all'ortogonalità di vettori in $\mathbb{R}^n$, cosa che faremo nel prossimo capitolo.

CAPITOLO 38

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo introduciamo un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, generalizzando opportunamente il prodotto scalare definito in $V^3(O)$. Vedremo come questo ci permetterà, fra l'altro, di generalizzare la definizione di norma (cioè di lunghezza) di un vettore e di definire la ortogonalità tra vettori. Potremo così parlare di basi ortonormali di sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Daremo poi un procedimento esplicito per la determinazione di una base ortonormale di un qualsiasi sottospazio E di $\mathbb{R}^n$. Caratterizzeremo infine le matrici di passaggio tra basi ortonormali dello stesso sottospazio E di $\mathbb{R}^n$.

38.1 Prodotto scalare

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come, dati due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in $V^2(O)$, sia possibile definire in maniera geometrica il loro prodotto scalare $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. In particolare abbiamo notato come, decomponendo i due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ rispetto a una base ortonormale, cioè formata da vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$, a due a due ortogonali e di modulo 1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{v} &= y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2, \end{aligned}$$

il prodotto scalare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ si esprima semplicemente con la formula:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Analogamente, scelta una base ortonormale di $V^3(O)$, e decomposti i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ rispetto a tale base, il loro prodotto scalare si esprime con la formula:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Questa proprietà suggerisce una definizione di prodotto scalare che può essere data in $\mathbb{R}^n$ in maniera puramente algebrica.

Definizione 38.1 Dati due vettori $\boldsymbol{u} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\boldsymbol{v} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ il **prodotto scalare (standard)** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ è definito dalla relazione:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \qquad \triangle$$

Dunque, a due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$ associamo un numero reale $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Esempio 38.2 Il prodotto scalare dei vettori $(1, 2, -1, 0, 1)$ e $(1, -1, 1, 4, -3)$ è uguale a

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) = -5. \qquad \triangle$$

Vediamo le prime proprietà del prodotto scalare.

Proposizione 38.3 *Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà:*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*
3. $k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v})$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e* k *in* $\mathbb{R}$*;*
4. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*
5. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$*.*

La verifica di tutte queste proprietà è assolutamente immediata e viene lasciata per esercizio.

Ricordiamo che, grazie al teorema 33.5, sappiamo che per un vettore $\boldsymbol{u}$ di $V^2(O)$ o $V^3(O)$, vale la relazione $\|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}$. Questo ci suggerisce un modo per definire la norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$. Grazie alla proprietà 4 del prodotto scalare possiamo infatti dare la:

Definizione 38.4 Dato un vettore $\boldsymbol{u}$ in $\mathbb{R}^n$, chiamiamo **modulo** o **norma** del vettore $\boldsymbol{u}$ lo scalare:

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}.$$

Più esplicitamente, se $\boldsymbol{u} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$, si pone:

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \qquad \triangle$$

Esercizio di base 38.5 Determinare la norma dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Dalle proprietà del prodotto scalare si deducono in maniera immediata le proprietà della norma:

Proposizione 38.6 *La norma in $\mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà:*

1. $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*
2. $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$*;*
3. $\|k\boldsymbol{u}\| = |k| \, \|\boldsymbol{u}\|$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e* k *in* $\mathbb{R}$*.*

Notiamo in particolare che dalla proprietà 3 discende che, se dividiamo un vettore non nullo per la propria norma, otteniamo un vettore di norma 1.

Ci piacerebbe adesso dare senso alla nozione di angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^n$: non possiamo dare una definizione, per così dire geometrica, come abbiamo fatto in $V^2(O)$ o $V^3(O)$. Ricordiamo però che, dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $V^2(O)$ o $V^3(O)$, abbiamo definito il loro prodotto scalare con la formula:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} := \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}},$$

dove $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ indica l'angolo compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Osserviamo che se conosciamo il prodotto scalare di due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e le loro norme, possiamo ricavare l'angolo tra essi compreso dalla relazione:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Siamo allora tentati di usare questa formula per definire l'angolo compreso tra due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$. Sorge però un problema: come facciamo a sapere che in questo modo riusciamo effettivamente a definire un angolo? Se il rapporto:

$$\frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|},$$

fosse, ad esempio, uguale a 2, questo rapporto non sarebbe il coseno di nessun angolo, perché, lo ricordiamo, il coseno assume valori compresi tra -1 e 1. Abbiamo però il teorema (la cui dimostrazione riportiamo nel paragrafo A.38):

Teorema 38.7 (Disuguaglianza di Schwarz) *Per ogni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza*

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Grazie alla disuguaglianza di Schwarz, dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$, il rapporto:

$$\frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|},$$

assume valori compresi tra -1 e 1. Ma allora esiste uno e un solo angolo compreso tra 0 e π il cui coseno è uguale a tale rapporto. Ciò permette di dare:

Definizione 38.8 Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$, chiamiamo **angolo compreso** tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ il numero $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$, con $0 \leq \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} \leq \pi$ tale che:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Non definiamo l'angolo tra due vettori di cui (almeno) uno è nullo. $\triangle$

In $V^2(O)$ o $V^3(O)$ un vettore non nullo forma un angolo di ampiezza 0 con se stesso. Inoltre, dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e uno scalare k diverso da 0, l'angolo compreso tra $k\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è uguale all'angolo compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ se $k > 0$, è supplementare dell'angolo compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ se $k < 0$. È facile verificare (in modo algebrico) che queste proprietà continuano a valere in $\mathbb{R}^n$:

Proposizione 38.9 *Se* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *sono vettori non nulli di* $\mathbb{R}^n$ *e* k *è uno scalare non nullo, si ha:*

1. $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = 0$;

2. $\widehat{(k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}} = \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ *se* $k > 0$, $\widehat{(k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}} = \pi - \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ *se* $k < 0$.

Esercizio di base 38.10 Dato un vettore $\boldsymbol{u}$ non nullo calcolare l'angolo tra $-\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}$.

Esempio 38.11 Si considerino i vettori $\boldsymbol{u} := (1,2,1,0)$ e $\boldsymbol{v} := (1,0,2,1)$. Allora l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è definito dalla relazione:

$$\cos\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{(1,2,1,0)\times(1,0,2,1)}{\|(1,2,1,0)\|\|(1,0,2,1)\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Dunque $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{\pi}{3}$. △

Esercizio di base 38.12 Calcolare l'angolo compreso tra le seguenti coppie di vettori: $\boldsymbol{u}_1 := (1,3,1)$ e $\boldsymbol{v}_1 := (2,6,2)$, $\boldsymbol{u}_2 := (1,1,1,3)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 := (1,0,1,0)$ e $\boldsymbol{v}_3 := (0,0,0,0)$.

La definizione di angolo così data suggerisce la definizione di ortogonalità tra vettori.

Definizione 38.13 Diciamo che due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se si ha $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$. Scriveremo in tal caso $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. △

Notiamo che dire che due vettori sono ortogonali non è equivalente a dire che essi formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$: infatti, secondo la definizione che abbiamo dato, il vettore nullo risulta ortogonale a tutti i vettori, e l'angolo tra il vettore nullo e un qualsiasi vettore non è definito. Possiamo però dire che due vettori non nulli sono ortogonali se e solo se formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$.

Concludiamo questo paragrafo con qualche osservazione sul concetto di distanza. Ricordiamo che, dati tre punti A, B e C nello spazio, si ha

$$\mathrm{d}(A,C) \leq \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C),$$

il che si può esprimere anche dicendo che in un triangolo ABC la lunghezza del lato AC è minore della somma delle lunghezze dei lati AB e BC. Per questo motivo questa disuguaglianza viene spesso chiamata **disuguaglianza triangolare**.

Fissiamo ora un punto O nello spazio e reinterpretiamo questa disuguaglianza in termini di vettori di $V^3(O)$. Ricordiamo che la distanza tra due punti P e Q dello spazio è uguale alla norma del vettore $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$. Chiamiamo allora $\boldsymbol{w}$ il vettore $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{u}$ il vettore $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{v}$ il vettore $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Abbiamo dunque $\mathrm{d}(A,C) = \|\boldsymbol{w}\|$, $\mathrm{d}(A,B) = \|\boldsymbol{u}\|$ e $\mathrm{d}(B,C) = \|\boldsymbol{v}\|$. La disuguaglianza triangolare può allora essere riscritta come

$$\|\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

Notiamo però che:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{w}.$$

Possiamo allora riscrivere la disuguaglianza triangolare nella forma

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\leq\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|.$$

In quest'ultima forma la disuguaglianza triangolare si presta ad essere generalizzata a $\mathbb{R}^n$. Diamo infatti il:

Teorema 38.14 (Disuguaglianza triangolare o di Minkowsky) *Per ogni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza*

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\leq\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|.$$

La dimostrazione di questo teorema è riportata nel paragrafo A.38.

38.2 Basi ortonormali

Cominciamo dando la:

Definizione 38.15 Sia E un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ formino una base di E. Diciamo che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ formano una **base ortogonale** di E se i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ sono a due a due ortogonali. Diciamo che $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ formano una **base ortonormale** di E se i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ sono a due a due ortogonali e ciascun $\boldsymbol{v}_i$ ha norma 1. △

Teorema 38.16 *La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.*

Lasciamo per esercizio la dimostrazione di questo semplice fatto. Diamo alcune proprietà delle basi ortonormali:

Proposizione 38.17 *Supponiamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ formino una base ortonormale di un sottospazio E di $\mathbb{R}^n$.*

1. Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore di E allora le componenti di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base formata da $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ sono $(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{v})$, vale a dire:

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_2+\cdots+(\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_r.$$

2. Se $\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{v}_r$ e $\boldsymbol{w}=y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_r\boldsymbol{v}_r$ sono vettori di E allora si ha

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r.$$

Dimostrazione 1. Sia $\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{v}_r$: allora

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_j=x_1\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_j+x_2\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{v}_j+\cdots+x_r\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{v}_j.$$

Poiché $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\dots$, $\boldsymbol{v}_r$ formano una base ortonormale si ha che $\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{v}_j=1$ se $i=j$ e $\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{v}_j=0$ se $i\neq j$. Dunque $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_j=x_j$.

2. Si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{v}_i \times \sum_{j=1}^{r} y_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{i,j=1}^{r} x_i y_j \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i,$$

dove abbiamo ancora utilizzato il fatto che $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_j = 1$ se $i = j$ e $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_j = 0$ se $i \neq j$. ■

Questa proposizione mostra che si può facilmente esprimere un vettore di un sottospazio E di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base ortonormale di E, inoltre è facile calcolare il prodotto scalare di due vettori di E se ne abbiamo la decomposizione rispetto a una base ortonormale.

Esempio 38.18 Consideriamo il sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E := \{(x, y, z, w) \mid x - y + z - w = 0\}.$$

Il sottospazio E ha chiaramente dimensione 3 e si può verificare che ha una base ortonormale formata dai vettori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &:= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \boldsymbol{v}_2 &:= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \boldsymbol{v}_3 &:= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Consideriamo ora il vettore $\boldsymbol{v} := (3, -1, -1, 3)$ di E. Per decomporre $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ basta calcolare i prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_1 &= 2, \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_2 &= 0, \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_3 &= 4. \end{aligned}$$

Dunque

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3.$$

△

Nell'esempio precedente abbiamo esibito una base ortonormale di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$: non è a priori chiaro se un qualsiasi sottospazio E di $\mathbb{R}^n$ ammetta una base ortonormale, né, tantomeno, come si possa eventualmente determinare una tale base.

Ci proponiamo ora di mostrare che ogni sottospazio E di $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale. La dimostrazione che daremo di questo fatto sarà una dimostrazione di tipo costruttivo: partiremo cioè da una base di E e ne costruiremo esplicitamente una base ortonormale.

Iniziamo con qualche esempio:

Esempio 38.19 Sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 2, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (1, 1, 0, 1)$. Cerchiamo innanzitutto di costruire una base ortogonale di E: osserviamo che, qualunque sia α, i vettori $\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1$ formano una base per E (lasciamo per esercizio la facile verifica di questo fatto).

Ci chiediamo ora se sia possibile determinare α in modo tale che $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Calcoliamo allora il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 &= (1,2,1,0) \times ((1,1,0,1) + \alpha(1,2,1,0)) \\ &= (1,2,1,0) \times (1,1,0,1) + \alpha(1,2,1,0) \times (1,2,1,0) \\ &= 3 + 6\alpha.\end{aligned}$$

Se ora poniamo $\alpha \coloneqq -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= (1,2,1,0), \\ \boldsymbol{u}_2 &= (1,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,2,1,0) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right).\end{aligned}$$

I due vettori che abbiamo così ottenuto formano una base ortogonale di E. Se ora dividiamo ciascuno di questi vettori per la propria norma otteniamo una base ortonormale di E:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right), \\ \boldsymbol{w}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).\end{aligned} \qquad \triangle$$

Vediamo adesso un esempio per uno spazio vettoriale di dimensione 3:

Esempio 38.20 Sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_1 \coloneqq (1,0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 \coloneqq (1,0,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 \coloneqq (0,3,-2,1,0)$. Possiamo innanzitutto determinare, come nell'esempio precedente, una base ortogonale per il sottospazio E' generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. Se allora poniamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1, \\ \boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{u}_1,\end{aligned}$$

vediamo che qualunque sia α, i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ formano una base di E'. Calcolando il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 &= (1,0,1,1,0) \times ((1,0,0,1,1) + \alpha(1,0,1,1,0)) \\ &= (1,0,1,1,0) \times (1,0,0,1,1) + \alpha(1,0,1,1,0) \times (1,0,1,1,0) \\ &= 2 + 3\alpha.\end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{2}{3}$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= (1,0,1,1,0), \\ \boldsymbol{u}_2 &= (1,0,0,1,1) - \frac{2}{3}(1,0,1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).\end{aligned}$$

Vogliamo ora trovare una base ortogonale di E. Poniamo allora:

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \boldsymbol{v}_3 + \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2.$$

Si verifica facilmente che $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ formano una base di E, qualunque siano β_1 e β_2: cerchiamo allora β_1 e β_2 tali che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. Calcoliamo i prodotti scalari:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 &= (\boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{u}_1\\ &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1\\ &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1\\ &= (0, 3, -2, 1, 0) \times (1, 0, 1, 1, 0) + \beta_1 (1, 0, 1, 1, 0) \times (1, 0, 1, 1, 0)\\ &= -1 + 3\beta_1.\end{aligned}$$

Si noti che abbiamo utilizzato il fatto che $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = 0$. Dunque se scegliamo $\beta_1 = \frac{1}{3}$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = 0$. Analogamente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 &= (\boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{u}_2\\ &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2\\ &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2\\ &= (0, 3, -2, 1, 0) \times \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\\ &+ \beta_2 \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \times \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\\ &= \frac{5}{3} + \frac{5}{3}\beta_2.\end{aligned}$$

Dunque se scegliamo $\beta_2 = -1$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = 0$. Abbiamo dunque una base ortogonale per E:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= (1, 0, 1, 1, 0),\\ \boldsymbol{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right),\\ \boldsymbol{u}_3 &= (0, 3, -2, 1, 0) + \frac{1}{3}(1, 0, 1, 1, 0) - \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = (0, 3, -1, 1, -1).\end{aligned}$$

Se ora dividiamo ciascuno di questi vettori per la propria norma otteniamo una base ortonormale di E:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),\\ \boldsymbol{w}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right),\\ \boldsymbol{w}_3 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3\|}\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(0, 3, -1, 1, -1).\end{aligned}$$ △

Generalizziamo ora il procedimento al caso di un numero qualunque di vettori. Notiamo che a ogni passo del procedimento abbiamo sostituito uno dei vettori $\boldsymbol{v}_i$ della base data con un vettore che è somma di $\boldsymbol{v}_i$ e di una combinazione lineare dei precedenti vettori della base. Diamo allora il:

Lemma 38.21 *Sia E uno spazio vettoriale con una base formata dai vettori*

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_r.$$

Consideriamo il vettore:

$$\boldsymbol{u}_i \coloneqq \boldsymbol{v}_i + \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \boldsymbol{u}_{i-1},$$

dove gli α sono scalari qualsiasi. Allora i vettori

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{v}_r,$$

formano una base per E.

Esercizio di base 38.22 Dimostrare il lemma precedente.

Possiamo ora descrivere il procedimento che permette di ottenere una base ortonormale di un qualsiasi sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^n$ a partire da una sua qualsiasi base. Ciò ci darà un dimostrazione del:

Teorema 38.23 *Un qualsiasi sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore di 0 è dotato di base ortonormale.*

Dimostrazione Consideriamo una base qualunque di E formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$, e costruiremo a partire da essa una base ortogonale di E formata dai vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_r$. Una volta determinata una base ortogonale, potremo trovare una base ortonormale dividendo ogni vettore per la sua norma.

Arriveremo a una base ortogonale per passi successivi: a ogni passo utilizzeremo il lemma 38.21 per sostituire uno dei vettori $\boldsymbol{v}_i$ con un nuovo vettore $\boldsymbol{u}_i$. Vediamo come

1. Si pone $\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \boldsymbol{v}_1$;

2. Consideriamo il vettore $\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1$. Ora scegliamo α in modo tale che $\boldsymbol{u}_2$ sia ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$. Per far ciò calcoliamo il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1) \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1 + \alpha \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1.$$

Ora $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 \neq 0$ perché $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{0}$. Possiamo allora porre:

$$\alpha = -\frac{\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}.$$

In tal modo $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = 0$.

3. Consideriamo il vettore

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2.$$

Ora scegliamo β_1 e β_2 in modo tale che $\boldsymbol{u}_3$ sia ortogonale a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. Per far ciò calcoliamo i prodotti scalari $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2$:

$$\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1.$$

Sappiamo già che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono ortogonali quindi questa relazione si riduce a:

$$\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1.$$

Possiamo allora porre:

$$\beta_1 = -\frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}.$$

In tal modo $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = 0$. Allo stesso modo calcoliamo il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2$. Dopo analoghi passaggi otteniamo:

$$\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2.$$

Possiamo allora porre:

$$\beta_2 = -\frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2}.$$

In tal modo $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = 0$.

Al termine di questo passo abbiamo dunque la base di E formata dai vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_4$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ in cui i primi tre vettori sono a due a due ortogonali.

4. Consideriamo il vettore:

$$\boldsymbol{u}_4 := \boldsymbol{v}_4 + \gamma_1 \boldsymbol{u}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2 + \gamma_3 \boldsymbol{u}_3.$$

Imponendo che questo vettore sia ortogonale ai vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_3$ determiniamo i valori di γ_1, γ_2 e γ_3.

5. Proseguiamo così e determiniamo tutti i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_r$.

6. Una volta determinati i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_r$ che formano una base ortogonale di E, per determinare una base ortonormale di E è sufficiente considerare i vettori $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_r$ dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1, \\
\boldsymbol{w}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{w}_r &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_r\|}\boldsymbol{u}_r.
\end{aligned}$$ ■

Questo procedimento viene chiamato **procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt**. Riassumiamo il procedimento eseguito per mezzo di formule. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &:= \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{u}_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 \\
\boldsymbol{u}_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_r &:= \boldsymbol{v}_r - \frac{\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \cdots - \frac{\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{u}_{r-1}}{\boldsymbol{u}_{r-1} \times \boldsymbol{u}_{r-1}}\boldsymbol{u}_{r-1}
\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1,\\
\boldsymbol{w}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{w}_r &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_r\|}\boldsymbol{u}_r.
\end{aligned}$$

Osservazione 38.24 Nel riassumere il procedimento, invece che calcolare a ogni passo a i valori di alcuni scalari (α, β_1, etc.), abbiamo scritto direttamente le formule che danno ciascuno di questi scalari. Utilizzando queste formule è però facile sbagliarsi (scrivendo un indice al posto di un altro, ad esempio). È più semplice procedere come negli esempi che abbiamo dato e calcolare volta per volta i coefficienti giusti (ovviamente questa è un'opinione personale). $\triangle$

Esercizio di base 38.25 Se E è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 1, come si ottiene una sua base ortonormale?

Esercizio di base 38.26 Determinare una base ortonormale per il sottospazio E di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,1,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 := (2,0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (0,1,0,0,0)$ e $\boldsymbol{v}_4 := (0,0,1,-1,1)$.

Se avete risolto l'esercizio appena dato avrete probabilmente fatto parecchi calcoli. Osservando che i vettori $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono a due a due ortogonali era possibile risparmiarsi un po' di fatica. Se applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt prendendo gli stessi vettori ma in ordine diverso: $\boldsymbol{v}_2 := (2,0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (0,1,0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_4 := (0,0,1,-1,1)$ e $\boldsymbol{v}_1 := (1,1,1,0,0)$, notiamo che buona parte del lavoro è fatta. Infatti, a ogni passo del procedimento di Gram-Schmidt sostituiamo un vettore della base con un vettore che sia ortogonale ai precedenti: ma allora in questo caso i primi tre vettori sono già a posto, e dobbiamo quindi solo sostituire il vettore $\boldsymbol{v}_1$.

Esercizio di base 38.27 Utilizzando l'osservazione appena data, determinare un'altra base ortonormale dello spazio vettoriale E dato nell'esercizio di base 38.26.

In generale, dunque, se abbiamo una base da ortonormalizzare, conviene vedere se tra i vettori della base ce ne sono di ortogonali fra loro, e riordinare la base in modo da mettere questi vettori all'inizio.

38.3 Matrici ortogonali

Vogliamo caratterizzare le matrici di passaggio tra basi ortonormali dello stesso sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo, per semplicità, di avere due basi ortonormali di un sottospazio E di dimensione 2: la prima base sia formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$, e la seconda base sia formata dai vettori $\boldsymbol{e}'_1$ e $\boldsymbol{e}'_2$. Esprimiamo ciascuno di questi vettori come combinazione lineare dei vettori della prima base:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 &= m_{11}\boldsymbol{e}_1 + m_{21}\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{e}'_2 &= m_{12}\boldsymbol{e}_1 + m_{22}\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

Per definizione la matrice di cambiamento di base è la matrice:

$$M := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Vogliamo adesso sfruttare il fatto che le due basi sono ortonormali. Poiché i vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ formano una base ortonormale, grazie alla proposizione 38.17 sappiamo che:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_1 &= m_{11}m_{11} + m_{21}m_{21},\\ \boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2 &= m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22},\end{aligned}$$

e così via. Ora consideriamo la matrice trasposta della matrice M:

$${}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Proviamo ora a fare il prodotto ${}^tMM$. Calcoliamo ad esempio l'elemento c_{11} di posto $(1,1)$ e l'elemento c_{12} di posto $(1,2)$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}c_{11} &= m_{11}m_{11} + m_{21}m_{21},\\ c_{12} &= m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22}.\end{aligned}$$

Ma allora otteniamo $c_{11} = \boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_1$ e $c_{12} = \boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2$. Se proseguissimo a calcolare gli altri elementi del prodotto troveremmo allora:

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 \times \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \times \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix}.$$

Ma noi conosciamo gli elementi di questa matrice, dal momento che i vettori $\boldsymbol{e}'_1$ e $\boldsymbol{e}'_2$ formano una base ortonormale di E: dunque $\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}'_2 \times \boldsymbol{e}'_2 = 1$ e $\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_2 \times \boldsymbol{e}'_1 = 0$, cioè la matrice ${}^tMM$ è la matrice identica. Abbiamo dunque mostrato che l'inversa di M è la trasposta di M. Ciò suggerisce la:

Definizione 38.28 Una matrice quadrata reale M di ordine n si dice **ortogonale** se ${}^tMM = I$, cioè se M è invertibile e l'inversa di M è la sua trasposta. △

Con la discussione precedente abbiamo allora dimostrato il:

Teorema 38.29 *Sia E un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^n$. La matrice di passaggio tra due basi ortonormali di E è una matrice ortogonale.*

Con una dimostrazione del tutto analoga si generalizza il teorema precedente al caso in cui E sia un sottospazio di dimensione qualsiasi di $\mathbb{R}^n$:

Teorema 38.30 *Sia E un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. La matrice di passaggio tra due basi ortonormali di E è una matrice ortogonale.*

Raccogliamo le principali proprietà delle matrici ortogonali:

Proposizione 38.31

1. *Se M è una matrice ortogonale allora* $\det M = \pm 1$.

2. *Se M è una matrice ortogonale allora M^{-1} è una matrice ortogonale.*

3. *Se M e N sono matrici ortogonali allora MN è una matrice ortogonale.*

DIMOSTRAZIONE 1. Dal teorema di Binet si ha $\det {}^tM \det M = \det I$: poiché $\det M = \det {}^tM$ e $\det I = 1$, si ottiene $(\det M)^2 = 1$, cioè $\det M = \pm 1$.

2. Dobbiamo mostrare che M^{-1} moltiplicata per la sua trasposta dà la matrice identica. Sappiamo che $M^{-1} = {}^tM$: dunque

$$^t(M^{-1}) = {}^t({}^tM) = M.$$

Pertanto

$$^t(M^{-1})M^{-1} = MM^{-1} = I.$$

3. Dobbiamo mostrare che MN moltiplicata per la sua trasposta dà la matrice identica. Sappiamo che ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$. Dunque:

$$^t(MN)(MN) = {}^tN{}^tMMN = {}^tNIN = I. \qquad \blacksquare$$

Definizione 38.32 L'insieme della matrici ortogonali di ordine n è detto **gruppo ortogonale** e indicato con il simbolo $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. $\triangle$

38.4 Soluzioni degli esercizi di base

EB.38.5 Si verifica immediatamente che i vettori della base canonica hanno tutti norma 1.

EB.38.10 Sappiamo che $\widehat{(k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}} = \pi - \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ se $k < 0$. In particolare:

$$\widehat{-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = \widehat{(-1)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = \pi - \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = \pi.$$

Dunque un vettore non nullo forma con il suo opposto un angolo uguale a π.

EB.38.12 Poiché $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1$ abbiamo che:

$$\widehat{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1} = \widehat{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1} = 0.$$

Equivalentemente:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1} = \frac{(1,3,1) \times (2,6,2)}{\|(1,3,1)\|\|(2,6,2)\|} = \frac{22}{\sqrt{11}\sqrt{44}} = 1,$$

da cui otteniamo $\widehat{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1} = 0$.

Per quanto riguarda $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{v}_2$ abbiamo che:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2} = \frac{(1,1,1,3) \times (1,0,1,0)}{\|(1,1,1,3)\|\|(1,0,1,0)\|} = \frac{2}{\sqrt{12}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

dunque

$$\widehat{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2} = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Infine, l'angolo tra $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{v}_3$ non è definito poiché $\boldsymbol{v}_3$ è il vettore nullo.

EB.38.22 Dal momento che $\dim E = r$ basta mostrare che gli r vettori $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_r$ sono linearmente indipendenti. Noi conosciamo già la decomposizione di questi vettori rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ e scriviamo le componenti così ottenute sulle colonne della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa è una matrice triangolare superiore. Si vede facilmente che il suo determinante è 1 e abbiamo quindi la tesi.

EB.38.25 Basta prendere un vettore non nullo $\boldsymbol{v}$ in E e considerare il vettore $\boldsymbol{u}$ che si ottiene dividendo $\boldsymbol{u}$ per la sua norma.

EB.38.26 Dobbiamo trovare preliminarmente una base per E. Si può verificare che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente indipendenti e formano, quindi, una base per E. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt a questa base.

Poniamo $\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{u}_1$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1 + \alpha\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 \\ &= (2,0,1,1,0) \times (1,1,1,0,0) + \alpha(1,1,1,0,0) \times (1,1,1,0,0) = 3 + 3\alpha. \end{aligned}$$

Posto $\alpha = -1$, troviamo:

$$\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0,1,0).$$

Poniamo ora $\boldsymbol{u}_3 := \boldsymbol{v}_3 + \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 \\ &= (0,1,0,0,0) \times (1,1,1,0,0) + \beta_1(1,1,1,0,0) \times (1,1,1,0,0) = 1 + 3\beta_1, \\ \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_1\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = \\ &= (0,1,0,0,0) \times (1,-1,0,1,0) + \beta_2(1,-1,0,1,0) \times (1,-1,0,1,0) = -1 + 3\beta_2. \end{aligned}$$

Posto $\beta_1 = -\frac{1}{3}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$ troviamo

$$\boldsymbol{u}_3 = \left(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Infine poniamo $\boldsymbol{u}_4 := \boldsymbol{v}_4 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_1 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 = 1 + 3\gamma_1, \\ \boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_2 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = -1 + 3\gamma_2, \\ \boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_3 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_3 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\gamma_3, \end{aligned}$$

Posto $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\gamma_2 = \frac{1}{3}$, $\gamma_3 = 2$ troviamo

$$\boldsymbol{u}_4 = (0,0,0,0,1).$$

Dunque $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{u}_4$ formano una base ortogonale di E. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right),$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),$$
$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),$$
$$(0, 0, 0, 0, 1).$$

EB.38.27 Riordiniamo innanzitutto la base ponendo $\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{v}_2$, e $\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{u}_3 := \boldsymbol{v}_4$.

Poniamo poi $\boldsymbol{u}_4 := \boldsymbol{v}_1 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{u}_1 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 = 3 + 6\gamma_1,\\
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{u}_2 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = 1 + \gamma_2,\\
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{u}_3 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_3 = 1 + 3\gamma_3,
\end{aligned}$$

Posto $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = -\frac{1}{3}$ troviamo:

$$\boldsymbol{u}_4 = \left(0, 0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right).$$

Dunque $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ formano una base ortogonale di E. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right),$$
$$(0, 1, 0, 0, 0),$$
$$\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Notiamo che abbiamo così ottenuto una base ortonormale differente da quella ottenuta con il procedimento usato nell'esercizio precedente. Ciò non ci meraviglia: infatti ogni spazio vettoriale (non nullo) ha più di una base ortonormale.

38.5 Sunto

Prodotto scalare

Definizione Dati due vettori $\boldsymbol{u} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\boldsymbol{v} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ il **prodotto scalare (standard)** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ è definito dalla relazione:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \qquad \triangle$$

Proposizione *Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà:*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^n$;

2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ per ogni $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in $\mathbb{R}^n$;

3. $k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v})$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e* k *in* $\mathbb{R}$*;*

4. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*

5. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Grazie alla proprietà 4 possiamo dare la:

Definizione Dato un vettore $\boldsymbol{u}$ in $\mathbb{R}^n$, chiamiamo **modulo** o **norma** del vettore $\boldsymbol{u}$ lo scalare:

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}.$$

Più esplicitamente, se $\boldsymbol{u} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$, si pone:

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \qquad \triangle$$

Proposizione *La norma in* $\mathbb{R}^n$ *soddisfa le proprietà:*

1. $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*

2. $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$*;*

3. $\|k\boldsymbol{u}\| = |k|\|\boldsymbol{u}\|$ *per ogni* $\boldsymbol{u}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e* k *in* $\mathbb{R}$.

Notiamo in particolare che dalla proprietà 3 discende che, se dividiamo un vettore non nullo per la propria norma, otteniamo un vettore di norma 1.

Teorema (Disuguaglianza di Schwarz) *Per ogni* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza*

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Definizione Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$, chiamiamo **angolo compreso** tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ il numero $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$, con $0 \leq \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} \leq \pi$ tale che:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Non definiamo l'angolo tra due vettori di cui (almeno) uno è nullo. $\triangle$

Proposizione *Se* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *sono vettori non nulli di* $\mathbb{R}^n$ *e* k *è uno scalare non nullo, si ha:*

1. $\widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = 0$*;*

2. $\widehat{(k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}} = \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ *se* $k > 0$, $\widehat{(k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}} = \pi - \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ *se* $k < 0$.

La definizione di angolo così data suggerisce la definizione di ortogonalità tra vettori.

Definizione Diciamo che due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se si ha $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$. Scriveremo in tal caso $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. $\triangle$

Notiamo che dire che due vettori sono ortogonali non è equivalente a dire che essi formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$: infatti, secondo la definizione che abbiamo dato, il vettore nullo risulta ortogonale a tutti i vettori, e l'angolo tra il vettore nullo e un qualsiasi vettore non è definito. Possiamo però dire che due vettori non nulli sono ortogonali se e solo se formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$.

Teorema (Disuguaglianza triangolare o di Minkowsky) *Per ogni* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

Basi ortonormali

Definizione Sia E un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ formino una base di E. Diciamo che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ formano una **base ortogonale** di E se i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ sono a due a due ortogonali. Diciamo che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ formano una **base ortonormale** di E se i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ sono a due a due ortogonali e ciascun $\boldsymbol{v}_i$ ha norma 1. △

Teorema *La base canonica di* $\mathbb{R}^n$ *è ortonormale.*

Proposizione *Supponiamo che i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ *formino una base ortonormale di un sottospazio* E *di* $\mathbb{R}^n$*.*

1. Se $\boldsymbol{v}$ *è un vettore di* E *allora le componenti di* $\boldsymbol{v}$ *rispetto alla base formata da* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ *sono* $(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{v})$, *vale a dire:*

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_r.$$

2. Se $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{v}_r$ *e* $\boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r$ *sono vettori di* E *allora si ha*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_r y_r.$$

Proposizione *Data una base di un sottospazio vettoriale* E *di* $\mathbb{R}^n$ *formata dai vettori* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ *, si ottiene una base ortonormale formata dai vettori* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ *di* E *tramite il seguente* ***procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt****.*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &:= \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{u}_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 \\
\boldsymbol{u}_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_r &:= \boldsymbol{v}_r - \frac{\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 - \cdots - \frac{\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{u}_{r-1}}{\boldsymbol{u}_{r-1} \times \boldsymbol{u}_{r-1}}\boldsymbol{u}_{r-1}
\end{aligned}$$

e infine

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1,\\
\boldsymbol{w}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{w}_r &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_r\|}\boldsymbol{u}_r.
\end{aligned}
$$

Matrici ortogonali

Definizione Una matrice quadrata reale M di ordine n si dice **ortogonale** se ${}^tMM = I$, cioè se M è invertibile e l'inversa di M è la sua trasposta. △

Teorema *Sia E un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. La matrice di passaggio tra due basi ortonormali di E è una matrice ortogonale.*

Proposizione

1. *Se M è una matrice ortogonale allora* $\det M = \pm 1$.
2. *Se M è una matrice ortogonale allora M^{-1} è una matrice ortogonale.*
3. *Se M e N sono matrici ortogonali allora MN è una matrice ortogonale.*

Definizione L'insieme della matrici ortogonali di ordine n è detto **gruppo ortogonale** e indicato con il simbolo $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. △

38.6 Esercizi

E.38.1 Determinare l'angolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{u} := (1, 2, 3, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v} := (1, 0, 0, 1, 0)$.

E.38.2 Determinare l'angolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{u} := (1, 0, 1, 0)$ e $\boldsymbol{v} := (1, 2, -1, 1)$.

E.38.3 Determinare h in modo tale che l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{u} := (1, 1, 1)$ e $\boldsymbol{v} := (1, h, -1)$ sia uguale a $\frac{\pi}{3}$.

E.38.4 Determinare una base ortonormale per il sottospazio E di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 3, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1, 2, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_3 := (0, 3, -2, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_4 := (0, -3, 1, 0, 1)$.

E.38.5 Determinare una base ortonormale del sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 := (1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (1, 1, -2, 1)$.

E.38.6 Determinare una base ortonormale del sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (2, 0, 1, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 := (2, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 := (6, 4, 1, 5)$.

E.38.7 Determinare una base ortonormale per il sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$E := \{(x, y, z, w) \mid 2x - y - z - w = 0\}.$$

E.38.8 Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$E := \{(x, y, z, w, t) \mid x + y + z - w = 0\}$$
$$F := \{(x, y, z, w, t) \mid x - y - z + t = y - w = 0\}$$

Determinare una base ortonormale per E, per F e per $E \cap F$.

38.7 Soluzioni degli esercizi

E.38.1 Abbiamo che:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{uv}} = \frac{(1, 2, 3, 1, 0) \times (1, 0, 0, 1, 0)}{\|(1, 2, 3, 1, 0)\|\|(1, 0, 0, 1, 0)\|} = \frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Dunque

$$\widehat{\boldsymbol{uv}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

E.38.2 Abbiamo che:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{uv}} = \frac{(1, 0, 1, 0) \times (1, 2, -1, 1)}{\|(1, 0, 1, 0)\|\|(1, 2, -1, 1)\|} = \frac{0}{\|(1, 0, 1, 0)\|\|(1, 2, -1, 1)\|} = 0.$$

Dunque

$$\widehat{\boldsymbol{uv}} = \frac{\pi}{2}.$$

E.38.3 Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{(1, 1, 1) \times (1, h, -1)}{\|(1, 1, 1)\|\|(1, h, -1)\|},$$

cioè

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}\sqrt{2 + h^2}}.$$

Risolvendo questa equazione si trova $h = \sqrt{6}$.

E.38.4 Dobbiamo trovare preliminarmente una base per E. Si può verificare che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente indipendenti e formano, quindi, una base per E. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt a questa base.

Poniamo $\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{u}_1 + \alpha \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 = 7 + 12\alpha.$$

Posto $\alpha = -\frac{7}{12}$, troviamo:

$$\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{7}{12}, 1, -\frac{7}{12}\right).$$

Poniamo ora $\boldsymbol{u}_3 := \boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2$:

$$\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 = 7 + 12\beta_1,$$
$$\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = \frac{23}{12} + \frac{23}{12}\beta_2.$$

Posto $\beta_1 = -\frac{7}{12}$, $\beta_2 = -1$ troviamo

$$\boldsymbol{u}_3 = (-1, 1, -2, -1, 0).$$

Infine poniamo $\boldsymbol{u}_4 := \boldsymbol{v}_4 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3$. Calcoliamo $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_1 + \gamma_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 = -7 + 12\gamma_1, \\
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_2 + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 = -\frac{23}{12} + \frac{23}{12}\gamma_2. \\
\boldsymbol{u}_4 \times \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_4 \times \boldsymbol{u}_3 + \gamma_3 \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_3 = -5 + 7\gamma_3,
\end{aligned}$$

Posto $\gamma_1 = \frac{7}{12}$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \frac{5}{7}$ troviamo

$$\boldsymbol{u}_4 = \left(\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right).$$

Dunque $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ formano una base ortogonale di E. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \\
\left(\frac{5}{2\sqrt{69}}, \frac{3}{2\sqrt{69}}, -\frac{7}{2\sqrt{69}}, \frac{6}{\sqrt{69}}, -\frac{7}{2\sqrt{69}}\right), \\
\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right), \\
\left(\frac{2}{\sqrt{70}}, -\frac{2}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{7}{\sqrt{70}}\right).
\end{gathered}$$

E.38.5 Prima di tutto notiamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente indipendenti: dunque formano una base per E. Poniamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &:= \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}_2 &:= \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1.
\end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 &= (1, 0, 1, 1) \times ((1, 0, 0, 1, 1) + \alpha(1, 0, 1, 1)) \\
&= (1, 0, 1, 1) \times (1, 2, 0, 1) + \alpha(1, 0, 1, 1) \times (1, 0, 1, 1) \\
&= 2 + 3\alpha.
\end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{2}{3}$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= (1, 0, 1, 1), \\
\boldsymbol{u}_2 &= (1, 2, 0, 1) - \frac{2}{3}(1, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$\boldsymbol{u}_3 := \boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2.$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 &= (\boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{u}_1 \\
&= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 \\
&= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_1 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_1 \\
&= (1, 1, -2, 1) \times (1, 0, 1, 1) + \beta_1 (1, 0, 1, 1) \times (1, 0, 1, 1) \\
&= 3\beta_1.
\end{aligned}$$

Scegliamo $\beta_1 = 0$. Analogamente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2 &= (\boldsymbol{v}_3 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{u}_2 \\
&= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 \\
&= \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{u}_2 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_2 \\
&= (1, 1, -2, 1) \times \left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \beta_2 \left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= 4 + \frac{14}{3}\beta_2.
\end{aligned}$$

Scegliamo $\beta_2 = -\frac{6}{7}$. Abbiamo dunque una base ortogonale per E:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= (1, 0, 1, 1), \\
\boldsymbol{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \\
\boldsymbol{u}_3 &= (1, 1, -2, 1) + 0(1, 0, 1, 1) - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right).
\end{aligned}$$

Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &\coloneqq \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1), \\
\boldsymbol{w}_2 &\coloneqq \frac{1}{\sqrt{42}}(1, 6, -2, 1), \\
\boldsymbol{w}_3 &\coloneqq \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -1, -2, 1).
\end{aligned}$$

E.38.6 Prima di tutto notiamo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente dipendenti perché $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. Poiché $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti essi formano una base per E. Poniamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{u}_1.
\end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 &= (2, 0, 1, 3) \times ((2, 2, 0, 1) + \alpha(2, 0, 1, 3)) \\
&= (2, 0, 1, 3) \times (1, 2, 0, 1) + \alpha(2, 0, 1, 3) \times (2, 0, 1, 3) \\
&= 7 + 14\alpha.
\end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Abbiamo dunque una base ortogonale per E:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= (2, 0, 1, 3), \\
\boldsymbol{u}_2 &= (2, 2, 0, 1) - \frac{1}{2}(2, 0, 1, 3) = \left(1, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &\coloneqq \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 0, 1, 3), \\
\boldsymbol{w}_2 &\coloneqq \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 4, -1, -1).
\end{aligned}$$

E.38.7 Occorre innanzitutto determinare una base per E. Si trova ad esempio che una base per E è formata dai vettori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &:= (1, 2, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_2 &:= (1, 0, 2, 0), \\ \boldsymbol{v}_3 &:= (1, 0, 0, 2). \end{aligned}$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt troviamo una base ortogonale per E, formata dai vettori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &:= (1, 2, 0, 0), \\ \boldsymbol{u}_2 &:= \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 2, 0\right), \\ \boldsymbol{u}_3 &:= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2\right). \end{aligned}$$

Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale per E, formata dai vettori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0, 0), \\ \boldsymbol{w}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, 5, 0), \\ \boldsymbol{w}_3 &:= \frac{1}{\sqrt{42}}(2, -1, -1, 6). \end{aligned}$$

E.38.8 Occorre innanzitutto determinare una base per ciascuno dei sottospazi E, F e $E \cap F$. Prima di far ciò notiamo che se abbiamo una base di $E \cap F$ possiamo, aggiungendo un numero opportuno di vettori, ottenere una base di E e una base di F. Determiniamo allora una base di $E \cap F$: questa è, ad esempio, formata dai vettori:

$$\begin{aligned} &(-1, 0, 1, 0, 2), \\ &(1, 2, -1, 2, 0). \end{aligned}$$

Possiamo ora determinare una base per E e una per F che contengono questi vettori. Una base siffatta per E è formata dai vettori:

$$\begin{aligned} &(-1, 0, 1, 0, 2), \\ &(1, 2, -1, 2, 0), \\ &(0, 0, 0, 0, 1), \\ &(1, 0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

e una base per F è formata dai vettori:

$$\begin{aligned} &(-1, 0, 1, 0, 2), \\ &(1, 2, -1, 2, 0), \\ &(0, 1, -1, 1, 0). \end{aligned}$$

Troviamo allora una base ortonormale per $E \cap F$, formata dai vettori:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, 1, 0, 2), \\ &\frac{1}{\sqrt{21}}(1, 3, -1, 3, 1). \end{aligned}$$

Se ora applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione alla base scelta di E questi due vettori saranno i primi due vettori della base ortonormale di E (e, quindi, la scelta che abbiamo fatto per le basi permette di risparmiare qualche calcolo). Una base ortonormale di E è allora formata dai vettori:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,0,2),\\
&\frac{1}{\sqrt{21}}(1,3,-1,3,1),\\
&\frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,-2,-1,2),\\
&\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).
\end{aligned}$$

Analogamente una base ortonormale per F è formata dai vettori:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,0,2),\\
&\frac{1}{\sqrt{21}}(1,3,-1,3,1),\\
&\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0,0).
\end{aligned}$$

CAPITOLO 39

Diagonalizzazione di matrici simmetriche

In questo capitolo mostriamo come determinare basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ formate da autovettori di un certo tipo di endomorfismi. Mostriamo poi che ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile per mezzo di una matrice di passaggio ortogonale.

39.1 Matrici ed endomorfismi simmetrici

Nel capitolo 32 abbiamo visto come sia possibile stabilire se un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E si possa rappresentare con una matrice diagonale. Per far ciò è necessario scegliere una base di E formata da autovettori di f.

Nel capitolo 37 abbiamo visto che dato un endomorfismo diagonalizzabile f di $V^3(O)$ in alcuni casi è possibile scegliere una base di E formata da autovettori di f, che sia anche ortonormale. Una tale base presenta il duplice vantaggio che rispetto a essa l'endomorfismo f si rappresenta con una matrice diagonale e, inoltre, permette di calcolare semplicemente il prodotto scalare di vettori decomposti rispetto ad essa. Abbiamo però mostrato che ciò non è sempre possibile.

Nel capitolo 38 abbiamo introdotto una nozione di prodotto scalare: dato un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, possiamo allora porci lo stesso problema che ci siamo posti nel capitolo 37:

Problema 39.1 Che condizioni deve soddisfare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ affinché esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di f? $\triangle$

Ovviamente, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di f, allora f deve essere diagonalizzabile, ma esistono endomorfismi diagonalizzabili per cui non esistono basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ formate da autovettori di f, come mostra il seguente:

Esempio 39.2 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(x,y) := (x+2y, x+2y).$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che gli autovalori di f sono 0 e 3 e che gli autospazi di f sono rispettivamente:

$$E(0) := \{(-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$E(3) := \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque f è diagonalizzabile. Per ottenere una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di f basta allora scegliere un vettore non nullo in $E(0)$ e un vettore non nullo in $E(3)$. Ma allora una tale base è formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (-2t, t)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (u, u)$ con t e u numeri reali non nulli. Se calcoliamo il prodotto scalare $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ troviamo $-tu$: comunque noi scegliamo t e u non nulli questo prodotto è diverso da 0. Non riusciamo quindi a trovare una base ortonormale di E formata da autovettori di f. △

Dunque, dato un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ in alcuni casi è possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di f e in altri casi ciò non è possibile, anche se f è diagonalizzabile.

Abbiamo visto nel capitolo 37 che, considerato l'endomorfismo f di $V^3(O)$ dato dalla proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine, esiste una base di $V^3(O)$ formata da autovettori di f. Osserviamo che la matrice rappresentativa di f relativamente alla base ortonormale formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, e $\boldsymbol{e}_3$ è simmetrica. Considerato invece l'endomorfismo g di $V^3(O)$ data dalla proiezione parallela a una retta r su un piano non ortogonale alla retta r, non esiste nessuna base ortonormale di $V^3(O)$ che sia formata da autovettori di g: osserviamo che la matrice rappresentativa di g relativamente alla base ortonormale formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, e $\boldsymbol{e}_3$ non è simmetrica.

Nell'esempio 39.2 non esiste nessuna base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che sia formata da autovettori dell'endomorfismo f. Osserviamo che la matrice rappresentativa di f relativa alla base canonica, che è ortonormale, non è simmetrica. Tutto ciò non è dovuto al caso.

Dimostriamo innanzitutto la:

Proposizione 39.3 *Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Se f si rappresenta rispetto a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con una matrice simmetrica, allora f si rappresenta con una matrice simmetrica rispetto a ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione Sia A la matrice rappresentativa di f relativamente a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che A sia simmetrica. Rispetto a una nuova base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ l'endomorfismo f si rappresenta con una matrice A', legata alla matrice A dalla relazione $A' = M^{-1}AM$ con M matrice ortogonale. Poiché la matrice M è ortogonale abbiamo che ${}^tM = M^{-1}$ da cui ricaviamo che $A' = {}^tMAM$. Dimostriamo che A' è simmetrica. Abbiamo:

$${}^tA' = {}^t({}^tMAM).$$

Poiché la trasposta del prodotto è uguale al prodotto in ordine inverso delle trasposte, possiamo riscrivere il secondo membro e ottenere:

$${}^tA' = {}^tM{}^tA{}^t({}^tM) = {}^tM{}^tAM$$

Poiché la matrice A è simmetrica si ha ${}^tA = A$. Otteniamo quindi:

$$ {}^tA' = {}^tMAM. $$

Ma l'espressione a secondo membro è ancora A': dunque A' è simmetrica. ■

Possiamo riesprimere questa proposizione così. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo le matrici rappresentative di f rispetto a tutte le basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$: allora o queste matrici sono tutte simmetriche, oppure nessuna di esse è simmetrica. Diamo allora la:

Definizione 39.4 Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che f è un endomorfismo **simmetrico** se f si rappresenta rispetto a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con una matrice simmetrica (e quindi per la proposizione precedente si rappresenta con una matrice simmetrica rispetto a ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$). △

Esercizio di base 39.5 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$ f(x, y) := (x + 2y, 2x + 3y). $$

a. f è simmetrico?

b. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (0, 2)$ è simmetrica? △

Esercizio di base 39.6 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$ f(x, y) := (y, 2y). $$

a. f è simmetrico?

b. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (-1, 2)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (3, 4)$ è simmetrica? △

Osservazione 39.7 Dalla soluzione degli esercizi precedenti abbiamo visto che se rappresentiamo un endomorfismo simmetrico rispetto a una base non ortonormale non è detto che otteniamo una matrice simmetrica. Viceversa è possibile che un endomorfismo non simmetrico si rappresenti rispetto a una base non ortonormale con una matrice simmetrica. △

Proposizione 39.8 *Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata di autovettori di f, allora l'endomorfismo f è simmetrico.*

DIMOSTRAZIONE La matrice rappresentativa di f relativamente alla base ortonormale di autovettori è diagonale. In particolare è quindi simmetrica. Pertanto l'endomorfismo è simmetrico. ■

Finora abbiamo visto che affinché esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di un endomorfismo è necessario che l'endomorfismo sia simmetrico. Vogliamo dimostrare che vale anche il viceversa, cioè che dato un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori dell'endomorfismo. Questo è conseguenza dei due teoremi che diamo senza dimostrazione:

Teorema 39.9 *Ogni endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile.*

Teorema 39.10 *Se f è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono autovettori di f relativi ad autovalori distinti, allora $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono ortogonali.*

Siamo ora in grado di dimostrare il:

Teorema 39.11 *Se f è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di f.*

Dimostrazione Dal teorema 39.9 sappiamo che f è diagonalizzabile. Pertanto, dati gli autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_r di f e considerata una base per ognuno dei relativi autospazi $E(\lambda_1)$, $E(\lambda_2)$, ..., $E(\lambda_r)$, unendo queste basi si trova una base di $\mathbb{R}^n$. Questa base non è necessariamente ortonormale.

Per ottenere una base ortonormale procediamo in questo modo: per ogni autospazio determiniamo una base ortonormale tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Dimostriamo ora che l'insieme formato da tutti i vettori appartenenti a tali basi ortonormali è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo innanzitutto che ognuno di questi vettori, poiché appartiene a una base ortonormale di un autospazio, ha lunghezza uguale a 1. Dobbiamo ora dimostrare che, presi comunque due vettori della base così ottenuto, essi sono tra loro ortogonali. Se i due vettori appartengono allo stesso autospazio sono ortogonali tra loro perché per costruzione appartengono a una base ortonormale di tale autospazio. Se invece tali autovettori appartengono ad autospazi differenti, essi sono tra loro ortogonali in virtù del teorema 39.10. ■

Quest'ultimo teorema insieme al teorema 39.9 ci fornisce il:

Teorema 39.12 *Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di un endomorfismo f se e solo se l'endomorfismo f è simmetrico.*

Possiamo anche esprimere il teorema precedente in termini puramente matriciali. Supponiamo allora di avere una matrice quadrata A di ordine n. Scelta una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, possiamo considerare l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ che rispetto alla base assegnata si rappresenta con la matrice A. Supponiamo che esista una (nuova) base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, questa volta formata da autovettori di f. Sia B la matrice rappresentativa di f relativamente a questa nuova base. Poiché la nuova base è formata da autovettori di f abbiamo che la matrice B è diagonale. Ricordando poi che la matrice di passaggio tra due basi ortonormali è ortogonale (vedi teorema 38.30) e la formula che lega due matrici rappresentative dello stesso endomorfismo (vedi teorema 30.12) possiamo allora affermare che esiste una matrice ortogonale M di ordine n tale che la matrice $B = M^{-1}AM$ sia diagonale. Pertanto il teorema 39.9 può essere così rienunciato

Teorema 39.13 *Sia A una matrice reale. La matrice A è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale se e solo se la matrice A è simmetrica.*

Esercizio di base 39.14 Sia data la matrice a coefficienti reali $A_k := \begin{pmatrix} 2 & 3+k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia diagonale?

Osservazione 39.15 Il teorema precedente non significa che una matrice simmetrica reale sia diagonalizzabile solo per mezzo di matrici ortogonali. Quello che possiamo dire è che una matrice simmetrica reale A è diagonalizzabile e tra tutte le matrici M tali che $M^{-1}AM$ sia diagonale ne esiste almeno una ortogonale. △

39.2 Procedimento di diagonalizzazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che ogni matrice simmetrica A si diagonalizza per mezzo di una matrice ortogonale M. Vediamo in dettaglio come si ottiene una matrice ortogonale M e la matrice diagonale D tale che $D = M^{-1}AM$.

1. Si calcola il polinomio caratteristico di A e si determinano gli autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_r di A.

2. Si determina una base per ciascun autospazio $E(\lambda_1)$, $E(\lambda_2)$, ..., $E(\lambda_r)$ di A.

3. Tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si determina una base ortonormale per ciascun autospazio.

4. Si uniscono le basi ortonormali determinate al punto precedente. Si trova così una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

5. Come matrice M prendiamo la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della base ortonormale così determinata e la matrice diagonale D è quella in cui vengono riportati gli autovalori di A lungo la diagonale ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del relativo autospazio (al solito si ricorda di utilizzare per gli autovalori un'ordine coerente con quello utilizzato per le colonne di M).

Alcune osservazioni su questo procedimento:

• I primi due punti del procedimento non sono differenti da quelli utilizzati nella diagonalizzazione di una qualsiasi matrice. Osserviamo solo che possiamo saltare la verifica che per ciascun autovalore la molteplicità e la dimensione del relativo autospazio coincidono perché una matrice simmetrica è sicuramente diagonalizzabile.

• Se non abbiamo particolari motivi per determinare una matrice di passaggio che sia ortogonale, possiamo applicare il procedimento di diagonalizzazione standard (con l'unico vantaggio che già sappiamo che la matrice A è diagonalizzabile, in quanto simmetrica).

• Il punto 3 del procedimento si potrebbe applicare a qualunque matrice diagonalizzabile (anche se ciò è inutile). Il punto in cui ci serve veramente che A sia simmetrica è il punto 4: unendo basi ortonormali di autospazi otteniamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (e non dobbiamo verificare ogni volta quest'ultimo fatto: abbiamo infatti notato nel paragrafo precedente che autovettori di una matrice simmetrica relativi ad autovalori differenti sono fra loro ortogonali). Se la matrice A non fosse simmetrica, unendo basi ortonormali dei differenti autospazi otterremo una base non ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Diamo un esempio di tale procedimento.

Esempio 39.16 Consideriamo la matrice simmetrica reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = x^3(2-x)^2(4-x).$$

Dunque gli autovalori di A sono 0 di molteplicità 3, 2 di molteplicità 2 e 4 di molteplicità 1. Poiché A è simmetrica, essa è diagonalizzabile ed è, dunque, simile alla matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

In questa matrice ciascun autovalore è riportato sulla diagonale principale un numero di volte uguale alla propria molteplicità. Se volessimo solo determinare una matrice diagonale simile alla matrice A potremmo fermarci qui. Vogliamo però determinare una matrice di passaggio e dobbiamo quindi determinare gli autospazi.

Per trovare $E(0)$ risolviamo il sistema $(A - 0I)X = 0$, dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'insieme delle soluzioni dipende da 3 parametri (perché $\dim E(0) = \mathrm{m}_A(0) = 3$). Pertanto il rango della matrice di questo sistema è $6 - 3 = 3$. Per risolvere questo sistema bastano allora 3 equazioni linearmente indipendenti, ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 \qquad = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2x_6 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendolo otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = & & -u-v \\ x_2 = -t & & -v \\ x_3 = t & & \\ x_4 = & u & \\ x_5 = & & v \\ x_6 = 0 & & \end{cases}$$

Dunque i vettori $(0,-1,1,0,0,0)$, $(-1,0,0,1,0,0)$ e $(-1,-1,0,0,1,0)$ formano una base per $E(0)$.

Analogamente per trovare $E(2)$ risolviamo il sistema $(A-2I)X=0$. Sappiamo già che l'insieme delle soluzioni dipende da 2 parametri (perché $\dim E(2) = \mathrm{m}_A(2) = 2$). Pertanto il rango della matrice di questo sistema è $6-2=4$. Per risolvere questo sistema bastano allora 4 equazioni linearmente indipendenti, ad esempio:

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendolo otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = -t \\ x_5 = 0 \\ x_6 = u \end{cases}.$$

Dunque una base per $E(2)$ è formata da $(-1,1,1,-1,0,0)$ e $(0,0,0,0,0,1)$.

Infine per trovare $E(4)$ risolviamo il sistema $(A-4I)X=0$. Sappiamo già che le soluzioni dipendono da 1 parametro (perché $\dim E(4) = \mathrm{m}_A(4) = 1$). Pertanto il rango della matrice di questo sistema è $6-1=5$. Per risolvere questo sistema bastano allora 5 equazioni linearmente indipendenti, ad esempio:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_6 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendolo otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \\ x_5 = 2t \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Dunque una base per $E(4)$ è formata da $(1,1,1,1,2,0)$. Se volessimo ora determinare una matrice M tale che $M^{-1}AM = D$ sia diagonale potremmo considerare la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente questa matrice non è ortogonale. Per determinare una matrice ortogonale di passaggio occorre ortonormalizzare separatamente la base di ciascun autospazio. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base di $E(0)$ formata dai vettori $(0,-1,1,0,0,0)$, $(-1,0,0,1,0,0)$ e $(-1,-1,0,0,1,0)$ troviamo la base formata dai vettori $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Analogamente una base ortonormale per $E(2)$ è data dai vettori $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ $(0,0,0,0,0,1)$, mentre una base ortonormale per $E(4)$ si ottiene dividendo $(1,1,1,1,2,0)$ per la propria norma ed è quindi formata dal vettore $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Dunque la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

è una matrice ortogonale e $N^{-1}AN = D$. △

Esempio 39.17 Per un ulteriore esempio guardare l'esempio 37.1. △

Esercizio di base 39.18 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

△

Determinare una matrice M ortogonale e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

39.3 Soluzioni degli esercizi di base

EB.39.5

a. Per stabilire se f è simmetrico basta considerare la sua matrice rappresentativa rispetto a una qualsiasi base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. Ci conviene scegliere la base canonica. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché A è simmetrica, f è simmetrico.

b. Poiché la base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (1,0)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (0,2)$ non è ortonormale non possiamo dire nulla a priori sulla matrice rappresentativa di f rispetto a tale base: né che sia simmetrica, né che non sia simmetrica. Dobbiamo calcolare esplicitamente la matrice rappresentativa; si vede facilmente che si ha:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (1,2) = 1(1,0) + 1(0,2), \\ f(0,2) &= (4,6) = 4(1,0) + 3(0,2). \end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ è la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

che non è simmetrica.

EB.39.6

a. Per stabilire se f è simmetrico basta considerare la sua matrice rappresentativa rispetto a una qualsiasi base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. Ci conviene scegliere la base canonica. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché A non è simmetrica, f non è simmetrico.

b. Poiché la base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 := (-1,2)$ e $\boldsymbol{v}_2 := (3,4)$ non è ortonormale non possiamo dire nulla a priori sulla matrice rappresentativa di f rispetto a tale base: né che sia simmetrica, né che non sia simmetrica. Dobbiamo calcolare esplicitamente la matrice rappresentativa; si vede facilmente che si ha:

$$\begin{aligned} f(-1,2) &= (2,4) = \frac{2}{5}(-1,2) + \frac{4}{5}(3,4), \\ f(3,4) &= (4,8) = \frac{4}{5}(-1,2) + \frac{8}{5}(3,4). \end{aligned}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ è la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix},$$

che è simmetrica.

EB.39.14 Una matrice è diagonalizzabile con matrice di passaggio ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A_k è simmetrica se e solo se $3 + k = 2$ cioè se e solo se $k = -1$.

EB.39.18 Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = -x^3 + 6x^2 = -x^2(x - 6).$$

Dunque gli autovalori di A sono 0 di molteplicità 2 e 6 di molteplicità 1. Pertanto A è simile alla matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora gli autospazi.

Per trovare $E(0)$ risolviamo il sistema

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $3 - 2 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non nulla della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima:

$$x + 2y + z = 0$$

che risolta dà:

$$\begin{cases} x = -2u - t \\ y = u \\ z = \phantom{-2u - {}} t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(0)$ è data dai vettori $(-1, 0, 1)$ e $(-2, 1, 0)$.

Analogamente per trovare $E(6)$ occorre risolvere il sistema

$$(A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 6 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 6I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 6I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(6)$ è data dal vettore $(1, 2, 1)$.

Per determinare una matrice ortogonale di passaggio occorre ortonormalizzare la base di ciascun autospazio. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt troviamo che una base ortonormale di $E(0)$ è costituita dai vettori:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Analogamente una base ortonormale per $E(6)$ è data dal vettore:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Dunque la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale e $M^{-1}AM = D$.

39.4 Sunto

Matrici ed endomorfismi simmetrici

Proposizione *Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Se f si rappresenta rispetto a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con una matrice simmetrica, allora f si rappresenta con una matrice simmetrica rispetto a ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

Definizione Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che f è un endomorfismo **simmetrico** se f si rappresenta rispetto a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con una matrice simmetrica (e quindi si rappresenta con una matrice simmetrica rispetto a ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$). $\triangle$

Teorema *Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di un endomorfismo f se e solo se l'endomorfismo f è simmetrico.*

Teorema *Sia A una matrice. La matrice A è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale se e solo se la matrice A è simmetrica.*

Osservazione Il teorema precedente non significa che una matrice simmetrica reale sia diagonalizzabile solo per mezzo di matrici ortogonali. Quello che possiamo dire è che una matrice simmetrica reale A è diagonalizzabile e tra tutte le matrici M tali che $M^{-1}AM$ sia diagonale ne esiste almeno una ortogonale. $\triangle$

Procedimento di diagonalizzazione

Vediamo nel dettaglio come si diagonalizza una matrice simmetrica A di ordine n per mezzo di una matrice ortogonale M.

1. Si calcola il polinomio caratteristico di A e si determinano gli autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_r di A.

2. Si determina una base per ciascun autospazio $E(\lambda_1)$, $E(\lambda_2)$, ..., $E(\lambda_r)$ di A.

3. Tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si determina una base ortonormale per ciascun autospazio.

4. Si uniscono le basi ortonormali determinate al punto precedente. Si trova così una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

5. Come matrice M prendiamo la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della base ortonormale così determinata e la matrice diagonale D e quella in cui vengono riportati gli autovalori di A lungo la diagonale ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del relativo autospazio (al solito si ricorda di utilizzare per gli autovalori un'ordine coerente con quello utilizzato per le colonne di M).

39.5 Esercizi

E.39.1 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice M ortogonale e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

E.39.2 Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -k^2 & 2 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM = D$ sia una matrice diagonale? Scelto poi k siffatto, trovare M e D.

E.39.3 Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

a. Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

b. Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

c. Scelto k per cui A_k è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale determinare D diagonale e M ortogonale tali che $M^{-1}A_kM = D$.

39.6 Soluzioni degli esercizi

E.39.1 Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = (3-x)^2(1+x).$$

Dunque gli autovalori di A sono -1 di molteplicità 1 e 3 di molteplicità 2. Pertanto A è simile alla matrice

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo gli autospazi.

Per trovare $E(-1)$ risolviamo il sistema

$$(A - (-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - (-1)I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - (-1)I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 2x \quad + 2z = 0 \\ \quad 4y \quad = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = \ \ 0 \\ z = \ \ t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(-1)$ è data dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Analogamente per trovare $E(3)$ risolviamo il sistema:

$$(A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A - 3I$ è $3 - 2 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non nulla della matrice $A - 3I$, ad esempio la prima:

$$-2x + 2z = 0$$

che risolta dà:

$$\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(3)$ è data dai vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$.

Se volessimo ora determinare una matrice N tale che $N^{-1}AN$sia diagonale potremmo considerare la matrice

$$N := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente questa matrice non è ortogonale. Per determinare una matrice ortogonale di passaggio occorre ortonormalizzare la base di ciascun autospazio. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt troviamo che una base ortonormale di $E(-1)$ è costituita dal vettore.

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Analogamente una base ortonormale per $E(3)$ è data dai vettori

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0).$$

Dunque la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

è una matrice ortogonale e $M^{-1}AM = D$.

E.39.2 Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = -1$. Prendiamo allora d'ora in poi $k = -1$.

Calcoliamo ora il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = -x(3 - x)^2.$$

Dunque gli autovalori di A sono 0 di molteplicità 1 e 3 di molteplicità 2. Pertanto A è simile alla matrice

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo gli autospazi.

Per trovare $E(0)$ risolviamo il sistema

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A - 0I$ è $3 - 1 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A - 0I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Dunque una base per $E(0)$ è data dal vettore $(1, 1, 1)$.

Analogamente per trovare $E(3)$ risolviamo il sistema:

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A - 3I$ è $3 - 2 = 1$. Prendiamo allora un'equazione corrispondente a una riga non nulla della matrice $A - 3I$, ad esempio la prima:

$$-x - y - z = 0$$

che risolta dà:

$$\begin{cases} x = -t - u \\ y = t \\ z = \phantom{-t - {}} u \end{cases}$$

Dunque una base per $E(3)$ è data dai vettori $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

Se volessimo ora determinare una matrice N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale potremmo considerare la matrice

$$N := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente questa matrice non è ortogonale. Per determinare una matrice ortogonale di passaggio occorre ortonormalizzare la base di ciascun autospazio. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt troviamo che una base ortonormale di $E(0)$ è costituita dal vettore.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Analogamente una base ortonormale per $E(3)$ è data dai vettori

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Dunque la matrice

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

è una matrice ortogonale e $M^{-1}AM = D$.

E.39.3

a. Il polinomio caratteristico di A_k è uguale a $-x(3-x)(2-x)^2$ qualunque sia k. Il polinomio caratteristico è, quindi, totalmente riducibile e gli autovalori di A_k sono 0, 3 e 2 di molteplicità rispettiva 1, 1 e 2. La matrice è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità di ciascun autovalore coincide con la dimensione del corrispondente autospazio. Per gli autovalori semplici tale condizione è automaticamente soddisfatta. Dobbiamo, quindi, verificare tale condizione solo per l'autovalore 2. Si ha $\dim E(2) = 4 - \operatorname{rk}(A_k - 2 \cdot I) = 2$ qualunque sia k. Pertanto la matrice A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k.

b. Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A_k è simmetrica se e solo se $k = -1$.

c. Conosciamo già gli autovalori di A_k con la relativa molteplicità, quindi possiamo scrivere subito la matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora una base ortonormale per ciascun autospazio.

Per trovare $E(0)$ risolviamo il sistema

$$(A_k - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A_k - 0I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A_k - 0I$, ad esempio la prima, la seconda e la quarta:

$$\begin{cases} 3x & & = 0 \\ & y + z & = 0 \\ & & 2w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & -t \\ z = & t \\ w = & 0 \end{cases}$$

Dunque una base per $E(0)$ è data dal vettore $(0, -1, 1, 0)$: per ottenere una base ortonormale basta dividere tale vettore per la propria norma. Troviamo così il vettore $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Per trovare $E(3)$ risolviamo il sistema

$$(A_k - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 1 e, pertanto, il rango della matrice $A_k - 3I$ è $4 - 1 = 3$. Prendiamo allora 3 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A_k - 3I$, ad esempio la seconda, la terza e la quarta:

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Dunque una base per $E(3)$ è data dal vettore $(1, 0, 0, 0)$: poiché tale vettore ha norma 1 esso forma già una base ortonormale per $E(3)$.

Per trovare $E(2)$ risolviamo il sistema

$$(A_k - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 2 e, pertanto, il rango della matrice $A_k - 2I$ è $4 - 2 = 2$. Prendiamo allora 2 equazioni corrispondenti a righe linearmente indipendenti della matrice $A_k - 2I$, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \\ w = u \end{cases}$$

Dunque una base per $E(2)$ è data dai vettori $(0, 1, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$: per ottenere una base ortonormale dovremmo applicare il procedimento di Gram-Schmidt. Notiamo però che i due vettori sono già ortogonali: basta allora dividerli per la propria norma e ottenere così i vettori $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

Riportiamo ora le componenti rispetto alla base canonica dei vettori delle varie basi ortonormali di autovettori così determinati e scriviamo la matrice di passaggio ortogonale

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO 40

Geometria in $\mathbb{R}^n$

I punti del piano possono essere rappresentati con elementi di $\mathbb{R}^2$. Analogamente i punti dello spazio possono essere rappresentati con elementi di $\mathbb{R}^3$. È poi possibile utilizzare questa identificazione per studiare i sottospazi vettoriali e i sottospazi affini e analizzare alcune loro proprietà geometriche. In questo capitolo vogliamo generalizzare alcune di queste proprietà al caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

40.1 Sottospazi affini

Sappiamo che $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale, è uno spazio vettoriale di dimensione n. Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono n-uple di numeri reali $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Chiameremo indifferentemente vettori o punti tali elementi: solitamente li indicheremo con lettere minuscole in grassetto quando li pensiamo come vettori $\boldsymbol{v} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, li indicheremo con lettere maiuscole quando li pensiamo come punti $P := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Potremo quindi sommare un punto a un vettore, fare la differenza di due punti e così via.

Con queste notazioni possiamo riprendere i risultati del capitolo 19. Ricordiamo che un sottospazio affine passante per un punto P_0 e parallelo ad un sottospazio vettoriale E è il sottoinsieme

$$P_0 + E := \{P_0 + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in E\}.$$

Utilizzeremo lettere greche maiuscole per indicare i sottospazi affini. Dato allora un sottospazio affine Π ricordiamo che, per definizione, la sua dimensione è la dimensione del sottospazio vettoriale ad esso parallelo: più esplicitamente se Π è il sottospazio affine $P_0 + E$, allora la dimensione di Π è la dimensione del sottospazio vettoriale E. Per individuare un sottospazio affine Π è necessario dare un qualunque suo punto e il sottospazio vettoriale E parallelo a Π. Pertanto se P_0 e P_1 sono due punti di Π ed E è il sottospazio vettoriale parallelo a Π, il sottospazio Π si può rappresentare indifferentemente come $P_0 + E$ o come $P_1 + E$. Questa è la generalizzazione di ciò che avviene nella geometria del piano e dello spazio per le rette: per individuare una retta occorre dare un suo punto qualsiasi e un vettore parallelo alla retta (il che equivale a dare un sottospazio vettoriale di dimensione 1).

Vogliamo ora descrivere più esplicitamente un sottospazio affine Π. Prendiamo un suo punto P_0 e una base del sottospazio vettoriale E parallelo a Π: detta s la dimensione di Π (e, quindi, di E), questa base sarà formata da s vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_s$. I punti di $P_0 + E$ sono allora tutti e soli i punti del tipo

$$P = P_0 + t_1\boldsymbol{e}_1 + t_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_s\boldsymbol{e}_s,$$

al variare di t_1, t_2, ..., t_s in $\mathbb{R}$. L'equazione appena data viene detta **equazione vettoriale parametrica** del sottospazio affine Π. Ricordando che i punti e i vettori sono n-uple di numeri reali, possiamo rendere questa equazione più esplicita. Supponiamo che $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\boldsymbol{e}_1 = (m_{11}, m_{21}, \dots, m_{n1})$, $\boldsymbol{e}_2 = (m_{12}, m_{22}, \dots, m_{n2})$, ..., $\boldsymbol{e}_s = (m_{1s}, m_{2s}, \dots, m_{ns})$. Allora un punto $P := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartiene al sottospazio affine Π se e solo se esistono t_1, t_2, ..., t_s in $\mathbb{R}$ tali che

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = a_1 + m_{11}t_1 + m_{12}t_2 + \cdots + m_{1s}t_s \\ x_2 = a_2 + m_{21}t_1 + m_{22}t_2 + \cdots + m_{2s}t_s \\ \vdots \\ x_n = a_n + m_{n1}t_1 + m_{n2}t_2 + \cdots + m_{ns}t_s \end{cases}$$

Queste sono chiamate **equazioni parametriche** del sottospazio affine Π. Come è del tutto evidente possono essere considerate una generalizzazione delle equazioni parametriche di rette e piani nel piano e nello spazio. Ovviamente se prendiamo al posto di P_0 un diverso punto di Π e\o una diversa base di E otterremo una differente parametrizzazione dello stesso sottospazio affine Π.

Esempio 40.1 Siano dati in $\mathbb{R}^5$ il punto $P_0 := (1, 2, 0, 3, -1)$ e il sottospazio vettoriale E generato dai vettori $\boldsymbol{e}_1 := (1, 1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 := (0, 2, -1, 1, 1)$ ed $\boldsymbol{e}_3 := (0, 0, 0, 1, 2)$. Si può verificare facilmente che i vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$ sono linearmente indipendenti e, quindi, formano una base per E. Il sottospazio affine $\Pi = P_0 + E$ di dimensione 3 ha allora equazioni parametriche:

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = 2 + t_1 + 2t_2 \\ x_3 = -t_2 \\ x_4 = 3 + 2t_1 + t_2 + t_3 \\ x_5 = -1 + t_1 + t_2 + 2t_3 \end{cases}.$$

Se ora prendiamo un altro punto di Π, ad esempio, $P_1 := (2, 3, 0, 5, 0)$ (tale punto si ottiene per $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 0$) e un'altra base di E, ad esempio, quella formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (1, 3, -1, 3, 2)$, $\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = (0, 2, -1, 2, 3)$ e $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 0, 3, 3)$ otteniamo una diversa parametrizzazione dello stesso sottospazio affine

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + t_3 \\ x_2 = 3 + 3t_1 + 2t_2 + t_3 \\ x_3 = -t_1 - t_2 \\ x_4 = 3 + 3t_1 + 2t_2 + 3t_3 \\ x_5 = 2t_1 + 3t_2 + 3t_3 \end{cases}.$$

△

Descriviamo ora esplicitamente i sottospazi affini di dimensione bassa di $\mathbb{R}^n$. Sia $\Pi = P_0 + E$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo:

- $\dim \Pi = 0$ se e solo se E è formato dal solo vettore nullo. Quindi i sottospazi affini di dimensione 0 sono i punti di $\mathbb{R}^n$.

- $\dim \Pi = 1$ se e solo se $\Pi = \{P_0 + t_1 \boldsymbol{e}_1 \mid t_1 \in \mathbb{R}\}$, dove $\boldsymbol{e}_1 \neq 0$.

  I sottospazi affini di dimensione 1 vengono anche chiamati **rette**. Nel caso della geometria del piano $V^2(O)$ e della geometria dello spazio $V^3(O)$ essi sono infatti le usuali rette. Un qualsiasi vettore $\boldsymbol{e}_1$ non nullo che genera E viene chiamato **vettore direttore** della retta r. La stessa retta ha tanti diversi possibili vettori direttori: essi sono tutti multipli uno dell'altro. Le componenti di uno di questi vettori vengono chiamati **parametri direttori** della retta r.

- $\Pi = 2$ se e solo se $\Pi = \{P_0 + t_1 \boldsymbol{e}_1 + t_2 \boldsymbol{e}_2 \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$ dove $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono vettori linearmente indipendenti.

  I sottospazi affini di dimensione 2 vengono anche chiamati **piani**. Nel caso della geometria dello spazio $V^3(O)$ essi sono infatti gli usuali piani.

Sappiamo che in $\mathbb{R}^n$ non esistono sottospazi vettoriali di dimensione maggiore di n. Non esistono quindi sottospazi affini di dimensione maggiore di n.

40.2 Parallelismo di sottospazi affini

Nel capitolo 22 abbiamo visto che due rette nel piano e nello spazio sono parallele se e solo se hanno vettori direttori proporzionali tra loro. Se pensiamo una retta come sottospazio affine del piano o dello spazio e la scriviamo dunque nella forma $P_0 + E$, un suo vettore direttore è un qualsiasi generatore di E. Pertanto possiamo dire che due rette $P_0 + E$ e $P_1 + F$ sono parallele tra loro se e solo se $E = F$. Anche per i piani nello spazio possiamo esprimere una proprietà del tutto simile. Questo suggerisce la:

Definizione 40.2 Due sottospazi affini $\Pi = P_0 + E$ e $\Sigma = P_1 + F$ aventi la stessa dimensione si dicono **paralleli** se $E = F$. △

Possiamo ora reinterpretare alcuni risultati che abbiamo dato per sottospazi affini in spazi vettoriali qualunque. Ad esempio la proposizione 19.17 ci dà la:

Proposizione 40.3 *Due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ della stessa dimensione e paralleli tra loro o coincidono o non hanno alcun punto in comune.*

Osservazione 40.4 Se Π e Σ sono due sottospazi affini paralleli e aventi la stessa dimensione, per stabilire se i due sottospazi affini sono uguali o distinti, basta allora prendere un punto qualsiasi di uno dei due sottospazi affini, diciamo Π, e verificare se tale punto appartiene all'altro sottospazio affine: se la risposta è sì, allora i sottospazi affini coincidono, se la risposta è no, allora i sottospazi affini sono distinti. △

Vediamo qualche applicazione di questi concetti.

Esempio 40.5 Consideriamo i sottospazi affini di $\mathbb{R}^5$ di equazioni parametriche

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = 2 + t_1 + 2t_2 \\ x_3 = - t_2 \\ x_4 = 3 + 2t_1 + t_2 + t_3 \\ x_5 = -1 + t_1 + t_2 + 2t_3 \end{cases}$$

e

$$\Sigma\colon \begin{cases} x_1 = 3 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 + 3t_1 + t_2 + 2t_3 \\ x_3 = 1 - t_1 - t_3 \\ x_4 = 1 + 3t_1 + 3t_2 + 2t_3 \\ x_5 = 2t_1 + 3t_2 + 3t_3 \end{cases}$$

Ci chiediamo se i sottospazi affini appena dati sono paralleli o meno e se sono eventualmente coincidenti.

Il sottospazio vettoriale E parallelo a Π è generato dai vettori $(1,1,0,2,1)$, $(0,2,-1,1,1)$ e $(0,0,0,1,2)$, mentre il sottospazio vettoriale F parallelo a Σ è generato dai vettori $(1,3,-1,3,2)$, $(1,1,0,3,3)$ e $(0,2,-1,2,3)$. Poiché

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Il sottospazio vettoriale E ha proprio dimensione 3. Allo stesso modo si verifica che F ha dimensione 3. Come possiamo verificare se $E = F$? Notiamo che se $E = F$ allora $E + F = E$ cioè $\dim(E + F) = 3$; se invece $E \neq F$ allora $E + F$ contiene strettamente E cioè $\dim(E + F) > 3$. Basta allora calcolare la dimensione di $E + F$: questo è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

le cui colonne di questa matrice danno le componenti dei vettori che generano $E + F$. Si può verificare che questo rango è esattamente 3. Pertanto $E = F$ e i due sottospazi affini Π e Σ sono paralleli.

Dobbiamo ora verificare se coincidono o meno. Abbiamo detto che due sottospazi affini paralleli e aventi la stessa dimensione o coincidono o non hanno punti in comune. Possiamo allora prendere un punto arbitrario di Π, ad esempio $P_0 := (1,2,0,3,-1)$, e verificare se appartiene a Σ. Se la risposta è sì, allora $\Pi = \Sigma$, se la risposta è no, allora Π e Σ non hanno punti in comune. Il punto

P_0 appartiene a Σ se e solo il sistema

$$\begin{cases} 1 = 3 + t_1 + t_2 \\ 2 = 2 + 3t_1 + t_2 + 2t_3 \\ 0 = 1 - t_1 - t_3 \\ 3 = 1 + 3t_1 + 3t_2 + 2t_3 \\ -1 = 2t_1 + 3t_2 + 3t_3 \end{cases}$$

ha soluzione. Svolgendo i calcoli, si vede che questo sistema non ha soluzione, e, quindi, Π e Σ sono paralleli e distinti. △

Ricordiamo che nello spazio è tuttavia possibile definire il parallelismo anche tra rette e piani, cioè tra sottospazi affini aventi dimensioni diverse. Ci chiediamo come sia possibile estendere questa nozione al caso di sottospazi affini qualunque. Notiamo che nello spazio una retta è parallela a un piano se, preso un suo qualunque vettore direttore, questo è contenuto nel sottospazio vettoriale parallelo al piano. Questo suggerisce la:

Definizione 40.6 I sottospazi affini $\Pi = P_0 + E$ e $\Sigma = P_1 + F$ si dicono **paralleli** se $E \subseteq F$ o se $F \subseteq E$. △

Come nello spazio una retta parallela a un piano o giace su essa o non ha con il piano punti in comune, così in $\mathbb{R}^n$ abbiamo la:

Proposizione 40.7 *Siano* Π *e* Σ *sottospazi affini paralleli con* $\dim \Pi \leq \dim \Sigma$. *Allora* $\Pi \subseteq \Sigma$ *oppure* $\Pi \cap \Sigma = \varnothing$.

Dimostrazione Sia E il sottospazio vettoriale parallelo a Π e F il sottospazio vettoriale parallelo a F. Per ipotesi $E \subseteq F$.

Supponiamo che l'intersezione di Π e Σ non sia vuota: allora esiste un punto P_0 cha appartiene tanto a Π che a Σ. Poiché abbiamo ricordato che per dare un sottospazio affine è sufficiente dare un suo punto qualsiasi e il sottospazio vettoriale ad esso parallelo, possiamo allora dire che $\Pi = P_0 + E$ e $\Sigma = P_0 + F$. I punti di Π sono allora i punti del tipo $P_0 + \boldsymbol{v}$ al variare di $\boldsymbol{v}$ in E: poiché $E \subseteq F$, tali punti appartengono anche a $P_0 + F$, cioè a Σ. ■

Esempio 40.8 Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi affini

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 1 + 2t + u \\ x_2 = 2 - t - u \\ x_3 = -1 + t \\ x_4 = t - u \end{cases}$$

e

$$\Sigma\colon \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = 2 + t \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Il sottospazio affine Π ha dimensione 2 e il sottospazio vettoriale E a esso parallelo è generato dai vettori $(2, -1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0, -1)$, mentre il sottospazio affine Σ ha dimensione 1 e il sottospazio vettoriale F a esso parallelo è generato dal vettore $(3, -2, 1, 0)$. Pertanto Π e Σ sono paralleli se e solo se $F \subseteq E$, cioè se e solo se $(3, -2, 1, 0)$ appartiene a E. Facendo i calcoli si vede che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 2. Pertanto $F \subseteq E$: i sottospazi affini Π e Σ sono paralleli. Ci chiediamo se Π e Σ hanno punti in comune: poiché $\dim \Sigma < \dim \Pi$ ciò avviene se e solo se Σ è contenuto in Π. Consideriamo allora un punto qualsiasi di Σ, ad esempio $P := (2, 1, 2, 1)$. Questo appartiene a Π se e solo se il sistema

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t + u \\ 1 = 2 - t - u \\ 2 = -1 + t \\ 1 = t - u \end{cases}$$

è risolubile. Riscriviamo il sistema così:

$$\begin{cases} 2t + u = 1 \\ -t - u = -1 \\ t \phantom{{}-u} = 3 \\ t - u = 1 \end{cases}$$

È facile vedere che questo sistema non è risolubile. Pertanto Π e Σ non hanno punti in comune. △

Osservazione 40.9 Quando utilizziamo il parallelismo tra sottospazi affini di dimensioni diverse occorre fare particolare attenzione. Per esempio, nell'ordinario spazio due rette parallele allo stesso piano non è detto siano parallele fra loro. Analogamente due sottospazi affini Σ e Ω paralleli a uno stesso sottospazio affine Π non è detto siano paralleli fra loro. Questo è invece vero nel caso in cui Σ, Ω e Π abbiano tutti la stessa dimensione. △

Esempio 40.10 Riprendiamo l'esempio 40.8 e consideriamo il sottospazio affine

$$\Omega\colon \begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 1 + t \end{cases}$$

È facile vedere che questo sottospazio affine di dimensione 1 è parallelo a Π ma non è parallelo a Σ: infatti il sottospazio vettoriale parallelo a Ω è il sottospazio G generato dal vettore $(2, -1, 1, 1)$, e né $G \subseteq F$ né $F \subseteq G$. △

Esercizio di base 40.11 Siano dati in $\mathbb{R}^5$ i sottospazi affini

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 1 + t + u \\ x_2 = -t - u \\ x_3 = t \\ x_4 = -1 + t - u \\ x_5 = 4 - t + u \end{cases}, \quad \Sigma\colon \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 1 - 3t \\ x_3 = 1 + 2t \\ x_4 = 2 + t \\ x_5 = 1 - t \end{cases} \quad \Omega\colon \begin{cases} x_1 = 1 + 2t + u \\ x_2 = 1 - 2t - u \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 - u \end{cases}. \qquad \triangle$$

Stabilire se sono a due due paralleli e in caso affermativo se uno di essi sia contenuto in un altro.

40.3 Inviluppi affini

Supponiamo di avere alcuni punti P_0, P_1, ..., P_s di $\mathbb{R}^n$ e di voler determinare un sottospazio affine contenente tutti i punti: vogliamo però che questo sottospazio affine sia il più piccolo possibile, nel senso che sia contenuto in ogni altro sottospazio affine contenente tutti i punti. Nella geometria del piano e dello spazio abbiamo già affrontato questo problema. Ad esempio per due punti distinti nel piano o nello spazio il più piccolo sottospazio affine che li contiene è la retta passante per essi. Se prendiamo invece tre punti non allineati nello spazio il più piccolo sottospazio affine che li contiene e il piano passante per essi.

Iniziamo il nostro studio con la semplice ma utile:

Proposizione 40.12 *Sia $\Pi := P_0 + E$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ e siano A e B due punti di Π. Allora il vettore $B - A$ appartiene a E.*

Dimostrazione Per definizione di sottospazio affine esiste un vettore $\boldsymbol{v}_1$ in E tale che $A = P_0 + \boldsymbol{v}_1$; analogamente esiste un vettore $\boldsymbol{v}_2$ in E tale che $B = P_0 + \boldsymbol{v}_2$. Ma allora

$$B - A = (P_0 + \boldsymbol{v}_2) - (P_0 + \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \in E. \qquad \blacksquare$$

Diamo allora la:

Definizione 40.13 Dati i punti P_0, P_1, ..., P_s di $\mathbb{R}^n$, sia F il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, ..., $P_s - P_0$. Il sottospazio affine $P_0 + F$ è detto **inviluppo affine** dei punti P_0, P_1, ..., P_s. △

Osservazione 40.14 L'inviluppo affine degli $s + 1$ punti P_0, P_1, ..., P_s ha dimensione al massimo s. △

In questa definizione non abbiamo preso tutte le possibili differenze del tipo $P_i - P_j$ ma solo quelle in cui è coinvolto il punto P_0, che sembra rivestire un ruolo privilegiato. Tuttavia, per esempio, la differenza $P_3 - P_1$ può essere espressa come $(P_3 - P_0) - (P_1 - P_0)$ e, pertanto, appartiene a F: in maniera simile anche tutte le altre differenze appartengono a F.

L'inviluppo affine di P_0, P_1, ..., P_s contiene tutti i punti P_0, P_1, ..., P_s: infatti contiene ovviamente P_0 e, per $i \neq 0$, si ha $P_i = P_0 + (P_i - P_0)$, cioè P_i è somma di P_0 e di un vettore appartenente a F.

Consideriamo ora un qualsiasi sottospazio affine Σ contenente i punti P_0, P_1, …, P_s. In particolare Σ può essere espresso come $P_0 + E$ dove E è il sottospazio vettoriale parallelo a Σ. Per la proposizione 40.12 i vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, …, $P_s - P_0$ appartengono tutti a E: pertanto $\Sigma = P_0 + E$ contiene l'inviluppo affine di P_0, P_1, …, P_s.

Possiamo riassumere le considerazioni fin qui fatte:

Teorema 40.15 *Dati i punti P_0, P_1, …, P_s di $\mathbb{R}^n$ sia Π il loro inviluppo affine. Allora*

- Π *contiene tutti i punti P_0, P_1, …, P_s;*
- *se Σ è un sottospazio affine contenente i punti P_0, P_1, …, P_s allora $\Sigma \supseteq \Pi$.*

La nozione di inviluppo affine generalizza concetti analoghi visti nel piano e nello spazio. Ad esempio, dicendo che i punti P_0, P_1, …, P_s sono **allineati** intendiamo dire che esiste una retta che li contiene, cioè, in altri termini, che il loro inviluppo affine ha dimensione minore o uguale a 1. Dicendo che i punti sono **complanari** intendiamo dire che esiste un piano che li contiene, vale a dire che il loro inviluppo affine ha dimensione minore o uguale a 2. Pertanto possiamo dare la seguente generalizzazione dei teoremi 20.16 e 20.17:

Teorema 40.16 *Siano dati i punti P_0, P_1, …, P_s di $\mathbb{R}^n$. Allora*

- *I punti P_0, P_1, …, P_s sono allineati se e solo se i vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, …, $P_s - P_0$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 1.*
- *I punti P_0, P_1, …, P_s sono complanari se e solo se i vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, …, $P_s - P_0$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a 2.*

Supponiamo ora di avere dei punti P_0, P_1, …, P_s il cui inviluppo affine Π ha dimensione r. Se Σ fosse un altro sottospazio affine di dimensione r contenente P_0, P_1, …, P_s, allora, per il teorema 40.15, il sottospazio Σ dovrebbe contenere Π: ma allora $\Pi = \Sigma$. Abbiamo dunque la:

Proposizione 40.17 *Siano P_0, P_1, …, P_s dei punti e sia r la dimensione del loro inviluppo affine Π. Allora Π è l'unico sottospazio affine di dimensione r che contiene tutti i punti P_0, P_1, …, P_s.*

Ancora una volta abbiamo una generalizzazione di proprietà del piano o dello spazio. Ad esempio, dati due punti distinti P_0 e P_1, il vettore $P_1 - P_0$ è non nullo e quindi genera un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Dunque l'inviluppo affine di P_0 e P_1 ha dimensione 1, cioè è una retta. Abbiamo così il:

Teorema 40.18 *Siano $P_0 := (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $P_1 := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ due punti distinti di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una e una sola retta contenente i due punti. Essa ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ \vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t \end{cases}$$

La retta passante ha parametri direttori $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$

Esempio 40.19 Consideriamo i punti $P_0 := (1, 2, 0, 1)$ e $P_1 := (2, 1, 1, 3)$ di $\mathbb{R}^4$. La retta passante per P_0 e P_1 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (2-1)t \\ x_2 = 2 + (1-2)t \\ x_3 = \phantom{1 + {}} (1-0)t \\ x_4 = 1 + (3-1)t \end{cases}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = \phantom{1 + {}} t \\ x_4 = 1 + 2t \end{cases}$$

△

Esercizio di base 40.20 Scrivere le equazioni parametriche della retta di $\mathbb{R}^6$ passante per i punti $P_0 := (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e $P_1 := (0, 1, 4, -1, 3, 0)$.

Abbiamo visto nella geometria dello spazio che, dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano passante per essi. In $\mathbb{R}^n$ si ha un teorema analogo.

Teorema 40.21 *Siano dati i punti* $P_0 := (a_1, a_2, \dots, a_n)$*,* $P_1 := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *e* $P_2 := (c_1, c_2, \dots, c_n)$ *di* $\mathbb{R}^n$*. Se* P_0*,* P_1 *e* P_2 *non sono allineati allora esiste uno e un solo piano contenente i tre punti. Esso ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t + (c_1 - a_1)u \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t + (c_2 - a_2)u \\ \vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t + (c_n - a_n)u \end{cases}$$

Esercizio di base 40.22 Per ciascuna delle terne di punti seguenti determinarne dimensione ed equazioni parametriche dell'inviluppo affine. Stabilire in particolare quando i punti sono allineati.

a. $P_0 := (1, 2, 3, 4)$, $P_1 := (1, 2, 0, 2)$ e $P_2 := (0, 1, 2, 5)$;

b. $P_0 := (1, 2, 3, 4, 5)$, $P_1 := (2, 4, 1, 2, 6)$ e $P_2 := (2, 4, -4, -4, 2)$;

c. $P_0 := (1, 2, 3, 4, 5)$, $P_1 := (2, 4, 1, 2, 6)$ e $P_2 := (3, 6, -1, 0, 7)$. △

Esercizio di base 40.23 Dati $P_0 := (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P_1 := (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $P_2 := (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $P_3 := (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ e $P_4 := (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^6$, determinarne l'inviluppo affine.

40.4 Iperpiani

Consideriamo i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ aventi dimensione $n-1$. Diamo allora la:

Definizione 40.24 Un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ è detto **iperpiano**. △

Nella usuale geometria del piano gli iperpiani sono le rette e possono essere rappresentati per mezzo di una equazione cartesiana. Allo stesso modo nella usuale geometria dello spazio gli iperpiani sono i piani e possono essere rappresentati per mezzo di una equazione cartesiana.

Questi risultati si generalizzano facilmente e diventa quindi possibile dimostrare il:

Teorema 40.25 *Sia data un'equazione del tipo:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

con a_1, a_2 ..., a_n non tutti nulli. L'insieme dei punti $P := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le cui coordinate verificano tale equazione è un iperpiano.

Viceversa, dato un iperpiano $\Pi = P_0 + E$, esiste un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

*con a_1, a_2 ..., a_n non tutti nulli le cui soluzioni sono tutti e soli i punti dell'iperpiano. Tale equazione è detta **equazione cartesiana** dell'iperpiano.*

Non diamo esplicitamente la dimostrazione di questo teorema perché segue esattamente la falsariga degli analoghi teoremi dati nel caso della geometria del piano e dello spazio.

Esercizio di base 40.26 Dimostrare la prima parte del teorema precedente: si mostri cioè che l'insieme delle soluzioni di un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0 \qquad \triangle$$

con a_1, a_2 ..., a_n non tutti nulli, è un iperpiano.

Osservazione 40.27 Ogni equazione equivalente all'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ ha le stesse soluzioni ed è quindi un'equazione cartesiana dello stesso iperpiano. Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che le equazioni equivalenti all'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ sono tutte e sole le sue multiple per una costante non nulla, cioè le equazioni del tipo $ka_1x_1 + ka_2x_2 + \cdots + ka_nx_n + kb = 0$ con $k \neq 0$. Dunque l'equazione cartesiana di un iperpiano può essere scelta in infiniti modi. △

Esercizio di base 40.28 Dati i punti $P_0 := (1, 0, 0, 0)$, $P_1 := (0, 1, 0, 0)$, $P_2 := (0, 0, 1, 0)$ e $P_3 := (0, 0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$, dimostrare che il loro inviluppo affine è un iperpiano e determinarne un'equazione cartesiana.

Dato un iperpiano tramite equazione cartesiana, per ottenerne le equazioni parametriche è sufficiente risolvere l'equazione in termini dell'opportuno numero di parametri,

Esercizio di base 40.29 Determinare le equazioni parametriche degli iperpiani $\Pi\colon 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 + 3 = 0$ e $\Sigma\colon x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 1 = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

I risultati generali sul parallelismo di sottospazi affini si applicano, ovviamente, anche al caso in cui consideriamo iperpiani. L'utilizzo delle equazioni cartesiane ci permette però di precisare meglio tali risultati. In particolare è possibile, in maniera del tutto analoga a quanto fatto per le rette nel piano e per i piani nello spazio, dimostrare il:

Teorema 40.30 *Siano dati gli iperpiani* $\Pi\colon a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0$ *e* $\Sigma\colon a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0$ *di* $\mathbb{R}^n$. *Gli iperpiani* Π *e* Σ *sono paralleli se e solo se*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} = 1.$$

I due iperpiani coincidono se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Osservazione 40.31 Siano dati $\Pi\colon a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0$ e $\Sigma\colon a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0$ iperpiani non paralleli di $\mathbb{R}^n$. La loro intersezione è data dall'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \end{cases}$$

Grazie al teorema precedente, la matrice di questo sistema ha rango 2: pertanto, qualunque siano i termini noti il sistema è risolubile e l'insieme delle sue soluzioni dipende da $n - 2$ parametri, cioè è un sottospazio affine di dimensione $n - 2$. $\triangle$

Ancora una volta abbiamo una generalizzazione di risultati già noti nel caso del piano e dello spazio: infatti due rette non parallele nel piano si intersecano in un punto, cioè un sottospazio affine di dimensione $0 = 2 - 2$, mentre due piani non paralleli nello spazio si intersecano in una retta, cioè un sottospazio affine di dimensione $1 = 3 - 2$.

Esercizio di base 40.32 Sia $\Pi\colon 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2 = 0$ un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. Determinare l'equazione dell'iperpiano Σ parallelo a Π e passante per il punto $A \coloneqq (1, -1, 1, 2)$.

40.5 Ortogonalità

Come già per le rette nel piano e per i piani nello spazio i coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di un iperpiano hanno un significato geometrico molto preciso. Con tecniche analoghe a quelle utilizzate nei casi già visti possiamo dimostrare il:

Teorema 40.33 *Se* Π *è un iperpiano di* $\mathbb{R}^n$ *di equazione cartesiana*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0,$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} := (a_1, \ldots, a_n)$ *è ortogonale a ogni vettore appartenente al sottospazio vettoriale* E *parallelo a* Π*. Viceversa un vettore che sia ortogonale a ogni vettore di* E *è un multiplo di* $\boldsymbol{v}$*.*

Per questa ragione il vettore $\boldsymbol{v}$ *viene detto vettore* ***ortogonale*** *al sottospazio affine.*

Esercizio di base 40.34 Determinare un vettore ortogonale all'iperpiano trovato nell'esercizio di base 40.28.

Definizione 40.35 Una retta e un iperpiano si dicono **ortogonali** se un vettore direttore della retta è ortogonale all'iperpiano. △

Il teorema 40.33 ci dice che tutti i vettori ortogonali a un iperpiano sono paralleli tra loro. In particolare ciò ci dà la:

Proposizione 40.36 *Tutte le rette ortogonali a un medesimo iperpiano* Π *sono parallele fra loro. Per ogni punto* P *esiste un'unica retta passante per* P *e ortogonale all'iperpiano* Π*.*

Anche questo risultato è una generalizzazione di analoghi risultati nel piano e nello spazio. Ricordiamo infatti che:

- nel piano, due rette ortogonali alla stessa retta r sono parallele fra loro; inoltre per ogni punto del piano passa un'unica retta ortogonale a r.

- nello spazio, due rette ortogonali allo stesso piano π sono parallele fra loro; inoltre per ogni punto dello spazio passa un unica retta ortogonale a π.

Esercizio di base 40.37 Dato l'iperpiano $\Pi\colon x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_5 + 1 = 0$ di $\mathbb{R}^5$ determinare le equazioni parametriche della retta Σ passante per il punto $P := (1, 0, 3, 1, 2)$ e ortogonale a Π. Determinare poi l'intersezione tra la retta Σ e l'iperpiano Π.

40.6 Insiemi convessi e semispazi

Per analogia a quanto visto nel piano e nello spazio possiamo dare la:

Definizione 40.38 Dati due punti P_0 e P_1 distinti di $\mathbb{R}^n$, il **segmento aperto** di estremi P_0 e P_1 è l'insieme dei punti $\{P := P_0 + t(P_1 - P_0) \mid 0 < t < 1\}$. Chiamiamo invece **segmento chiuso** di estremi P_0 e P_1 l'insieme dei punti $\{P = P_0 + t(P_1 - P_0) \mid 0 \le t \le 1\}$. Più esplicitamente, se $P_0 := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $P_1 := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i punti del segmento aperto di estremi P_0 e P_1 sono allora quelli di coordinate

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t \end{cases}$$

che si ottengono per $0 < t < 1$, mentre i punti del segmento chiuso si ottengono per $0 \leq t \leq 1$. △

Osservazione 40.39 Il segmento chiuso di estremi P_0 e P_1 è formato dai punti del segmento aperto e dagli estremi P_0 e P_1. △

Esempio 40.40 I punti del segmento aperto di estremi $(1, 2, 3, 4)$ e $(1, 1, 1, 1)$ sono tutti e soli i punti $P := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ di $\mathbb{R}^4$ del tipo

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = 4 - 3t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$. △

Esercizio di base 40.41 Per ciascuno dei punti $(0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$ e $(2, 4, 6, 8, 10)$ di $\mathbb{R}^5$ stabilire se appartengono al segmento aperto che ha come estremi $P_0 := (1, 2, 3, 4, 5)$ e $P_1 := (-1, -2, -3, -4, -5)$.

Possiamo allora estendere a $\mathbb{R}^n$ la definizione di insieme convesso comunemente utilizzata nella geometria del piano e dello spazio.

Definizione 40.42 Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se, dati comunque P_0 e P_1 in C, si ha che ogni punto del segmento aperto di estremi P_0 e P_1 appartiene a C. △

Si può mostrare facilmente che ogni segmento è convesso.

Abbiamo visto nella geometria del piano che ogni retta r divide il piano in due semipiani. I semipiani sono insiemi convessi, dunque dati due punti A e B che stanno sullo stesso semipiano delimitato da r, il segmento di estremi A e B appartiene tutto a tale semipiano: in particolare il segmento di estremi A e B non interseca r. Inoltre, dati due punti A e B in semipiani delimitati da r diversi, il segmento di estremi A e B interseca r in un punto. Abbiamo inoltre visto che i due semipiani sono descritti per mezzo delle disequazioni che si ottengono a partire dall'equazione cartesiana di r (si veda il teorema 23.47).

In maniera simile nella geometria dello spazio ogni piano π divide lo spazio in due semispazi. I semispazi sono insiemi convessi, dunque dati due punti A e B che stanno sullo stesso semispazio delimitato da π il segmento di estremi A e B appartiene tutto a tale semispazio: in particolare il segmento di estremi A e B non interseca π. Inoltre, dati due punti A e B in semispazi delimitati da π diversi, il segmento di estremi A e B interseca π in un punto. Abbiamo inoltre visto che i due semispazi sono descritti per mezzo delle disequazioni che si ottengono a partire dall'equazione cartesiana di π (si veda il teorema 24.42).

Notiamo che una retta è un iperpiano del piano e che un piano è un iperpiano dello spazio. Possiamo quindi dire che nella geometria del piano (o dello spazio) un iperpiano divide il piano (o lo spazio) in due sottoinsiemi convessi detti semipiani (o semispazi) tali che il segmento avente come vertici appartenenti a semipiani (o semispazi) diversi interseca l'iperpiano in un punto. Tutto ciò si generalizza in $\mathbb{R}^n$, per mezzo del prossimo risultato, di cui non diamo la dimostrazione:

Teorema 40.43 *Sia* Π *un iperpiano di* $\mathbb{R}^n$ *di equazione cartesiana*

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n + b = 0.$$

Allora i due sottoinsiemi

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b > 0\}$$

e

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b < 0\}$$

sono sottoinsiemi convessi detti ***semispazi*** *delimitati da* Π*. Inoltre se* P_0 *e* P_1 *sono punti di* $\mathbb{R}^n$ *che stanno su semispazi delimitati da* Π *diversi, il segmento di estremi* P_0 *e* P_1 *interseca l'iperpiano* Π *in un punto.*

Esempio 40.44 Sia Π l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ passante per i punti $P_1 := (1, 0, 0, 0)$, $P_2 := (0, 1, 0, 0)$, $P_3 := (0, 0, 1, 0)$ e $P_4 := (0, 0, 0, 1)$. Vogliamo determinare il semispazio contenente il punto $O := (0, 0, 0, 0)$ e delimitato dall'iperpiano Π. Per far ciò determiniamo innanzitutto l'iperpiano Π. Consideriamo il generico iperpiano:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0.$$

Imponendo il passaggio per i quattro punti abbiamo un sistema di quattro equazioni nelle cinque incognite a_1, a_2, a_3, a_4, e b. Risolvendo questo sistema si trovano soluzioni tutte proporzionali fra loro. Scegliendone una non banale troviamo l'equazione dell'iperpiano

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0.$$

I due semispazi delimitati da esso hanno disequazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 > 0$$

e

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 < 0.$$

Le coordinate del punto O verificano la seconda disequazione ed è quindi questa la disequazione del semispazio cercato. $\triangle$

40.7 Soluzioni degli esercizi di base

EB.40.11 Il sottospazio Π ha dimensione 2 e il sottospazio vettoriale E ad esso parallelo è generato dai vettori $(1, -1, 1, 1, -1)$ e $(1, -1, 0, -1, 1)$; il sottospazio Σ ha dimensione 1 e il sottospazio vettoriale F ad esso parallelo è generato dal vettore $(3, -3, 2, 1, -1)$; il sottospazio Ω ha dimensione 2 e il sottospazio vettoriale G ad esso parallelo è generato dai vettori $(2, -2, 1, 0, 0)$ e $(1, -1, 0, 0, -1)$.

Per verificare se i sottospazi affini Π e Σ sono paralleli consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti di un sistema di generatori per $E + F$.

Questa matrice ha rango 2: ciò significa che $\dim(E + F) = 2$ e, pertanto, E contiene F, vale a dire Π e Σ sono paralleli. Poiché Π e Σ sono paralleli o non hanno punti in comune o uno è contenuto nell'altro: in questo secondo caso puo solo essere Σ contenuto in Π dato che $\dim \Sigma < \dim \Pi$. Prendiamo allora un punto arbitrario di Σ ad esempio $P := (0, 1, 1, 2, 1)$. Se P è contenuto in Π allora tutto Σ è contenuto in Π, altrimenti Π e Σ non hanno punti in comune. Il punto P appartiene a Π se e solo se il sistema

$$\begin{cases} 0 = & 1 + t + u \\ 1 = & - t - u \\ 1 = & t \\ 2 = & -1 + t - u \\ 1 = & 4 - t + u \end{cases}$$

è risolubile. Svolgendo i calcoli si vede che questo sistema è risolubile e, pertanto, Σ è contenuto in Π.

Per verificare se i sottospazi affini Π e Ω sono paralleli consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3: ciò significa che $\dim(E+G) = 3$ e, pertanto, né E contiene G né G contiene E, vale a dire Π e Ω non sono paralleli.

Per verificare se i sottospazi affini Σ e Ω sono paralleli consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3: ciò significa che $\dim(F+G) = 3$ e, pertanto, né F contiene G né G contiene F, vale a dire Σ e Ω non sono paralleli.

EB.40.20 La retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (0 - 1)t \\ x_2 = 2 + (1 - 2)t \\ x_3 = 3 + (4 - 3)t \\ x_4 = 4 + (-1 - 4)t \\ x_5 = 5 + (3 - 5)t \\ x_6 = 6 + (0 - 6)t \end{cases}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 4 - 5t \\ x_5 = 5 - 2t \\ x_6 = 6 - 6t \end{cases}$$

EB.40.22

a. I vettori differenza $(1,2,0,2)-(1,2,3,4)=(0,0,-3,-2)$ e $(0,1,2,5)-(1,2,3,4)=(-1,-1,-1,1)$ sono linearmente indipendenti: dunque l'inviluppo affine dei punti P_0, P_1 e P_2 ha dimensione 2 e le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 - u \\ x_2 = 2 - u \\ x_3 = 3 - 3t - u \\ x_4 = 4 - 2t + u \end{cases}$$

b. I vettori differenza $(2,4,1,2,6)-(1,2,3,4,5)=(1,2,-2,-2,1)$ e $(2,4,-4,-4,2)-(1,2,3,4,5)=(1,2,-7,-8,-3)$ sono linearmente indipendenti: dunque l'inviluppo affine dei punti P_0, P_1 e P_2 ha dimensione 2 e le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t + u \\ x_2 = 2 + 2t + 2u \\ x_3 = 3 - 2t - 7u \\ x_4 = 4 - 2t - 8u \\ x_5 = 5 + t - 3u \end{cases}$$

c. I vettori $(2,4,1,2,6)-(1,2,3,4,5)=(1,2,-2,-2,1)$ e $(3,6,-1,0,7)-(1,2,3,4,5)=(2,4,-4,-4,2)$ sono linearmente dipendenti. I tre punti sono dunque allineati e la retta passante per essi ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + 2t \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = 4 - 2t \\ x_5 = 5 + t \end{cases}$$

EB.40.23 Il sottospazio vettoriale parallelo all'inviluppo affine dei punti dati è generato dai vettori $P_1 - P_0 = (-1,1,0,0,0,0)$, $P_2 - P_0 = (-1,0,1,0,0,0)$, $P_3 - P_0 = (-1,0,0,1,0,0)$ e $P_4 - P_0 = (-1,0,0,0,1,0)$. Si può verificare facilmente che questi vettori sono linearmente indipendenti e, quindi, l'inviluppo affine di P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4 ha dimensione 4. Esso ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \\ x_5 = t_4 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

EB.40.26 La singola equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

forma un sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, ..., x_n la cui matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. Poiché almeno uno degli a_i è diverso da 0 questa matrice ha rango 1. La matrice completa, essendo di tipo $(1, n+1)$ non può che avere anch'essa rango 1 e, pertanto, il sistema è risolubile e l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio affine di dimensione $n-1$, cioè un iperpiano.

EB.40.28 Prendiamo in considerazione i vettori $P_1 - P_0 = (-1, 1, 0, 0)$, $P_2 - P_0 = (-1, 0, 1, 0)$ e $P_3 - P_0 = (-1, 0, 0, 1)$. È facile verificare che sono linearmente indipendenti e, quindi, l'inviluppo affine dei punti P_0, P_1, P_2 e P_3 ha dimensione 3 (ovvero è un iperpiano). La generica equazione di un iperpiano è del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti P_0, P_1, P_2 e P_3 otteniamo le condizioni:

$$\begin{cases} a_1 & & & & + b = 0 \\ & a_2 & & & + b = 0 \\ & & a_3 & & + b = 0 \\ & & & a_4 & + b = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni tra loro proporzionali dipendenti da un parametro. Scegliendo uno di questi valori troviamo che l'iperpiano ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0.$$

EB.40.29 Risolvendo l'equazione di Π si trova:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t_1 - \frac{3}{2}t_2 - \frac{1}{2}t_3 + t_4 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \\ x_5 = t_4 \end{cases}.$$

Allo stesso modo risolvendo l'equazione di Σ troviamo

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2t_2 - 3t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \\ x_5 = t_4 \end{cases}.$$

Notiamo che il fatto che le incognite x_2 e x_5 non compaiano esplicitamente nell'equazione cartesiana di Σ non significa che di esse non si debba tenere conto nel risolvere l'equazione.

EB.40.32 Il generico iperpiano parallelo a Π ha equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0$ dove (a_1, a_2, a_3, a_4) è un multiplo di $(2, -3, 4, 1)$. Poiché moltiplicando o dividendo l'equazione cartesiana di un iperpiano per una costante si ottiene un'equazione equivalente dello stesso iperpiano, possiamo supporre che un generico iperpiano parallelo a Π abbia equazione del tipo $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + b = 0$ (il ragionamento è analogo a quello utilizzato per introdurre i fasci di rette parallele nel piano o i fasci di piani paralleli nello spazio). Imponendo allora il passaggio per il punto A otteniamo la condizione:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 2 + b = 0$$

da cui ricaviamo $b = -11$. L'iperpiano cercato Σ ha allora equazione cartesiana $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 11 = 0$.

EB.40.34 Poiché l'equazione dell'iperpiano è

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0$$

un vettore a esso ortogonale è semplicemente $(1, 1, 1, 1)$.

EB.40.37 Un vettore ortogonale a Π è $(1, -3, 4, 0, 2)$. Possiamo allora scrivere immediatamente le equazioni parametriche della retta Σ:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = \quad - 3t \\ x_3 = 3 + 4t \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 + 2t \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione cartesiana di Π troviamo l'equazione risolvente per l'intersezione:

$$(1 + t) - 3 \cdot (-3t) + 4 \cdot (3 + 4t) + 2 \cdot (2 + 2t) + 1 = 0,$$

vale a dire $30t + 18 = 0$ la cui soluzione $t = -\frac{3}{5}$, sostituita nelle equazioni parametriche della retta Σ dà le coordinate del punto di intersezione $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$.

EB.40.41 I punti del segmento aperto di estremi P_0 e P_1 sono tutti e soli i punti $P := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ del tipo

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2 - 4t \\ x_3 = 3 - 6t \\ x_4 = 4 - 8t \\ x_5 = 5 - 10t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$. Per verificare se il punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ appartiene al segmento risolviamo il sistema nell'incognita t:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2t \\ 0 = 2 - 4t \\ 0 = 3 - 6t \\ 0 = 4 - 8t \\ 0 = 5 - 10t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = \frac{1}{2}$. Poiché questo valore è compreso tra 0 e 1, il punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ appartiene al segmento. Analogamente per il punto $(1, 1, 1, 1, 1)$ consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 - 2t \\ 1 = 2 - 4t \\ 1 = 3 - 6t \\ 1 = 4 - 8t \\ 1 = 5 - 10t \end{cases}$$

Poiché questo sistema non ha soluzione, il punto $(1, 1, 1, 1, 1)$ non appartiene al segmento (il fatto che il sistema non abbia soluzione significa che il punto $(1, 1, 1, 1, 1)$

non appartiene nemmeno alla retta passante per P_0 e P_1). Infine, per quanto riguarda il punto $(2,4,6,8,10)$ consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = 1 - 2t \\ 4 = 2 - 4t \\ 6 = 3 - 6t \\ 8 = 4 - 8t \\ 10 = 5 - 10t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = -\frac{1}{2}$. Poiché questo valore non è compreso tra 0 e 1, il punto $(2,4,6,8,10)$ non appartiene al segmento (il fatto che il sistema abbia soluzione significa che il punto $(2,4,6,8,10)$ appartiene alla retta passante per P_0 e P_1).

40.8 Sunto

Sottospazi affini

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono n-uple di numeri reali $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Chiameremo indifferentemente vettori o punti tali elementi: solitamente li indicheremo con lettere minuscole in grassetto quando li pensiamo come vettori $\boldsymbol{v} := (a_1, a_2, \dots, a_n)$, li indicheremo con lettere maiuscole quando li pensiamo come punti $P := (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Potremo quindi sommare un punto a un vettore, fare la differenza di due punti e così via.

Dato un sottospazio affine Π, prendiamo un suo punto P_0 e una base del sottospazio vettoriale E parallelo a Π: detta s la dimensione di Π (e, quindi, di E), questa base sarà formata da s vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_s$. I punti di $P_0 + E$ sono allora tutti e soli i punti del tipo

$$P = P_0 + t_1\boldsymbol{e}_1 + t_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_s\boldsymbol{e}_s,$$

al variare di t_1, t_2, ..., t_s in $\mathbb{R}$. L'equazione appena data viene detta **equazione vettoriale parametrica** del sottospazio affine Π. Più esplicitamente se $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\boldsymbol{e}_1 = (m_{11}, m_{21}, \dots, m_{n1})$, $\boldsymbol{e}_2 = (m_{12}, m_{22}, \dots, m_{n2})$, ..., $\boldsymbol{e}_s = (m_{1s}, m_{2s}, \dots, m_{ns})$. Allora un punto $P := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartiene al sottospazio affine Π se e solo se esistono t_1, t_2, ..., t_s in $\mathbb{R}$ tali che

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = a_1 + m_{11}t_1 + m_{12}t_2 + \cdots + m_{1s}t_s \\ x_2 = a_2 + m_{21}t_1 + m_{22}t_2 + \cdots + m_{2s}t_s \\ \vdots \\ x_n = a_n + m_{n1}t_1 + m_{n2}t_2 + \cdots + m_{ns}t_s \end{cases}$$

Queste sono chiamate **equazioni parametriche** del sottospazio affine Π. Ovviamente se prendiamo al posto di P_0 un diverso punto di Π e\o una diversa base di E otterremo una differente parametrizzazione dello stesso sottospazio affine Π.

Descriviamo ora esplicitamente i sottospazi affini di dimensione bassa di $\mathbb{R}^n$. Sia $\Pi = P_0 + E$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo:

- $\dim \Pi = 0$ se e solo se E è formato dal solo vettore nullo. Quindi i sottospazi affini di dimensione 0 sono i punti di $\mathbb{R}^n$.

• $\dim \Pi = 1$ se e solo se $\Pi = \{P_0 + t_1 \boldsymbol{e}_1 \mid t_1 \in \mathbb{R}\}$, dove $\boldsymbol{e}_1 \neq 0$.

I sottospazi affini di dimensione 1 vengono anche chiamati **rette**. Nel caso della geometria del piano $V^2(O)$ e della geometria dello spazio $V^3(O)$ essi sono infatti le usuali rette. Un qualsiasi vettore $\boldsymbol{e}_1$ non nullo che genera E viene chiamato **vettore direttore** della retta r. La stessa retta ha tanti diversi possibili vettori direttori: essi sono tutti multipli uno dell'altro. Le componenti di uno di questi vettori vengono chiamati **parametri direttori** della retta r.

• $\Pi = 2$ se e solo se $\Pi = \{P_0 + t_1 \boldsymbol{e}_1 + t_2 \boldsymbol{e}_2 \mid t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\}$ dove $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono vettori linearmente indipendenti.

I sottospazi affini di dimensione 2 vengono anche chiamati **piani**. Nel caso della geometria dello spazio $V^3(O)$ essi sono infatti gli usuali piani.

Parallelismo di sottospazi affini

Definizione Due sottospazi affini $\Pi = P_0 + E$ e $\Sigma = P_1 + F$ aventi la stessa dimensione si dicono **paralleli** se $E = F$. △

Proposizione *Due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ della stessa dimensione e paralleli tra loro o coincidono o non hanno alcun punto in comune.*

Osservazione Se Π e Σ sono due sottospazi affini paralleli e aventi la stessa dimensione, per stabilire se i due sottospazi affini sono uguali o distinti, basta allora prendere un punto qualsiasi di uno dei due sottospazi affini, diciamo Π, e verificare se tale punto appartiene all'altro sottospazio affine: se la risposta è sì, allora i sottospazi affini coincidono, se la risposta è no, allora i sottospazi affini sono distinti. △

Definizione I sottospazi affini $\Pi = P_0 + E$ e $\Sigma = P_1 + F$ si dicono **paralleli** se $E \subseteq F$ o se $F \subseteq E$. △

Proposizione *Siano Π e Σ sottospazi affini paralleli con $\dim \Pi \leq \dim \Sigma$. Allora $\Pi \subseteq \Sigma$ oppure $\Pi \cap \Sigma = \varnothing$.*

Osservazione Quando utilizziamo il parallelismo tra sottospazi affini di dimensioni diverse occorre fare particolare attenzione. Per esempio, nell'ordinario spazio due rette parallele allo stesso piano non è detto siano parallele fra loro. Analogamente due sottospazi affini Σ e Ω paralleli a uno stesso sottospazio affine Π non è detto siano paralleli fra loro. Questo è invece vero nel caso in cui Σ, Ω e Π abbiano tutti la stessa dimensione. △

Inviluppi affini

Definizione Dati i punti P_0, P_1, …, P_s di $\mathbb{R}^n$, sia F il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, …, $P_s - P_0$. Il sottospazio affine $P_0 + F$ è detto **inviluppo affine** dei punti P_0, P_1, …, P_s. △

Osservazione L'inviluppo affine degli $s+1$ punti P_0, P_1, …, P_s ha dimensione al massimo s. △

Teorema *Dati i punti* P_0, P_1, ..., P_s *di* $\mathbb{R}^n$ *sia* Π *il loro inviluppo affine. Allora*

- Π *contiene tutti i punti* P_0, P_1, ..., P_s*;*
- *se* Σ *è un sottospazio affine contenente i punti* P_0, P_1, ..., P_s *allora* $\Sigma \supseteq \Pi$.

Dicendo che i punti P_0, P_1, ..., P_s sono **allineati** intendiamo dire che esiste una retta che li contiene, cioè, in altri termini, che il loro inviluppo affine ha dimensione minore o uguale a 1. Dicendo che i punti sono **complanari** intendiamo dire che esiste un piano che li contiene, vale a dire che il loro inviluppo affine ha dimensione minore o uguale a 2.

Teorema *Siano dati i punti* P_0, P_1, ..., P_s *di* $\mathbb{R}^n$*. Allora*

- *I punti* P_0, P_1, ..., P_s *sono allineati se e solo se i vettori* $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, ..., $P_s - P_0$ *generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a* 1.
- *I punti* P_0, P_1, ..., P_s *sono complanari se e solo se i vettori* $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, ..., $P_s - P_0$ *generano un sottospazio vettoriale di dimensione minore o uguale a* 2.

Proposizione *Siano* P_0, P_1, ..., P_s *dei punti e sia* r *la dimensione del loro inviluppo affine* Π*. Allora* Π *è l'unico sottospazio affine di dimensione* r *che contiene tutti i punti* P_0, P_1, ..., P_s.

Teorema *Siano* $P_0 := (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *e* $P_1 := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *due punti distinti di* $\mathbb{R}^n$*. Allora esiste una e una sola retta contenente i due punti. Essa ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ \vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t \end{cases}$$

La retta passante ha parametri direttori $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$

Teorema *Siano dati i punti* $P_0 := (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $P_1 := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *e* $P_2 := (c_1, c_2, \dots, c_n)$ *di* $\mathbb{R}^n$*. Se* P_0, P_1 *e* P_2 *non sono allineati allora esiste uno e un solo piano contenente i tre punti. Esso ha equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t + (c_1 - a_1)u \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t + (c_2 - a_2)u \\ \vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t + (c_n - a_n)u \end{cases}$$

Iperpiani

Definizione Un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ è detto **iperpiano**. △

Nella usuale geometria del piano gli iperpiani sono le rette e possono essere rappresentati per mezzo di una equazione cartesiana. Allo stesso modo nella usuale geometria dello spazio gli iperpiani sono i piani e possono essere rappresentati per mezzo di una equazione cartesiana.

Teorema *Sia data un'equazione del tipo:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

con a_1, a_2 …, a_n non tutti nulli. L'insieme dei punti $P := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le cui coordinate verificano tale equazione è un iperpiano.

Viceversa, dato un iperpiano $\Pi = P_0 + E$, esiste un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

*con a_1, a_2 …, a_n non tutti nulli le cui soluzioni sono tutti e soli i punti dell'iperpiano. Tale equazione è detta **equazione cartesiana** dell'iperpiano.*

Osservazione Ogni equazione equivalente all'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ ha le stesse soluzioni ed è quindi un'equazione cartesiana dello stesso iperpiano. Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che le equazioni equivalenti all'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ sono tutte e sole le sue multiple per una costante non nulla, cioè le equazioni del tipo $ka_1x_1 + ka_2x_2 + \cdots + ka_nx_n + kb = 0$ con $k \neq 0$. Dunque l'equazione cartesiana di iperpiano può essere scelta in infiniti modi. △

Teorema *Siano dati gli iperpiani $\Pi\colon a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0$ e $\Sigma\colon a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0$ di $\mathbb{R}^n$. Gli iperpiani Π e Σ sono paralleli se e solo se*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix} = 1.$$

I due iperpiani coincidono se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Osservazione Siano dati $\Pi\colon a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0$ e $\Sigma\colon a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0$ iperpiani non paralleli di $\mathbb{R}^n$. La loro intersezione è data dall'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \end{cases}$$

Grazie al teorema precedente, la matrice di questo sistema ha rango 2: pertanto, qualunque siano i termini noti il sistema è risolubile e l'insieme delle sue soluzioni dipende da $n-2$ parametri, cioè è un sottospazio affine di dimensione $n-2$. △

Ortogonalità

Teorema *Se* Π *è un iperpiano di* $\mathbb{R}^n$ *di equazione cartesiana*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0,$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} := (a_1, \ldots, a_n)$ *è ortogonale a ogni vettore appartenente al sottospazio vettoriale* E *parallelo a* Π. *Viceversa un vettore che sia ortogonale a ogni vettore di* E *è un multiplo di* $\boldsymbol{v}$.

Per questa ragione il vettore $\boldsymbol{v}$ *viene detto vettore* ***ortogonale*** *al sottospazio affine.*

Definizione Una retta e un iperpiano si dicono **ortogonali** se un vettore direttore della retta è ortogonale all'iperpiano. △

Proposizione *Tutte le rette ortogonali a un medesimo iperpiano* Π *sono parallele fra loro. Per ogni punto* P *esiste un'unica retta passante per* P *e ortogonale all'iperpiano* Π.

Insiemi convessi e semispazi

Definizione Dati due punti P_0 e P_1 distinti di $\mathbb{R}^n$, il **segmento aperto** di estremi P_0 e P_1 è l'insieme dei punti $\{P := P_0 + t(P_1 - P_0) \mid 0 < t < 1\}$. Chiamiamo invece **segmento chiuso** di estremi P_0 e P_1 l'insieme dei punti $\{P = P_0 + t(P_1 - P_0) \mid 0 \le t \le 1\}$. Più esplicitamente, se $P_0 := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $P_1 := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i punti del segmento aperto di estremi P_0 e P_1 sono allora quelli di coordinate

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ \vdots \\ x_n = a_n + (b_n - a_n)t \end{cases}$$

che si ottengono per $0 < t < 1$, mentre i punti del segmento chiuso si ottengono per $0 \le t \le 1$. △

Osservazione Il segmento chiuso di estremi P_0 e P_1 è formato dai punti del segmento aperto e dagli estremi P_0 e P_1. △

Definizione Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se, dati comunque P_0 e P_1 in C, si ha che ogni punto del segmento aperto di estremi P_0 e P_1 appartiene a C. △

Teorema *Sia* Π *un iperpiano di* $\mathbb{R}^n$ *di equazione cartesiana*

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n + b = 0.$$

Allora i due sottoinsiemi

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b > 0\}$$

e

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b < 0\}$$

sono sottoinsiemi convessi detti ***semispazi*** *delimitati da* Π*. Inoltre se* P_0 *e* P_1 *sono punti di* $\mathbb{R}^n$ *che stanno su semispazi delimitati da* Π *diversi, il segmento di estremi* P_0 *e* P_1 *interseca l'iperpiano* Π *in un punto.*

40.9 Esercizi

E.40.1 Per ognuna delle seguenti coppie di punti di $\mathbb{R}^4$, determinare le equazioni parametriche della retta passante per i due punti e verificare se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

a. $A := (1, 1, 1, 1)$ e $B := (-2, -2, -2, -2)$;

b. $C := (1, 2, 1, 2)$ e $D := (2, 2, 2, 2)$.

E.40.2 Siano dati in $\mathbb{R}^5$ i tre punti $P_0 := (1, 0, 0, 0, 0)$, $P_1 := (0, 0, 1, 0, 0)$ e $P_2 := (0, 0, 0, 0, 1)$. Verificare che non sono allineati e determinare le equazioni parametriche del piano Π che li contiene. Successivamente stabilire se il punto $P_3 := (1, 1, 1, 1, 1)$ appartiene al piano Π e se il piano è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

E.40.3 Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi affini Π e Σ di equazioni parametriche

$$\Pi\colon \begin{cases} x_1 = 1 - 2t - u \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = 2 + 2t - u \\ x_4 = 1 + 3t + 2u \end{cases}$$

e

$$\Sigma\colon \begin{cases} x_1 = 3 - t + 2u \\ x_2 = 2 + t - 2u \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = 2 + 3t - 2u \end{cases}$$

Stabilire se i due sottospazi affini sono paralleli.

E.40.4 Dati i sottospazi affini Π e Σ dell'esercizio E.40.3 stabilire quante rette parallele sia a Π che a Σ e passanti per il punto $P := (1, 3, 1, 2)$ esistono. Determinare le equazioni parametriche per ciascuna di tali rette.

E.40.5 Dati i sottospazi affini Π e Σ dell'esercizio E.40.3 stabilire quanti iperpiani paralleli sia a Π che a Σ e passanti per il punto $Q := (2, 1, 2, 2)$ esistono. Determinare le equazioni parametriche per ciascuno di tali iperpiani.

E.40.6

a. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Π di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(1, 2, 1, 2)$ e ortogonale al vettore $(1, 2, 1, 2)$.

b. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(2, 4, 2, 4)$ e ortogonale al vettore $(2, 4, 2, 4)$.

c. Stabilire se i due iperpiani sono paralleli non coincidenti, paralleli coincidenti o incidenti. Se i due iperpiani sono incidenti, determinare le equazioni parametriche del piano loro intersezione.

E.40.7 Dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A \coloneqq (1,0,0,0)$, $B \coloneqq (1,1,0,0)$, $C \coloneqq (1,1,1,0)$ e $D \coloneqq (1,1,1,1)$, verificare che non sono complanari e determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana dell'iperpiano passante per essi. Stabilire inoltre se l'iperpiano è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

E.40.8

a. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Π di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(1,2,1,2)$ e ortogonale al vettore $(1,1,1,1)$.

b. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(1,-1,1,5)$ e ortogonale al vettore $(2,2,2,2)$.

c. Stabilire se gli iperpiani Π e Σ sono paralleli non coincidenti, paralleli coincidenti o incidenti. Se i due iperpiani sono incidenti, determinare le equazioni parametriche del piano loro intersezione.

E.40.9

a. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Π di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(0,0,0,0)$ e ortogonale al vettore $(1,1,1,1)$.

b. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ di $\mathbb{R}^4$ passante per il punto $(1,1,1,1)$ e ortogonale al vettore $(1,0,1,0)$.

c. Stabilire se i due iperpiani sono paralleli non coincidenti, paralleli coincidenti o incidenti. Se i due iperpiani sono incidenti, determinare le equazioni parametriche del piano loro intersezione.

E.40.10 Dati i punti $P_0 \coloneqq (0,0,0,0,0,0)$ e $P_1 \coloneqq (1,2,3,4,5,6)$, verificare quali dei seguenti punti appartengono al segmento di estremi P_0 e P_1.

a. $A \coloneqq (2,3,4,5,6,7)$; b. $B \coloneqq (2,4,6,8,10,12)$; c. $C \coloneqq \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\right)$.

E.40.11 Dati i punti $P_0 \coloneqq (1,1,1,1,1,1)$ e $P_1 \coloneqq (1,2,3,4,5,6)$, verificare quali dei seguenti punti appartengono al segmento di estremi P_0 e P_1.

a. $A \coloneqq (2,3,4,5,6,7)$; b. $B \coloneqq (2,4,6,8,10,12)$; c. $C \coloneqq \left(1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right)$.

E.40.12 Sia Π l'iperpiano di $\mathbb{R}^5$ contenente i punti $P_1 \coloneqq (1,0,0,0,0)$, $P_2 \coloneqq (1,1,0,0,0)$, $P_3 \coloneqq (1,1,1,0,0)$, $P_4 \coloneqq (1,1,1,1,0)$ e $P_5 \coloneqq (1,1,1,1,1)$. Determinare il semispazio che contiene il punto $(2,0,1,0,1)$ e che è delimitato dall'iperpiano Π.

E.40.13 Dato l'iperpiano Π di $\mathbb{R}^6$ di equazione

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 + 3 = 0,$$

e i punti $A \coloneqq (1,1,0,0,0,0)$, $B \coloneqq (0,0,1,1,0,0)$ e $C \coloneqq (0,0,0,0,1,1)$, determinare se il segmento di estremi A e B, il segmento di estremi A e C e il segmento di estremi B e C intersecano l'iperpiano.

40.10 Soluzioni degli esercizi

E.40.1

a. La retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (-2-1)t \\ x_2 = 1 + (-2-1)t \\ x_3 = 1 + (-2-1)t \\ x_4 = 1 + (-2-1)t \end{cases}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3t \\ x_2 = 1 - 3t \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = 1 - 3t \end{cases}$$

Poiché un sottospazio affine è un sottospazio vettoriale se e solo se contiene il vettore nullo consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 3t \\ 0 = 1 - 3t \\ 0 = 1 - 3t \\ 0 = 1 - 3t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = \frac{1}{3}$: dunque la retta passa per l'origine ed è pertanto un sottospazio vettoriale.

b. La retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (2-1)t \\ x_2 = 2 + (2-2)t \\ x_3 = 1 + (2-1)t \\ x_4 = 2 + (2-2)t \end{cases}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

Come prima consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 2 \\ 0 = 1 + t \\ 0 = 2 \end{cases}.$$

Questo sistema non ha soluzione: dunque la retta non passa per l'origine e non è pertanto un sottospazio vettoriale.

E.40.2 I vettori differenza $(0,0,1,0,0) - (1,0,0,0,0) = (-1,0,1,0,0)$ e $(0,0,0,0,1) - (1,0,0,0,0) = (-1,0,0,0,1)$ non sono linearmente dipendenti e, dunque, per il teorema 40.16 i tre punti non sono allineati. Il piano Π passante per essi ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (0-1)t_1 + (0-1)t_2 \\ x_2 = 0 + (0-0)t_1 + (0-0)t_2 \\ x_3 = 0 + (1-0)t_1 + (0-0)t_2 \\ x_4 = 0 + (0-0)t_1 + (0-0)t_2 \\ x_5 = 0 + (0-0)t_1 + (0-1)t_2 \end{cases}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \phantom{1 -{}} t_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = - t_2 \end{cases}$$

Poiché il sistema

$$\begin{cases} 1 = 1 - t_1 - t_2 \\ 1 = 0 \\ 1 = \phantom{1 -{}} t_1 \\ 1 = 0 \\ 1 = - t_2 \end{cases}$$

non ha soluzione il punto $(1, 1, 1, 1, 1)$ non appartiene al piano Π.

Anche il sistema

$$\begin{cases} 0 = 1 - t_1 - t_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \phantom{1 -{}} t_1 \\ 0 = 0 \\ 0 = - t_2 \end{cases}$$

non ha soluzione: dunque il punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ non appartiene al piano Π che non è, quindi, un sottospazio vettoriale.

E.40.3 Il sottospazio vettoriale E parallelo a Π ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $(-2, 3, 2, 3)$ e $(-1, 0, -1, 2)$; il sottospazio vettoriale F parallelo a Σ ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $(-1, 1, 0, 3)$ e $(2, -2, -1, -2)$. Consideriamo allora la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

le cui colonne danno le componenti rispetto alla base canonica di un sistema di generatori per $E + F$. Svolgendo i calcoli si trova che questa matrice ha rango 3. Ciò significa che $E + F$ ha dimensione 3, e, dunque, E ed F sono diversi (altrimenti $E + F$ avrebbe dimensione 2). Pertanto i due sottospazi affini non sono paralleli.

E.40.4 Usiamo la notazione utilizzata nella soluzione dell'esercizio E.40.3.

Le rette cercate sono del tipo $P + G$ con G sottospazio vettoriale di dimensione 1. Affinché una di queste rette sia parallela sia a Π che a Σ per definizione di parallelismo deve essere $G \subseteq E$ e $G \subseteq F$ (notiamo che poiché i due sottospazi affini hanno dimensione 2 mentre una retta ha dimensione 1 non può essere $E \subseteq G$ o $F \subseteq G$). Pertanto $G \subseteq E \cap F$. Dalla soluzione dell'esercizio E.40.3 sappiamo che $\dim(E + F) = 3$, quindi per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(E \cap F)) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Questo significa che G deve essere esattamente $E \cap F$. In altri termini le rette parallele sia a Π che a Σ sono tutte parallele fra loro e ne esiste esattamente una che passa per il punto P. Dobbiamo allora determinare l'intersezione di E con F. Un generico vettore di E può scriversi come

$$h_1(-2,3,2,3) + h_2(-1,0,-1,2) = (-2h_1 - h_2, 3h_1, 2h_1 - h_2, 3h_1 + 2h_2)$$

mentre un generico vettore di F può scriversi come

$$k_1(-1,1,0,3) + k_2(2,-2,-1,-2) = (-k_1 + 2k_2, k_1 - 2k_2, -k_2, 3k_1 - 2k_2).$$

Un vettore appartiene all'intersezione se può allora scriversi sia in un modo che nell'altro. Uguagliando queste due espressioni otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -2h_1 - h_2 = -k_1 + 2k_2 \\ 3h_1 = k_1 - 2k_2 \\ 2h_1 - h_2 = -k_2 \\ 3h_1 + 2h_2 = 3k_1 - 2k_2 \end{cases}$$

Questo sistema si risolve facilmente:

$$\begin{cases} h_1 = -t \\ h_2 = -t \\ h_3 = -t \\ h_4 = t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Sapevamo già che la dimensione di $E \cap F$ è 1: come ci aspettavamo le soluzioni dipendono da un parametro. Prendiamo allora una qualsiasi soluzione non banale di questo sistema (ad esempio ponendo $t = 1$). Possiamo allora sostituire i valori $h_1 = -1$ e $h_2 = -1$ nell'espressione del generico vettore di E e otteniamo il vettore $(3,-3,-1,-5)$. Avremmo ottenuto ovviamente lo stesso vettore sostituendo i valori $k_1 = -1$ e $k_2 = -1$ nell'espressione del generico vettore di F. Possiamo allora scrivere le equazioni parametriche della retta cercata:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3t \\ x_2 = 3 - 3t \\ x_3 = 1 - t \\ x_4 = 2 - 5t \end{cases}$$

E.40.5 Usiamo la notazione utilizzata nella soluzione dell'esercizio E.40.3.

Gli iperpiani cercati sono del tipo $P + H$ con H sottospazio vettoriale di dimensione 3. Affinché uno di questi iperpiani sia parallelo sia a Π che a Σ per definizione di parallelismo deve essere $H \supseteq E$ e $H \supseteq F$ (notiamo che poiché i due sottospazi affini hanno dimensione 2 mentre un iperpiano ha dimensione 3 non può essere $E \supseteq H$ o $F \supseteq H$). Pertanto $F \supseteq E + F$. Dalla soluzione dell'esercizio E.40.3 sappiamo che $\dim(E + F) = 3$, quindi H deve essere esattamente $E + F$. In altri termini gli iperpiani paralleli sia a Π che a Σ sono tutti paralleli fra loro e ne esiste esattamente uno che passa per il punto Q. Dobbiamo allora trovare una base per $E + F$. Sappiamo che i vettori $(-2,3,2,3)$, $(-1,0,-1,2)$, $(-1,1,0,3)$ e $(2,-2,-1,-2)$ generano $E + F$. Sappiamo che i primi due formano una base per E. Consideriamo ora il vettore $(-1,1,0,3)$: esso appartiene a F ma non a E, infatti altrimenti esso dovrebbe appartenere all'intersezione $E \cap F$ e dovrebbe essere multiplo di $(3,-3,-1,-5)$. Dunque il sottospazio di $E + F$ generato dai vettori $(-2,3,2,3)$, $(-1,0,-1,2)$, $(-1,1,0,3)$ contiene strettamente E. Poiché $\dim E = 2$ e $\dim(E + F) = 3$ i tre vettori $(-2,3,2,3)$, $(-1,0,-1,2)$,

$(-1, 1, 0, 3)$ generano $E+F$, anzi ne sono una base. Abbiamo così trovato una base per il sottospazio vettoriale parallelo all'iperpiano cercato. Possiamo scrivere le equazioni parametriche di questo iperpiano:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t_1 - t_2 - t_3 \\ x_2 = 1 + 3t_1 \phantom{{}- 2t_2} + t_3 \\ x_3 = 2 + 2t_1 - t_2 \\ x_4 = 2 + 3t_1 + 2t_2 + 3t_3 \end{cases}$$

E.40.6

a. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(1, 2, 1, 2)$ ha equazione cartesiana del tipo $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + b = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $(1, 2, 1, 2)$ otteniamo la condizione $1+2\cdot 2+1+2\cdot 2+b = 0$ da cui otteniamo $b = -10$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 10 = 0$.

b. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(2, 4, 2, 4)$ ha equazione cartesiana del tipo $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + b = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $(2, 4, 2, 4)$ otteniamo la condizione $2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + b = 0$ da cui otteniamo $b = -40$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 40 = 0$.

c. Mettendo a sistema le equazioni dei due iperpiani otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 10 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 40 = 0 \end{cases}$$

Poiché questo sistema non è risolubile, i due iperpiani sono paralleli e distinti.

E.40.7 I tre vettori $(1, 1, 0, 0) - (1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0) - (1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti. Grazie al teorema 40.16 i punti non sono dunque complanari. Le equazioni parametriche dell'iperpiano che li contiene sono:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (1-1)t_1 + (1-1)t_2 + (1-1)t_3 \\ x_2 = 0 + (1-0)t_1 + (1-0)t_2 + (1-0)t_3 \\ x_3 = 0 + (0-0)t_1 + (1-0)t_2 + (1-0)t_3 \\ x_4 = 0 + (0-0)t_1 + (0-0)t_2 + (1-0)t_3 \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \phantom{1 + {}} t_1 + t_2 + t_3 \\ x_3 = \phantom{1 + t_1 + {}} t_2 + t_3 \\ x_4 = \phantom{1 + t_1 + t_2 + {}} t_3 \end{cases}$$

Consideriamo ora la generica equazione cartesiana di un iperpiano:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti assegnati otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 \phantom{{}+ a_2 + a_3 + a_4} + b = 0 \\ a_1 + a_2 \phantom{{}+ a_3 + a_4} + b = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 \phantom{{}+ a_4} + b = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova che l'iperpiano ha equazione cartesiana $x - 1 = 0$. Poiché l'iperpiano è dato come insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non è un sottospazio vettoriale.

E.40.8

a. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(1,1,1,1)$ ha equazione cartesiana del tipo $x_1+x_2+x_3+x_4+b=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(1,2,1,2)$ otteniamo la condizione $1+2+1+2+b=0$ da cui otteniamo $b=-6$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $x_1+x_2+x_3+x_4-6=0$.

b. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(2,2,2,2)$ ha equazione cartesiana del tipo $2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+b=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(1,-1,1,5)$ otteniamo la condizione $2\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot 1+2\cdot 5+b=0$ da cui otteniamo $b=-12$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $2x_1+2x_2+2x_3+2x_4-12=0$.

c. Mettendo a sistema le equazioni dei due iperpiani otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 12 = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono equivalenti: i due iperpiani sono coincidenti.

E.40.9

a. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(1,1,1,1)$ ha equazione cartesiana del tipo $x_1+x_2+x_3+x_4+b=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(0,0,0,0)$ otteniamo la condizione $0+0+0+0+0=0$ da cui otteniamo $b=0$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

b. Il generico iperpiano ortogonale al vettore $(1,0,1,0)$ ha equazione cartesiana del tipo $x_1+x_3+b=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(1,1,1,1)$ otteniamo la condizione $1+1+b=0$ da cui otteniamo $b=-2$. L'iperpiano ha dunque equazione cartesiana $x_1+x_3-2=0$.

c. Mettendo a sistema le equazioni dei due iperpiani otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}-2} = 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 \phantom{{}+x_4} - 2 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è risolubile e le due equazioni che lo compongono non sono equivalenti: dunque i due iperpiani sono incidenti. Risolvendo il sistema otteniamo le equazioni parametriche del piano loro intersezione:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - t_1 \\ x_2 = -2 - t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

E.40.10 I punti del segmento aperto di estremi P_1 e P_2 sono tutti e soli i punti $P := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ di $\mathbb{R}^6$ del tipo

$$\begin{cases} x_1 = 0 + (1-0)t \\ x_2 = 0 + (2-0)t \\ x_3 = 0 + (3-0)t \\ x_4 = 0 + (4-0)t \\ x_5 = 0 + (5-0)t \\ x_6 = 0 + (6-0)t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$, vale a dire

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 4t \\ x_5 = 5t \\ x_6 = 6t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$.

Per verificare se il punto A appartiene al segmento risolviamo il sistema nell'incognita t:

$$\begin{cases} 2 = t \\ 3 = 2t \\ 4 = 3t \\ 5 = 4t \\ 6 = 5t \\ 7 = 6t \end{cases}$$

Poiché questo sistema non ha soluzione, il punto A non appartiene al segmento (il fatto che il sistema non abbia soluzione significa che il punto A non appartiene alla retta passante per P_1 e P_2: a maggior ragione non appartiene al segmento di estremi P_1 e P_2).

Analogamente per il punto B consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = t \\ 4 = 2t \\ 6 = 3t \\ 8 = 4t \\ 10 = 5t \\ 12 = 6t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = 2$. Poiché questo valore non è compreso tra 0 e 1, il punto B non appartiene al segmento (il fatto che il sistema abbia soluzione significa che il punto B appartiene alla retta passante per P_1 e P_2).

Infine, per quanto riguarda il punto C consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = t \\ 1 = 2t \\ \dfrac{3}{2} = 3t \\ 2 = 4t \\ \dfrac{5}{2} = 5t \\ 3 = 6t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = \frac{1}{2}$. Poiché questo valore è compreso tra 0 e 1, il punto C appartiene al segmento.

E.40.11 I punti del segmento aperto di estremi P_1 e P_2 sono tutti e soli i punti $P := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ di $\mathbb{R}^6$ del tipo

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (1-1)t \\ x_2 = 1 + (2-1)t \\ x_3 = 1 + (3-1)t \\ x_4 = 1 + (4-1)t \\ x_5 = 1 + (5-1)t \\ x_6 = 1 + (6-1)t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$, vale a dire

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 1 + 2t \\ x_4 = 1 + 3t \\ x_5 = 1 + 4t \\ x_6 = 1 + 5t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$.

Per verificare se il punto A appartiene al segmento risolviamo il sistema nell'incognita t:

$$\begin{cases} 2 = 1 \\ 3 = 1 + t \\ 4 = 1 + 2t \\ 5 = 1 + 3t \\ 6 = 1 + 4t \\ 7 = 1 + 5t \end{cases}$$

Poiché questo sistema non ha soluzione, il punto A non appartiene alla retta passante per P_1 e P_2 e a maggior ragione non appartiene al segmento di estremi P_1 e P_2.

Analogamente per il punto B consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = 1 \\ 4 = 1 + t \\ 6 = 1 + 2t \\ 8 = 1 + 3t \\ 10 = 1 + 4t \\ 12 = 1 + 5t \end{cases}$$

Anche questo sistema non ha soluzione e, quindi, il punto B non appartiene al segmento.

Infine, per quanto riguarda il punto C consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ \dfrac{3}{2} = 1 + t \\ 2 = 1 + 2t \\ \dfrac{5}{2} = 1 + 3t \\ 3 = 1 + 4t \\ \dfrac{7}{2} = 1 + 5t \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $t = \frac{1}{2}$. Poiché questo valore è compreso tra 0 e 1, il punto C appartiene al segmento.

E.40.12 Il generico iperpiano di $\mathbb{R}^5$ ha equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + b = 0$. Imponendo il passaggio per i punti assegnati otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a_1 & & & & & + b = 0 \\ a_1 & + a_2 & & & & + b = 0 \\ a_1 & + a_2 & + a_3 & & & + b = 0 \\ a_1 & + a_2 & + a_3 & + a_4 & & + b = 0 \\ a_1 & + a_2 & + a_3 & + a_4 & + a_5 & + b = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo che l'iperpiano ha equazione cartesiana $x_1 - 1 = 0$. I due semispazi da esso delimitati hanno disequazioni $x_1 - 1 > 0$ e $x_1 - 1 < 0$. Poiché $2 - 1 > 0$ il punto $(2, 0, 1, 0, 1)$ appartiene al semispazio $x_1 - 1 > 0$.

E.40.13 Sostituendo le coordinate di A, B e C nel polinomio $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 + 3$ otteniamo $2 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 0 + 0 - 5 \cdot 0 + 0 + 3 > 0$, $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 1 + 1 - 5 \cdot 0 + 0 + 3 > 0$ e $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 + 0 - 5 \cdot 1 + 1 + 3 < 0$. Dunque A e B appartengono a uno dei due semispazi delimitati da Π e C all'altro. Pertanto il segmento di estremi A e B non interseca l'iperpiano Π, mentre sia il segmento di estremi A e C che il segmento di estremi B e C intersecano i'iperpiano.

APPENDICE A

Approfondimenti

A.1 Equazioni lineari e numeri

Proposizione *Se in un sistema S sommiamo a una equazione un'altra equazione del sistema moltiplicata per una costante, otteniamo un sistema S' con le stesse soluzioni di S.*

DIMOSTRAZIONE Consideriamo il sistema

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Sommiamo ora a un'equazione un'altra moltiplicata per un numero. Per semplicità supponiamo di sommare alla prima equazione la seconda moltiplicata per k. Otteniamo così il sistema:

$$S'\colon \begin{cases} (a_{11} + ka_{21})x_1 + (a_{12} + ka_{22})x_2 + \cdots + (a_{1q} + ka_{2q})x_q = b_1 + kb_2 \\ \qquad a_{21}x_1 + \qquad a_{22}x_2 + \cdots + \qquad a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ \qquad a_{p1}x_1 + \qquad a_{p2}x_2 + \cdots + \qquad a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Sia ora $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ una soluzione di S: per mostrare che è soluzione di S' dobbiamo provare che soddisfa tutte le equazioni di S'. Poiché tutte le equazioni diverse dalla prima sono rimaste invariate nel passaggio da S a S', tali equazioni sono ovviamente soddisfatte da $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$. Sostituiamo tali valori nel primo membro della prima equazione di S':

$$\begin{aligned} &(a_{11} + ka_{21})\bar{x}_1 + (a_{12} + ka_{22})\bar{x}_2 + \cdots + (a_{1q} + ka_{2q})\bar{x}_q \\ =&a_{11}\bar{x}_1 + ka_{21}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + ka_{22}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1q}\bar{x}_q + ka_{2q}\bar{x}_q \\ =&a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1q}\bar{x}_q + k(a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \cdots + a_{2q}\bar{x}_q) \\ =&b_1 + kb_2 \end{aligned}$$

e, dunque $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ soddisfa anche la prima equazione di S'. Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ soddisfa la prima e la seconda equazione di S, e dunque, $a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1q}\bar{x}_q = b_1$ e $a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \cdots + a_{2q}\bar{x}_q = b_2$.

Pertanto ogni soluzione di S è anche soluzione di S'. Per mostrare che ogni soluzione di S' è anche soluzione di S: notiamo che si passa da S' a S con un passaggio dello stesso tipo: basta sommare alla prima equazione di S' la seconda moltiplicata per $-k$. ■

Proposizione *Se in un sistema S moltiplichiamo un'equazione per una costante non nulla, otteniamo un sistema S' con le stesse soluzioni di S.*

Dimostrazione Consideriamo il sistema

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Moltiplichiamo ora un'equazione (possiamo supporre per semplicità che sia la prima) per una costante non nulla k. Otteniamo così il sistema:

$$S'\colon \begin{cases} ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \cdots + ka_{1q}x_q = kb_1 \\ \ \ a_{21}x_1 + \ \ a_{22}x_2 + \cdots + \ \ a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ \ \ a_{p1}x_1 + \ \ a_{p2}x_2 + \cdots + \ \ a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Sia ora $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ una soluzione di S: per mostrare che è soluzione di S' dobbiamo provare che soddisfa tutte le equazioni di S'. Poiché tutte le equazioni diverse dalla prima sono rimaste invariate nel passaggio da S a S', tali equazioni sono ovviamente soddisfatte da $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$. Sostituiamo tali valori nel primo membro della prima equazione di S':

$$ka_{11}\bar{x}_1 + ka_{12}\bar{x}_2 + \cdots + ka_{1q}\bar{x}_q = k(a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1q}\bar{x}_q)kb_1. \quad \text{(A.1)}$$

e, dunque $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ soddisfa anche la prima equazione di S'. Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$ soddisfa la prima equazione di S, e dunque, $a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1q}\bar{x}_q = b_1$.

Pertanto ogni soluzione di S è anche soluzione di S'. Per mostrare che ogni soluzione di S' è anche soluzione di S: notiamo che si passa da S' a S con un passaggio dello stesso tipo: basta moltiplicare la prima equazione di S' per $\frac{1}{k}$.■

A.4 Moltiplicazione tra matrici

Proposizione *Date tre matrici* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *e* $C \in \mathrm{M}(r, s, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(AB)C = A(BC).$$

Dimostrazione Siano $A := (a_{ij})$, $B := (b_{jk})$, $C := (C_{kl})$. Abbiamo già osservato che la matrice $(AB)C$ e la matrice $A(BC)$ sono entrambe di tipo (p, s). Dobbiamo allora mostrare che l'elemento di posto (i, l) nella matrice $(AB)C$ (chiamiamo m_{il} tale elemento) e l'elemento di posto (i, l) nella matrice $A(BC)$ (chiamiamo n_{il} tale elemento) coincidono per ogni i e l.

Chiamiamo D la matrice AB e indichiamo con d_{ik} il suo generico elemento e chiamiamo E la matrice BC e indichiamo con e_{jl} il suo generico elemento.

Per calcolare m_{il} dobbiamo fare il prodotto della i-esima riga di AB per la l-esima colonna di C. Poiché abbiamo chiamato d_{ik} il generico elemento della matrice AB otteniamo allora

$$m_{il} = d_{i1}c_{1l} + \cdots + d_{ik}c_{kl} + \cdots + d_{ir}c_{rl}.$$

Consideriamo il singolo addendo $d_{ik}c_{kl}$. L'elemento d_{ik} si ottiene come prodotto della i-esima riga di A per la k-esima riga di B:

$$d_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{ij}b_{jk} + \cdots + a_{iq}b_{qk}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} d_{ik}c_{kl} = (a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{ij}b_{jk} + \cdots + a_{iq}b_{qk})c_{kl} \\ = a_{i1}b_{1k}c_{kl} + \cdots + a_{ij}b_{jk}c_{kl} + \cdots + a_{iq}b_{qk}c_{kl}. \end{aligned}$$

Dunque ciascun prodotto $d_{ik}c_{kl}$ è la somma dei prodotti del tipo $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ al variare di j tra 1 e q. Per ottenere m_{il} dobbiamo sommare fra loro tutte queste somme al variare di k tra 1 e r. Dunque m_{il} è la somma di tutti i prodotti del tipo $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ al variare di j tra 1 e q e di k tra 1 e r.

Per calcolare ora n_{il} dobbiamo fare il prodotto della i-esima riga di A per la l-esima colonna di BC. Poiché abbiamo chiamato e_{jl} il generico elemento della matrice BC otteniamo allora

$$n_{il} = a_{i1}e_{1l} + \cdots + a_{ij}e_{jl} + \cdots + a_{iq}e_{ql}.$$

Consideriamo il singolo addendo $a_{ij}e_{jl}$. L'elemento e_{jl} si ottiene come prodotto della j-esima riga di B per la l-esima riga di C:

$$e_{jl} = b_{j1}c_{1l} + \cdots + b_{jk}c_{kl} + \cdots + b_{jr}c_{rl}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} a_{ij}e_{jl} = a_{ij}(b_{j1}c_{1l} + \cdots + b_{jk}c_{kl} + \cdots + b_{jr}c_{rl}) \\ = a_{ij}b_{j1}c_{1l} + \cdots + a_{ij}b_{jk}c_{kl} + \cdots + a_{ij}b_{jr}c_{rl}. \end{aligned}$$

Dunque ciascun prodotto $a_{ij}e_{jl}$ è la somma dei prodotti del tipo $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ al variare di k tra 1 e r. Per ottenere n_{il} dobbiamo sommare fra loro tutte queste somme al variare di j tra 1 e q. Dunque n_{il} è la somma di tutti i prodotti del tipo $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ al variare di j tra 1 e q e di k tra 1 e r e, pertanto, coincide con m_{il}. ■

Proposizione

1. *Date* A *e* B *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *e* C *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(A + B)C = AC + BC.$$

2. *Data* A *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *e* B *e* C *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Dimostrazione Dimostriamo la prima delle due proprietà: la seconda è analoga.

Siano $A \coloneqq \big(a_{ij}\big)$, $B \coloneqq \big(b_{ij}\big)$, $C \coloneqq (C_{jk})$. L'elemento di posto (i, k) di $(A + B)C$ (indichiamo con m_{ik} tale elemento) è dato dal prodotto della i-esima riga di $A + B$ per la k-esima colonna di C. Gli elementi sulla i-esima riga di $A + B$ sono dati dalla somma dei corrispondenti elementi di A e B. Dunque:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= (a_{i1} + b_{i1})c_{1k} + \cdots + (a_{ij} + b_{ij})c_{jk} + \cdots + (a_{iq} + b_{iq})c_{qk} \\ &= a_{i1}c_{1k} + b_{i1}c_{1k} + \cdots + a_{ij}c_{jk} + b_{ij}c_{jk} + \cdots + a_{iq}c_{qk} + b_{iq}c_{qk}. \end{aligned}$$

L'elemento di posto (i, k) di $AC + BC$ (indichiamo con n_{ik} tale elemento) è dato dalla somma dell'elemento di posto (i, k) di AC e dell'elemento di posto (i, k) di BC. L'elemento di posto (i, k) di AC è dato dal prodotto della i-esima riga di A per la k-esima colonna di C ed è quindi uguale a

$$a_{i1}c_{1k} + \cdots + a_{ij}c_{jk} + \cdots + a_{iq}c_{qk}.$$

Analogamente l'elemento di posto (i, k) di BC è uguale a

$$b_{i1}c_{1k} + \cdots + b_{ij}c_{jk} + \cdots + b_{iq}c_{qk}.$$

Sommando queste due espressioni otteniamo allora

$$n_{ik} = a_{i1}c_{1k} + \cdots + a_{ij}c_{jk} + \cdots + a_{iq}c_{qk} + b_{i1}c_{1k} + \cdots + b_{ij}c_{jk} + \cdots + b_{iq}c_{qk}.$$

Pertanto $m_{ik} = n_{ik}$. ■

A.5 Determinanti

Teorema *Sia* $A := (a_{ij})$ *una matrice quadrata di ordine* n. *Per ogni intero* $\bar{\imath}$ *compreso tra* 1 *e* n *si ha:*

$$\det A = (-1)^{\bar{\imath}+1} a_{\bar{\imath}1} \det A_{\bar{\imath}1} + (-1)^{\bar{\imath}+2} a_{\bar{\imath}2} \det A_{\bar{\imath}2} + \cdots + (-1)^{\bar{\imath}+n} a_{\bar{\imath}n} \det A_{\bar{\imath}n}.$$

Per ogni intero $\bar{\jmath}$ *compreso tra* 1 *e* n *si ha:*

$$\det A = (-1)^{1+\bar{\jmath}} a_{1\bar{\jmath}} \det A_{1\bar{\jmath}} + (-1)^{2+\bar{\jmath}} a_{2\bar{\jmath}} \det A_{2\bar{\jmath}} + \cdots + (-1)^{n+\bar{\jmath}} a_{n\bar{\jmath}} \det A_{n\bar{\jmath}}.$$

Dimostrazione Abbiamo usato nell'enunciato i simboli $\bar{\imath}$ e $\bar{\jmath}$ invece di i e j per non confonderli con due indici che introdurremo nel corso della dimostrazione. In questo modo inoltre enfatizziamo il fatto che $\bar{\imath}$ e $\bar{\jmath}$ sono sì arbitrari, ma fissati.

Dimostriamo per induzione sull'ordine n della matrice che lo sviluppo secondo una qualsiasi riga è uguale allo sviluppo secondo qualsiasi colonna: ciò significa che sviluppando rispetto a una qualsiasi riga o qualsiasi colonna si ottiene sempre il medesimo risultato, cioè $\det A$ che, per definizione, è dato dallo sviluppo rispetto alla prima riga.

Il passo iniziale è $n = 2$. In tal caso $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Sviluppando rispetto alla prima riga otteniamo, come già sappiamo, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Sviluppando rispetto alla seconda riga otteniamo $-a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22}$. Poiché $\det A_{21} = a_{12}$ e $\det A_{22} = a_{11}$ otteniamo $-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$. Sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo $a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21}$. Poiché $\det A_{11} = a_{22}$ e $\det A_{21} = a_{12}$ otteniamo $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Sviluppando rispetto alla seconda colonna otteniamo $-a_{12} \det A_{12} + a_{22} \det A_{22}$. Poiché $\det A_{12} = a_{21}$ e $\det A_{22} = a_{11}$ otteniamo $-a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$. Abbiamo ottenuto sempre lo stesso risultato: dunque il caso $n = 2$ è provato.

Consideriamo ora il caso $n > 2$. Usiamo il simbolo $A_{\bar{\imath}i\bar{\jmath}j}$ per indicare la matrice di ordine $n-2$ che si ottiene da A eliminando le righe $\bar{\imath}$-esima e i-esima (ovviamente supponiamo che $\bar{\imath} \neq i$) e le colonne $\bar{\jmath}$-esima e j-esima (ovviamente supponiamo che $j_1 \neq j_2$).

Dobbiamo mostrare che sviluppando rispetto a una qualsiasi riga $\bar{\imath}$-esima e rispetto a una qualsiasi colonna $\bar{\jmath}$-esima otteniamo lo stesso risultato. Scriviamo tali sviluppi nella forma di sommatorie

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{\bar{\imath}+j} a_{\bar{\imath}j} \det A_{\bar{\imath}j}$$
$$\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+\bar{\jmath}} a_{i\bar{\jmath}} \det A_{i\bar{\jmath}}$$

Notiamo che nelle due sommatorie c'è un addendo uguale: quando l'indice j nella prima sommatoria assume il valore $\bar{\jmath}$ otteniamo $(-1)^{\bar{\imath}+\bar{\jmath}} a_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \det A_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$ e allo stesso modo nella seconda sommatoria quando l'indice i assume il valore di $\bar{\imath}$. Per dimostrare l'uguaglianza delle due sommatorie è allora sufficiente mostrare l'uguaglianza delle somme degli altri addendi. In altri termini se poniamo

$$S := \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq \bar{\jmath}} (-1)^{\bar{\imath}+j} a_{\bar{\imath}j} \det A_{\bar{\imath}j}$$

e

$$T := \sum_{1\le i\le n, i\ne \bar\imath} (-1)^{i+\bar\jmath} a_{i\bar\jmath} \det A_{i\bar\jmath}$$

per completare la dimostrazione dovremo provare che $S = T$.

Consideriamo allora le matrici $A_{\bar\imath j}$ che compaiono nella sommatoria che definisce S: queste sono matrici di ordine $n-1$ e, per ipotesi di induzione, possiamo calcolarne il determinante sviluppandolo secondo una qualsiasi colonna. Notiamo in particolare queste matrici sono ottenute da A sopprimendo una colonna diversa dalla $\bar\jmath$-esima: più precisamente queste matrici hanno una colonna i cui elementi sono $a_{1\bar\jmath}$, ..., $a_{\bar\imath-1,\bar\jmath}$, ..., $a_{\bar\imath+1,\bar\jmath}$, ..., $a_{n\bar\jmath}$ (notiamo che l'elemento $a_{\bar\imath\bar\jmath}$ è assente). Sviluppiamo allora il determinante della matrice $A_{\bar\imath j}$ rispetto a questa colonna. Tralasciamo per il momento i segni degli addendi e osserviamo qual è la matrice aggiunta dell'elemento $a_{i\bar\jmath}$ in $A_{\bar\imath j}$: è esattamente $A_{\bar\imath i\bar\jmath j}$. Dunque abbiamo

$$\det A_{\bar\imath j} = \sum_{1\le i\le n, i\ne\bar\imath} s_{ij} a_{i\bar\jmath} \det A_{\bar\imath i\bar\jmath j},$$

dove s_{ij} indica il segno che dobbiamo ora calcolare. Notiamo che la colonna rispetto a cui stiamo sviluppando non è necessariamente la $\bar\jmath$-esima: infatti se $j < \bar\jmath$, la matrice $A_{\bar\imath j}$ è ottenuta da A sopprimendo una colonna precedente alla $\bar\jmath$-esima e, pertanto, stiamo sviluppando rispetto alla $\bar\jmath-1$-esima colonna; se invece $j > \bar\jmath$, la matrice $A_{\bar\imath j}$ è ottenuta da A sopprimendo una colonna successiva alla $\bar\jmath$-esima e, pertanto, stiamo sviluppando rispetto alla $\bar\jmath$-esima colonna. Inoltre l'indice di riga di $a_{i\bar\jmath}$ è i se $i < \bar\imath$, è $i-1$ se $i > \bar\imath$ (ricordiamo che $a_{\bar\imath\bar\jmath}$ è assente). Riassumendo:

$$s_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+\bar\jmath-1} & \text{se } i < \bar\imath \text{ e } j < \bar\jmath \\ (-1)^{i-1+\bar\jmath-1} & \text{se } i > \bar\imath \text{ e } j < \bar\jmath \\ (-1)^{i+\bar\jmath} & \text{se } i < \bar\imath \text{ e } j > \bar\jmath \\ (-1)^{i-1+\bar\jmath} & \text{se } i > \bar\imath \text{ e } j > \bar\jmath \end{cases}$$

Ciò potrebbe essere scritto in una forma più compatta ma lasciamolo pure così. Inseriamo allora l'espressione che abbiamo ottenuto per $\det A_{\bar\imath j}$ nella formula che definisce S:

$$S = \sum_{1\le j\le n, j\ne\bar\jmath} (-1)^{\bar\imath+j} a_{\bar\imath j} \sum_{1\le i\le n, i\ne\bar\imath} s_{ij} a_{i\bar\jmath} \det A_{\bar\imath i\bar\jmath j}.$$

Abbiamo dunque una sommatoria di $n-1$ sommatorie, ciascuna composta di $n-1$ addendi: in totale abbiamo dunque una sommatoria di $(n-1)^2$ addendi dipendenti da un doppio indice i e j. Possiamo dunque riscrivere così:

$$S = \sum_{\substack{1\le i\le n, i\ne\bar\imath \\ 1\le j\le n, j\ne\bar\jmath}} (-1)^{\bar\imath+j} s_{ij} a_{\bar\imath j} a_{i\bar\jmath} \det A_{\bar\imath i\bar\jmath j}.$$

Poniamo $c_{ij} := (-1)^{\bar{i}+j} s_{ij}$. Utilizzando l'espressione per s_{ij} determinata in precedenza otteniamo

$$c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+\bar{i}+j+\bar{j}-1} & \text{se } i < \bar{i} \text{ e } j < \bar{j} \\ (-1)^{i+\bar{i}+j+\bar{j}} & \text{se } i > \bar{i} \text{ e } j < \bar{j} \\ (-1)^{i+\bar{i}+j+\bar{j}} & \text{se } i < \bar{i} \text{ e } j > \bar{j} \\ (-1)^{i+\bar{i}+j+\bar{j}-1} & \text{se } i > \bar{i} \text{ e } j > \bar{j} \end{cases}$$

Dunque, riassumendo:

$$S = \sum_{\substack{1 \le i \le n, i \ne \bar{i} \\ 1 \le j \le n, j \ne \bar{j}}} c_{ij} a_{\bar{i}j} a_{i\bar{j}} \det A_{\bar{i}i\bar{j}j}.$$

Abbiamo finalmente trovato un'espressione per S. Dobbiamo ora ripetere ragionamenti del tutto analoghi per trovare un'espressione per T, scambiando però il ruolo delle righe e delle colonne.

Consideriamo allora le matrici $A_{i\bar{j}}$ che compaiono nella sommatoria che definisce T: queste sono matrici di ordine $n-1$ e, per ipotesi di induzione, possiamo calcolarne il determinante sviluppandolo secondo una qualsiasi riga. Notiamo in particolare queste matrici sono ottenute da A sopprimendo una riga diversa dalla $\bar{i}$-esima: più precisamente queste matrici hanno una riga i cui elementi sono $a_{\bar{i}1}, \dots, a_{\bar{i},\bar{j}-1}, \dots, a_{\bar{i},\bar{j}+1}, \dots, a_{\bar{i}n}$ (notiamo che l'elemento $a_{\bar{i}\bar{j}}$ è assente). Sviluppiamo allora il determinante della matrice $A_{i\bar{j}}$ rispetto a questa riga. Tralasciamo per il momento i segni degli addendi e osserviamo qual è la matrice aggiunta dell'elemento $a_{\bar{i}j}$ in $A_{i\bar{j}}$: è esattamente $A_{\bar{i}i\bar{j}j}$. Dunque abbiamo

$$\det A_{i\bar{j}} = \sum_{1 \le j \le n, j \ne \bar{j}} t_{ij} a_{\bar{i}j} \det A_{\bar{i}i\bar{j}j},$$

dove t_{ij} indica il segno che dobbiamo ora calcolare. Notiamo che la riga rispetto a cui stiamo sviluppando non è necessariamente la $\bar{i}$-esima: infatti se $i < \bar{i}$, la matrice $A_{i\bar{j}}$ è ottenuta da A sopprimendo una riga precedente alla $\bar{i}$-esima e, pertanto, stiamo sviluppando rispetto alla $\bar{i}-1$-esima riga; se invece $i > \bar{i}$, la matrice $A_{i\bar{j}}$ è ottenuta da A sopprimendo una riga successiva alla $\bar{i}$-esima e, pertanto, stiamo sviluppando rispetto alla $\bar{i}$-esima riga. Inoltre l'indice di colonna di $a_{\bar{i}j}$ è j se $j < \bar{j}$, è $j-1$ se $j > \bar{j}$ (ricordiamo che $a_{\bar{i}\bar{j}}$ è assente). Riassumendo:

$$t_{ij} = \begin{cases} (-1)^{\bar{i}-1+j} & \text{se } i < \bar{i} \text{ e } j < \bar{j} \\ (-1)^{\bar{i}+j} & \text{se } i > \bar{i} \text{ e } j < \bar{j} \\ (-1)^{\bar{i}-1+j-1} & \text{se } i < \bar{i} \text{ e } j > \bar{j} \\ (-1)^{\bar{i}+j-1} & \text{se } i > \bar{i} \text{ e } j > \bar{j} \end{cases}$$

Ciò potrebbe essere scritto in una forma più compatta ma lasciamolo pure così. Inseriamo allora l'espressione che abbiamo ottenuto per $\det A_{i\bar{j}}$ nella formula che definisce T:

$$T = \sum_{1 \le i \le n, i \ne \bar{i}} (-1)^{i+\bar{j}} a_{i\bar{j}} \sum_{1 \le j \le n, j \ne \bar{j}} t_{ij} a_{\bar{i}j} \det A_{\bar{i}i\bar{j}j}.$$

Abbiamo dunque una sommatoria di $n-1$ sommatorie, ciascuna composta di $n-1$ addendi: in totale abbiamo dunque una sommatoria di $(n-1)^2$ addendi dipendenti da un doppio indice i e j. Possiamo dunque riscrivere così:

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, i \neq \bar{i} \\ 1 \leq j \leq n, j \neq \bar{j}}} (-1)^{i+\bar{j}} t_{ij} a_{\bar{i}j} a_{i\bar{j}} \det A_{\bar{i}i\bar{j}j}.$$

Usando l'espressione per t_{ij} determinata in precedenza è facile vedere che $(-1)^{i+\bar{j}} t_{ij} = c_{ij}$. Dunque:

$$T = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, i \neq \bar{i} \\ 1 \leq j \leq n, j \neq \bar{j}}} c_{ij} a_{\bar{i}j} a_{i\bar{j}} \det A_{\bar{i}i\bar{j}j}.$$

Abbiamo così espresso T con la stessa sommatoria che definisce S: il risultato è dimostrato. ■

Proposizione *Data una matrice quadrata A, si ha:*

$$\det A = \det {}^t\!A.$$

Dimostrazione Procediamo per induzione sull'ordine della matrice n. Se $n = 1$ la proprietà è banale: infatti A coincide con la propria trasposta.

Supponiamo allora che $n > 1$. Sia allora

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo ora la matrice trasposta ${}^t\!A$, che chiameremo per semplicità B:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e sviluppiamo il suo determinante rispetto alla prima colonna otteniamo

$$\det B = a_{11} \det B_{11} - a_{12} \det B_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det B_{n1}.$$

Osserviamo però che le matrici aggiunte degli elementi della prima colonna di B sono esattamente le matrici trasposte degli elementi della prima riga di A: in altre parole $B_{11} = {}^t(A_{11})$, $B_{21} = {}^t(A_{12})$, …, $B_{n1} = {}^t(A_{1n})$. Per ipotesi di induzione si ha allora $\det B_{11} = \det A_{11}$, $\det B_{21} = \det A_{12}$, …, $\det B_{n1} = \det A_{1n}$. Pertanto abbiamo

$$\det B = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Il secondo membro è esattamente la formula che definisce il determinante di A: pertanto $\det B = \det A$. Ma $B = {}^t\!A$ e, dunque, $\det {}^t\!A = \det A$. ■

Teorema di Binet

Teorema (di Binet) *Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B si ha:*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Vogliamo dare una dimostrazione del teorema di Binet: per far ciò avremo bisogno di vari lemmi preparatori che ci permetteranno di dividere la dimostrazione in vari passaggi.

Lemma A *Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine: se A ha due righe uguali allora anche il prodotto AB ha due righe uguali. Ciò implica che* $\det(AB) = \det A \det B$*.*

Dimostrazione Gli elementi della i-esima riga di AB sono dati dal prodotto della i-esima riga di A per le varie colonne di B. Pertanto se la i_1-esima riga e la i_2-esima riga di A sono uguali anche la i_1-esima riga e la i_2-esima riga di A sono uguali. Dalla proposizione 5.13 sappiamo che una matrice con due righe uguali ha determinante nullo. Dunque $\det A = 0$ e $\det(AB) = 0$. Qualunque sia $\det B$si ha allora $\det(AB) = \det A \det B$. ■

Lemma B *Siano A_1, A_2 e B matrici quadrate dello stesso ordine. Se A_1 e A_2 si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe, allora anche A_1B e A_2B si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Ciò implica che se* $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$ *allora anche* $\det(A_2B) = \det A_2 \det B$*.*

Dimostrazione Anche questo risultato dipende dal fatto che gli elementi della i-esima riga di A_1B (di A_2B) sono dati dal prodotto della i-esima riga di A_1 (di A_2) per le varie colonne di B. Pertanto se la i_1-esima riga e la i_2-esima riga di A_1 e A_2 sono scambiate e le altre sono uguali, le late righe non sono influenzate dallo scambio di righe e la i_1-esima riga e la i_2-esima riga di A_1 e A_2 sono scambiate. Dalla proposizione 5.18 sappiamo che scambiando fra loro due righe il determinante cambia di segno. Pertanto $\det A_1 = -\det A_2$ e $\det(A_1B) = -\det(A_2B)$. Ma allora se $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$, si ha che $\det(A_2B) = -\det(A_1B) = -\det A_1 \det B = \det A_2 \det B$. ■

Lemma C *Siano A_1, A_2 e B matrici quadrate dello stesso ordine. Se A_2 si ottiene da A_1 moltiplicando una sua riga per uno scalare k, allora anche A_2B si ottiene da A_1B moltiplicando una sua riga per lo scalare k. Ciò implica che se* $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$ *allora anche* $\det(A_2B) = \det A_2 \det B$*.*

Dimostrazione Anche questo risultato dipende dal fatto che gli elementi della i-esima riga di A_1B (di A_2B) sono dati dal prodotto della i-esima riga di A_1 (di A_2) per le varie colonne di B. Dall'esercizio di base 5.25 sappiamo che moltiplicando una riga di una matrice per uno scalare k si ottiene una matrice il cui determinante è uguale a quello della matrice di partenza moltiplicato per k. Pertanto $\det A_2 = k \det A_1$ e $\det(A_2B) = k \det(A_1B)$. Ma allora se $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$, si ha che $\det(A_2B) = k \det(A_1B) = k \det A_1 \det B = \det A_2 \det B$. ■

Notazione Data una matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

indichiamo con r_1, r_2, ..., r_n le sue righe e scriviamo la matrice A così:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

△

Lemma D *Siano*

$$A_1 := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i + r_i' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

tre matrici quadrate dello stesso ordine scritte nella notazione appena introdotta. Allora $\det A_1 + \det A_2 = \det A_3$.

Dimostrazione Notiamo che le matrici aggiunte degli elementi della i-esima riga delle tre matrici sono uguali. Se allora

$$r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots a_{in} \end{pmatrix}, \quad r_i' = \begin{pmatrix} a_{i1}' & \dots a_{in}' \end{pmatrix},$$

e, quindi,

$$r_i + r_i' = \begin{pmatrix} a_{i1} + a_{i1}' & \dots a_{in} + a_{in}' \end{pmatrix},$$

sviluppando il determinante di A_1, A_2 e A_3 rispetto alla riga i-esima otteniamo:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \\ \det A_2 &= (-1)^{i+1} a_{i1}' \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}' \det A_{in} \\ \det A_3 &= (-1)^{i+1} (a_{i1} + a_{i1}') \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} (a_{in} + a_{in}') \det A_{in} \end{aligned}$$

e, dunque, si vede immediatamente che $\det A_1 + \det A_2 = \det A_3$. ■

Lemma E *Siano A_1, A_2 e A_3 tre matrici quadrate come nel lemma D e sia B una matrice quadrata dello stesso ordine di A_1, A_2 e A_3. Allora la riga i-esima di A_3B è la somma della riga i-esima di A_1B e della riga i-esima di A_2B mentre per ogni $j \neq i$ la j-esima riga di A_1, la j-esima riga di A_2 e la j-esima riga di A_3 sono uguali. Ciò implica che se* $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$ *e* $\det(A_2B) = \det A_2 \det B$ *allora anche* $\det(A_3B) = \det A_3 \det B$.

Dimostrazione Anche questo risultato dipende dal fatto che gli elementi della i-esima riga di A_1B sono dati dal prodotto della i-esima riga di A_1 per le varie colonne di B e similmente per A_2 e A_3. Dal lemma precedente abbiamo allora che $\det A_1 + \det A_2 = \det A_3$ e $\det(A_1B) + \det(A_2B) = \det(A_3B)$. Ma allora se $\det(A_1B) = \det A_1 \det B$ e $\det(A_2B) = \det A_2 \det B$, si ha che

$$\begin{aligned}\det(A_3B) &= \det(A_1B) + \det(A_2B) = \det A_1 \det B + \det A_2 \det B \\ &= (\det A_1 + \det A_2) \det B = \det A_3 \det B.\end{aligned}$$

■

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Binet.

Dimostrazione Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Dobbiamo mostrare che $\det(AB) = \det A \det B$. La dimostrazione sarà suddivisa in vari passi: a ogni passo ci ridurremo a considerare casi in cui la matrice A è più semplice.

• Consideriamo una riga qualunque di A, ad esempio la i-esima. Siano a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in} gli elementi di questa riga. Consideriamo ora le matrici A_1, A_2, …, A_n le cui righe diverse dalla i-esima siano uguali alla corrispondente riga di A e la cui i-esima riga sia, rispettivamente, $\begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a_{i2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{in} \end{pmatrix}$. Dunque la i-esima riga di A è uguale alla somma della i-esima riga di A_1, A_2, …, A_n. Supponiamo di aver mostrato che, per ciascun intero j, si ha $\det(A_jB) = \det A_j \det B$, allora, applicando ripetutamente il lemma E, otteniamo $\det(AB) = \det A \det B$. Possiamo allora ridurci a considerare matrici del tipo A_j.

• Consideriamo la matrice $\bar{A}_j$ le cui righe diverse dalla dalla i-esima siano uguali alla corrispondente riga di A_j e la cui i-esima riga abbia un 1 in posizione (i, j) e tutti gli altri elementi nulli. Notiamo allora che A_j si ottiene da $\bar{A}_j$ moltiplicando la i-esima riga per a_{ij}. Supponiamo di aver mostrato che $\det(\bar{A}_jB) = \det \bar{A}_j \det B$, allora, applicando il lemma C, otteniamo $\det(A_jB) = \det A_j \det B$. Possiamo allora ridurci a considerare matrici del tipo $\bar{A}_j$, cioè matrici che hanno una riga con un elemento uguale a 1 e tutti gli altri nulli.

• Applicando ripetutamente il procedimento visto nei due passi precedenti a tutte le righe, è sufficiente allora mostrare che $\det(EB) = \det E \det B$ dove ciascuna riga di E ha un elemento uguale a 1 e tutti gli altri nulli.

• Supponiamo che la matrice E abbia due righe uguali: allora grazie al lemma A abbiamo $\det(EB) = \det E \det B$ come desiderato.

• Supponiamo che le righe di E siano tutte diverse. Ciò significa che gli in ciascuna riga c'è un 1 su colonne diverse. In particolare c'è esattamente una riga che contiene un 1 in prima posizione, esattamente una riga che contiene un 1 in seconda posizione e così via. Grazie al lemma B, per dimostrare che $\det(EB) = \det E \det B$ è sufficiente mostrare che $\det(\bar{E}B) = \det \bar{E} \det B$ dove $\bar{E}$ è una matrice ottenuta da E scambiando fra loro due righe. Iterando questo procedimento possiamo affermare che è sufficiente mostrare che $\det(\tilde{E}B) = \det \tilde{E} \det B$ dove $\tilde{E}$ è una matrice ottenuta da E riordinando a piacimento le sue righe. Ma allora, se portiamo in prima posizione la riga che ha 1 sulla prima colonna, in seconda posizione la riga che ha 1 sulla seconda colonna e così via otteniamo esattamente una matrice diagonale I i cui elementi sulla diagonale principale. Dobbiamo allora mostrare che $\det(IB) = \det I \det B$. Nel capitolo 6 mostreremo che $IB = B$ (proposizione 6.2) e, quindi, a primo membro abbiamo $\det B$; mostreremo inoltre che $\det I = 1$ (esercizio di base 6.5) e, quindi, a secondo membro abbiamo pure $\det B$. ■

A.6 Matrice inversa

Teorema *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$. *In tal caso, detto n l'ordine di A, la matrice inversa di A si calcola nel modo seguente:*

- *se $n = 1$ e $A := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} \end{pmatrix}$;*
- *se $n > 1$ l'elemento b_{ij} di posto (i, j) della matrice A^{-1} è dato dalla formula:*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

DIMOSTRAZIONE Abbiamo già notato che una matrice invertibile ha determinante non nullo. Ricordiamo per completezza l'argomento utilizzato per dimostrare questa affermazione. Se A è invertibile allora esiste una matrice B tale che $AB = I$: per il teorema di Binet (vedere 5.21) abbiamo allora $\det I = \det(AB) = \det A \det B$. Poiché $\det I = 1$, non può allora essere $\det A = 0$.

Mostriamo ora che se $\det A \neq 0$ allora A è invertibile. Chiamiamo allora B la matrice definita dall'enunciato del teorema: notiamo che tale matrice può essere costruita usando la sola ipotesi che $\det A \neq 0$. Per mostrare che B è effettivamente l'inversa di A dobbiamo verificare che $AB = I$ e che $BA = I$. Mostriamo solo che $AB = I$: la dimostrazione che $BA = I$ è analoga. Nel caso in cui l'ordine n della matrice A sia 1 la verifica è immediata. Consideriamo allora il caso in cui $n > 1$. L'elemento c_{ik} di posto (i, k) della matrice AB è dato dal prodotto dalla i-esima riga di A per la k-esima riga di B, dunque è uguale a:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

che può essere scritto più sinteticamente in forma di sommatoria:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Ora b_{jk} è, per definizione, uguale a $(-1)^{j+k}\frac{\det A_{kj}}{\det A}$. Dunque abbiamo

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{j+k}\frac{\det A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ij}\det A_{kj}. \tag{A.2}$$

Dobbiamo mostrare che $AB = I$, cioè che $c_{ik} = 1$ se $i = k$ e che $c_{ik} = 0$ se $i \neq k$.

Se $i = k$ abbiamo allora

$$c_{ii} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}a_{ij}\det A_{ij}.$$

La sommatoria che compare in quest'ultima formula è esattamente lo sviluppo di $\det A$ secondo la i-esima riga: pertanto $c_{ii} = \frac{1}{\det A}\det A = 1$. Dunque gli elementi della diagonale principale sono tutti 1.

Se $i \neq k$, consideriamo la matrice $\bar{A}$ che si ottiene da A sostituendo la k-esima riga di A con la i-esima: dunque abbiamo una matrice con due righe uguali. Grazie alla proposizione 5.13 sappiamo che $\det \bar{A} = 0$. Sviluppiamo ora $\det \bar{A}$ secondo la k-esima riga: se indichiamo con $\bar{a}_{kj}$ l'elemento generico di $\bar{A}$ otteniamo:

$$\det \bar{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \bar{a}_{kj} \det \bar{A}_{kj}.$$

La k-esima riga di $\bar{A}$ è la i-esima riga di A: pertanto $\bar{a}_{kj} = a_{ij}$. Inoltre le righe diverse dalla k-esima sono immutate: quindi le matrici aggiunte degli elementi della k-esima riga di A e di $\bar{A}$ coincidono. Pertanto $\bar{A}_{kj} = A_{kj}$. Quindi:

$$\det \bar{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} \det A_{kj}.$$

Pertanto dalle equazione (A.2) abbiamo $c_{ik} = \frac{1}{\det A} \det \bar{A}$: poiché abbiamo già notato che $\det \bar{A} = 0$ abbiamo che $c_{ik} = 0$, come richiesto. ■

Teorema (di Cramer) *Sia dato un sistema di n equazioni lineari a coefficienti reali in n incognite:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in forma matriciale:

$$AX = B.$$

Se $\det A \neq 0$*, il sistema ammette una e una sola soluzione data da*

$$X = A^{-1}B.$$

Equivalentemente la soluzione è data dalle formule

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A},$$

con $1 \leq i \leq n$ dove $A(i)$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna di A con la colonna B dei termini noti.

Dimostrazione Abbiamo già mostrato che la soluzioni del sistema è data da

$$X = A^{-1}B.$$

Dobbiamo mostrare che si ottiene lo stesso risultato utilizzando le formule date in enunciato.

Poiché $X = A^{-1}B$, l'i-esimo elemento di X, cioè x_i si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A^{-1} per l'unica colonna di B. Grazie alla formula che permette di costruire l'inversa di A (teorema 6.9) gli elementi della i-esima riga di A

sono $(-1)^{i+1}\frac{\det A_{1i}}{\det A}$, $(-1)^{i+2}\frac{\det A_{2i}}{\det A}$, ..., $(-1)^{i+n}\frac{\det A_{ni}}{\det A}$. Pertanto utilizzando il prodotto riga per colonna si ha:

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i+1}\frac{\det A_{1i}}{\det A}\cdot b_1 + (-1)^{i+2}\frac{\det A_{2i}}{\det A}\cdot b_2 + \cdots + (-1)^{i+n}\frac{\det A_{ni}}{\det A}\cdot b_n \\ &= \frac{(-1)^{i+1}b_1\det A_{1i} + (-1)^{i+2}b_2\det A_{2i} + \cdots + (-1)^{i+n}b_n\det A_{ni}}{\det A}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se ora consideriamo la matrice A_i:

$$A_i \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e ne sviluppiamo il determinante rispetto alla i-esima colonna, notando che le matrici degli elementi su tale colonna coincidono con le matrici aggiunte dei corrispondenti elementi in A, otteniamo

$$\det A_i = (-1)^{i+1}b_1\det A_{1i} + (-1)^{i+2}b_2\det A_{2i} + \cdots + (-1)^{i+n}b_n\det A_{ni}.$$

Questo è esattamente il numeratore che appare nell'equazione (A.3): pertanto $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$. ∎

A.10 Applicazioni del metodo di Gauss

Proposizione *Sia A una matrice quadrata e sia A' la matrice ottenuta da A sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per k. Allora* $\det A = \det A'$.

Dimostrazione Sia

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice B che si ottiene da A rimpiazzando la riga i-esima con la riga j-esima moltiplicata per k e lasciando inalterate tutte le altre:

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \dots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice B ha una riga multipla di un'altra: pertanto per la proposizione 5.27 si ha $\det B = 0$. Ora osserviamo che le matrici A, B e A' hanno tutte le righe diverse dalla i-esima uguali, mentre la i-esima riga di A' è data dalla somma della i-esima riga di A e la i-esima riga di B. Per il Lemma D del paragrafo A.5 abbiamo che $\det A' = \det A + \det B$. Poiché $\det B = 0$ abbiamo la tesi. ∎

Teorema *Se A e A' sono matrici (non necessariamente quadrate) equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A.$$

Dimostrazione Poiché si può passare da A ad A' per mezzo di un numero finito di operazioni elementari di riga, è sufficiente mostrare che il rango non cambia se applichiamo ad A una singola operazione elementare di riga.

Supponiamo allora che A' si ottenga da A con una operazione di riga. Se A ha rango r, la matrice A possiede un minore invertibile di ordine r. Occorre mostrare che anche A' possiede un minore invertibile di ordine r: infatti ciò implica che $\operatorname{rk} A' \geq r$, cioè $\operatorname{rk} A' \geq \operatorname{rk} A$. Poiché si può tornare da A' ad A con un'operazione elementare di riga: con il medesimo argomento abbiamo allora che $\operatorname{rk} A \geq \operatorname{rk} A'$ e pertanto abbiamo che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$.

In conclusione è sufficiente mostrare che se A ha rango r ed A' si ottiene da A per mezzo di un'operazione elementare di riga, allora A' possiede un minore invertibile di ordine r. Consideriamo allora i diversi tipi di operazioni elementari.

• La matrice A' si ottiene da A per mezzo di uno scambio di righe. Anche se può sembrare apparentemente più complicato, supponiamo più in generale che A' si ottenga da A riordinando in maniera qualunque le righe. Se allora B è un minore invertibile di ordine r, consideriamo le righe di A necessarie a formare B. Queste righe compaiono (per così dire rimescolate) anche in A': se prendiamo allora il minore B' di A' formato da queste righe e dalle colonne nelle stesse posizioni necessarie a formare B, abbiamo che il minore B' si può ottenere da B semplicemente riordinando le sue righe. Dunque B e B' sono equivalenti per riga e, per la proposizione 10.5, i loro determinanti sono uguali o opposti: in entrambi i casi $\det B' \neq 0$ e abbiamo trovato un minore invertibile di A' di ordine r.

• La matrice A' si ottiene da A sommando a una riga (diciamo la i-esima) un multiplo di un'altra (diciamo la j-esima moltiplicata per k). Sia B un minore invertibile di A di ordine r. Consideriamo vari casi

– La riga i-esima non concorre a formare il minore B: poiché le righe di A diverse dalla i-esima rimangono immutate in A', ritroviamo anche in A' il minore B e abbiamo così trovato in A' un minore invertibile di ordine r.

– La riga i-esima e la riga j-esima concorrono entrambe a formare il minore B: se allora prendiamo il minore B' di A' che si ottiene utilizzando le righe e le colonne nelle medesime posizioni delle righe e colonne necessari a formare B in A, vediamo che il minore B' si può ottenere da B sommando a una riga di B un'altra riga di B moltiplicata per k e, pertanto, per la proposizione 10.4 abbiamo $\det B' = \det B$. Abbiamo così trovato in A' un minore invertibile di ordine r.

– LA riga i-esima concorre a formare il minore B ma la riga j-esima no. Per fissare le idee supponiamo che B sia formato dalle prime r righe e r colonne che $i = r$ e $j = r + 1$. Sia B' il minore formato dalle prime r righe e r colonne di A'. Allora:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} & \dots & a_{r-1,q} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rq} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & \dots & a_{r+1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,r} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo evidenziato il minore B e

$$A' := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} & \dots & a_{r-1,q} \\ a_{r1+ka_{r+1,1}} & \dots & a_{rr+a_{r+1,r}} & \dots & a_{rq} + ka_{r+1,q} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & \dots & a_{r+1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,r} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo evidenziato il minore B'.

Consideriamo ora il minore C di A formato dalle prime $r-1$ righe e dalla riga $r+1$-esima e dalle prime r colonne:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} & \dots & a_{r-1,q} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rq} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & \dots & a_{r+1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,r} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che C è minore anche di A' (basta prendere le stesse righe e colonne). Se allora $\det C \neq 0$ abbiamo trovato in A' un minore di ordine r invertibile e abbiamo finito. Supponiamo invece che $\det C = 0$. Consideriamo ora la matrice

$$D := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} \\ ka_{r+1,1} & \dots & ka_{r+1,r} \end{pmatrix}.$$

che si ottiene da C moltiplicando l'ultima riga per k. Per l'esercizio di base 5.25, si ha $\det D = k \det C = k \cdot 0 = 0$.

Notiamo ora che le matrici B, D e B' hanno tutte le righe tranne l'ultima uguali e l'ultima riga di B' è la somma dell'ultima riga di B e dell'ultima riga di D. Pertanto per il lemma D del paragrafo A.5 abbiamo

$$\det B' = \det B + \det D = \det B + 0 = \det B.$$

Poiché B è invertibile abbiamo che $\det B \neq 0$ e, dunque, $\det B' \neq 0$ e B' è un minore invertibile di ordine r di A'. Abbiamo così concluso. ∎

A.17 Basi di spazi vettoriali

Lemma (del completamento) *Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Siano poi assegnati r vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ di V , con $r \leq n$. È allora possibile scegliere opportunamente r vettori tra quelli della base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ e sostituirli con i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ in modo tale da ottenere una base di V.*

DIMOSTRAZIONE Procediamo per induzione su r. Il caso $r = 0$ è banale: significa che non dobbiamo sostituire nessun vettore nella base formata dai vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$.

Consideriamo ora il caso $r > 1$. Per ipotesi induttiva il teorema vale per $r-1$. I vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{r-1}$ sono linearmente indipendenti: possiamo allora scegliere opportunamente $r-1$ vettori tra $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, sostituirli con i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{r-1}$ e ottenere una nuova base di V. Possiamo supporre che i vettori sostituiti siano $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_{r-1}$ (basta riordinare, se necessario, i vettori $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ cambiandone gli indici): pertanto abbiamo una base formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{r-1}$, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_{r+1}$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Consideriamo ora il vettore $\boldsymbol{v}_r$ ed esprimiamolo come combinazione lineare dei vettori di questa base:

$$\boldsymbol{v}_r = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1} + h_r\boldsymbol{e}_r + h_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n. \tag{A.4}$$

Se in questa combinazione lineare i coefficienti h_r, ..., h_n cioè i coefficienti corrispondenti ai vettori $\boldsymbol{e}_i$, fossero tutti nulli avremmo:

$$\boldsymbol{v}_r = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1},$$

cioè il vettore $\boldsymbol{v}_r$ sarebbe combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{r-1}$ e, per la proposizione 16.10, i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_r$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Dunque, almeno uno tra i coefficienti h_r, ..., h_n è diverso da 0. Pur di riordinare nuovamente i vettori $\boldsymbol{e}_i$ possiamo supporre che sia $h_r \neq 0$.

Mostriamo allora che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_{r-1}$, $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{e}_{r+1}$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ formano una base per V: questo completerà la dimostrazione.

Per prima cosa mostriamo che tali vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo una loro combinazione lineare e uguagliamola al vettore nullo:

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1} + a_r\boldsymbol{v}_r + a_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.$$

Dobbiamo mostrare che tutti i coefficienti a_i sono nulli. Sostituiamo $\boldsymbol{v}_r$ in questa equazione con l'espressione data da (A.4):

$$\begin{aligned}
&a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1} \\
&+a_r(h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1} + h_r\boldsymbol{e}_r + h_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n) \\
&+a_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Con semplici calcoli questa equazione può essere riscritta così:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_rh_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (a_{r-1} + a_rh_{r-1})\boldsymbol{v}_{r-1} + a_rh_r\boldsymbol{e}_r \\
&+(a_{r+1} + a_rh_{r+1})\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + (a_n + a_rh_n)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Poiché i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ sono linearmente indipendenti i coefficienti di quest'ultima equazione sono nulli. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} a_1 & + a_r h_1 & = 0 \\ \vdots & & \\ a_{r-1} & + a_r h_{r-1} & = 0 \\ & a_r h_r & = 0 \\ a_{r+1} & + a_r h_{r+1} & = 0 \\ \vdots & & \\ a_n & + a_r h_n & = 0 \end{cases}.$$

Poiché $h_r \neq 0$, dall'equazione $a_r h_r = 0$ otteniamo $a_r = 0$, che sostituito nelle altre equazioni mostra che anche $a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_n$ sono nulli. Quindi abbiamo mostrato che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ sono linearmente indipendenti.

Mostriamo ora che questi vettori generano V. Indichiamo con E il sottospazio vettoriale generato da essi. Poiché sappiamo che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ generano V è sufficiente mostrare che tali vettori appartengono a E. Ovviamente E contiene i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, quindi rimane solo da mostrare che anche $\boldsymbol{e}_r$ appartiene a E.

Dall'equazione (A.4) possiamo ricavare

$$h_r \boldsymbol{e}_r = -h_1 \boldsymbol{v}_1 - h_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots - h_{r-1} \boldsymbol{v}_{r-1} + \boldsymbol{v}_r - h_{r+1} \boldsymbol{e}_{r+1} - \cdots - h_n \boldsymbol{e}_n.$$

Dividendo ora per h_r (possiamo farlo perché $h_r \neq 0$) quest'ultima equazione otteniamo:

$$\boldsymbol{e}_r = -\frac{h_1}{h_r} \boldsymbol{v}_1 - \frac{h_2}{h_r} \boldsymbol{v}_2 + \cdots - \frac{h_{r-1}}{h_r} \boldsymbol{v}_{r-1} + \frac{1}{h_r} \boldsymbol{v}_r - \frac{h_{r+1}}{h_r} \boldsymbol{e}_{r+1} - \cdots - \frac{h_n}{h_r} \boldsymbol{e}_n. \quad \text{(A.5)}$$

Vediamo dunque che $\boldsymbol{e}_r$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, e, dunque, appartiene a E. ■

A.18 Intersezione e somma di sottospazi

Teorema (Formula di Grassmann) *Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V (quest'ultimo non necessariamente di dimensione finita). Vale allora la formula:*

$$\dim(E+F)+\dim(E\cap F)=\dim E+\dim F.$$

Dimostrazione Sia p la dimensione di E e q la dimensione di F.

Abbiamo già osservato che lo spazio vettoriale $E\cap F$, essendo un sottospazio vettoriale sia di E che di F, entrambi di dimensione finita, è esso stesso di dimensione finita. Siano $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ vettori che formano una sua base. In particolare essi sono vettori linearmente indipendenti di E. Per il lemma del completamento 17.15 possiamo determinare $p-r$ vettori $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-r}$ di E in modo tale che $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-r}$ formino una base di E.

Analogamente possiamo determinare $q-r$ vettori $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{q-r}$ di F in modo tale che $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{q-r}$ formino una base di F.

Consideriamo i vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-r}, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{q-r}$. Il loro numero è $r+(p-r)+(q-r)=p+q-r=\dim E+\dim F-\dim(E\cap F)$: se mostriamo che formano una base per $E+F$ abbiamo completato la dimostrazione.

Dalla proposizione 18.17 sappiamo che questi vettori generano $E+F$. Completiamo la dimostrazione provando che sono linearmente indipendenti. Consideriamo allora una loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo:

$$k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{u}_r+h_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+h_{p-r}\boldsymbol{e}_{p-r}+l_1\boldsymbol{f}_1+\cdots+l_{q-r}\boldsymbol{f}_{q-r}=\boldsymbol{0}. \tag{A.6}$$

Dobbiamo mostrare che tutti i coefficienti k_i, h_i e l_i sono nulli.

Dall'equazione (A.6) otteniamo immediatamente:

$$l_1\boldsymbol{f}_1+\cdots+l_{q-r}\boldsymbol{f}_{q-r}=-k_1\boldsymbol{u}_1-\cdots-k_r\boldsymbol{u}_r-h_1\boldsymbol{e}_1-\cdots-h_{p-r}\boldsymbol{e}_{p-r}.$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{f}_i$ e appartiene, quindi, a F. D'altra parte il primo membro dell'equazione è uguale al secondo membro, che è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-r}$ che formano una base di E: pertanto il primo membro appartiene anche a E. Riassumendo il primo membro dell'equazione appartiene a $E\cap F$ e può essere pertanto espresso come combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$:

$$l_1\boldsymbol{f}_1+\cdots+l_{q-r}\boldsymbol{f}_{q-r}=a_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{u}_r,$$

per opportuni coefficienti a_i.

Otteniamo allora immediatamente

$$-a_1\boldsymbol{u}_1-\cdots-a_r\boldsymbol{u}_r+l_1\boldsymbol{f}_1+\cdots+l_{q-r}\boldsymbol{f}_{q-r}=\boldsymbol{0}.$$

Poiché $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{q-r}$ sono linearmente indipendenti (infatti formano una base per F) dall'ultima equazione otteniamo allora che i coefficienti a_i e i coefficienti l_i si annullano. Pertanto l'equazione (A.6) si riduce a

$$k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{u}_r+h_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+h_{p-r}\boldsymbol{e}_{p-r}=\boldsymbol{0}.$$

Poiché $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{p-r}$ sono linearmente indipendenti (infatti formano una base per E) da quest'ultima equazione otteniamo che tutti i coefficienti k_i e h_i si annullano.

Riassumendo abbiamo ottenuto che tutti i coefficienti k_i, h_i e l_i sono nulli, come richiesto. ■

A.32 Diagonalizzazione

Teorema *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ autovalori distinti di f. Prendiamo una base per ciascun autospazio: unendo tali basi si ottengono dei vettori tra loro linearmente indipendenti.*

Dimostrazione Procediamo per induzione sul numero s degli autovalori considerati.

Per $s = 1$ non c'è nulla da dimostrare: abbiamo una base di un unico autospazio e i vettori considerati sono ovviamente linearmente indipendenti.

Sia ora $s > 1$. Abbiamo una base per $E(\lambda_1)$ formata da $\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \dots, \boldsymbol{v}_{1d_1}$, una base per $E(\lambda_2)$ formata da $\boldsymbol{v}_{21}, \boldsymbol{v}_{22}, \dots, \boldsymbol{v}_{2d_2}$ e così via fino a una base per $E(\lambda_s)$ formata da $\boldsymbol{v}_{s1}, \boldsymbol{v}_{s2}, \dots, \boldsymbol{v}_{sd_s}$. Per provare che tali vettori sono linearmente indipendenti consideriamone una combinazione lineare con risultato nullo:

$$\begin{aligned}
&h_{11}\boldsymbol{v}_{11} + h_{12}\boldsymbol{v}_{12} + \dots + h_{1d_1}\boldsymbol{v}_{1d_1}\\
&+h_{21}\boldsymbol{v}_{21} + h_{22}\boldsymbol{v}_{22} + \dots + h_{2d_2}\boldsymbol{v}_{2d_2}\\
&\vdots\\
&+h_{s1}\boldsymbol{v}_{s1} + h_{s2}\boldsymbol{v}_{s2} + \dots + h_{sd_s}\boldsymbol{v}_{sd_s} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Dobbiamo mostrare che tutti i coefficienti h_{ij} sono nulli.

Se applichiamo ad ambo i membri dell'equazione (A.7) l'endomorfismo f, utilizzando la linearità di f otteniamo:

$$\begin{aligned}
&h_{11}f(\boldsymbol{v}_{11}) + h_{12}f(\boldsymbol{v}_{12}) + \dots + h_{1d_1}f(\boldsymbol{v}_{1d_1})\\
&+h_{21}f(\boldsymbol{v}_{21}) + h_{22}f(\boldsymbol{v}_{22}) + \dots + h_{2d_2}f(\boldsymbol{v}_{2d_2})\\
&\vdots\\
&+h_{s1}f(\boldsymbol{v}_{s1}) + h_{s2}f(\boldsymbol{v}_{s2}) + \dots + h_{sd_s}f(\boldsymbol{v}_{sd_s}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Ricordando che ciascun $\boldsymbol{v}_{ij}$ è autovettore rispetto all'autovalore λ_i possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
&h_{11}\lambda_1\boldsymbol{v}_{11} + h_{12}\lambda_1\boldsymbol{v}_{12} + \dots + h_{1d_1}\lambda_1\boldsymbol{v}_{1d_1}\\
&+h_{21}\lambda_2\boldsymbol{v}_{21} + h_{22}\lambda_2\boldsymbol{v}_{22} + \dots + h_{2d_2}\lambda_2\boldsymbol{v}_{2d_2}\\
&\vdots\\
&+h_{s1}\lambda_s\boldsymbol{v}_{s1} + h_{s2}\lambda_s\boldsymbol{v}_{s2} + \dots + h_{sd_s}\lambda_s\boldsymbol{v}_{sd_s} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Prendiamo ora l'equazione (A.7) e moltiplichiamo ambo i membri per λ_1:

$$\begin{aligned}
&h_{11}\lambda_1\boldsymbol{v}_{11} + h_{12}\lambda_1\boldsymbol{v}_{12} + \dots + h_{1d_1}\lambda_1\boldsymbol{v}_{1d_1}\\
&+h_{21}\lambda_1\boldsymbol{v}_{21} + h_{22}\lambda_1\boldsymbol{v}_{22} + \dots + h_{2d_2}\lambda_1\boldsymbol{v}_{2d_2}\\
&\vdots\\
&+h_{s1}\lambda_1\boldsymbol{v}_{s1} + h_{s2}\lambda_1\boldsymbol{v}_{s2} + \dots + h_{sd_s}\lambda_1\boldsymbol{v}_{sd_s} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Sottraiamo ora membro a membro l'equazione (A.9) dall'equazione (A.8):

$$\begin{aligned}
&h_{11}(\lambda_1-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{11}+h_{12}(\lambda_1-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{12}+\cdots+h_{1d_1}(\lambda_1-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{1d_1}\\
&+h_{21}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{21}+h_{22}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{22}+\cdots+h_{2d_2}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{2d_2}\\
&\vdots\\
&+h_{s1}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{s1}+h_{s2}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{s2}+\cdots+h_{sd_s}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{sd_s}=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

vale a dire

$$\begin{aligned}
&h_{21}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{21}+h_{22}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{22}+\cdots+h_{2d_2}(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{2d_2}\\
&\vdots\\
&+h_{s1}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{s1}+h_{s2}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{s2}+\cdots+h_{sd_s}(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{v}_{sd_s}=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

In quest'ultima equazione compaiono autovettori relativi a $s-1$ autovalori: per ipotesi induttiva tali vettori sono linearmente indipendenti e perciò tutti i coefficienti sono nulli:

$$\begin{gathered}
h_{21}(\lambda_2-\lambda_1)=h_{22}(\lambda_2-\lambda_1)=\cdots=h_{2d_2}(\lambda_2-\lambda_1)=0\\
\vdots\\
h_{s1}(\lambda_s-\lambda_1)=h_{s2}(\lambda_s-\lambda_1)=\cdots=h_{sd_s}(\lambda_s-\lambda_1)=0.
\end{gathered}$$

Gli autovalori λ_1, λ_2, …, λ_s sono distinti: dunque $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$, …, $\lambda_s-\lambda_1\neq 0$. Ciò implica che

$$\begin{gathered}
h_{21}=h_{22}=\cdots=h_{2d_2}=0\\
\cdots\\
h_{s1}=h_{s2}=\cdots=h_{sd_s}=0.
\end{gathered}$$

Sostituendo tali valori nel'equazione (A.7) otteniamo:

$$h_{11}\boldsymbol{v}_{11}+h_{12}\boldsymbol{v}_{12}+\cdots+h_{1d_1}\boldsymbol{v}_{1d_1}=\mathbf{0}.$$

Poiché per ipotesi $\boldsymbol{v}_{11}$, $\boldsymbol{v}_{12}$, …, $\boldsymbol{v}_{1d_1}$ sono linearmente indipendenti otteniamo che

$$h_{11}=h_{12}=\cdots=h_{1d_1}=0$$

il che completa la dimostrazione. ∎

A.38 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Teorema (Disuguaglianza di Schwarz) *Per ogni* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza*

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Dimostrazione Se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ la disuguaglianza è ovviamente verificata. Possiamo allora considerare il caso in cui $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ risulta

$$(k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times (k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \geq 0.$$

Sviluppando quest'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$k\boldsymbol{u} \times k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \geq 0,$$

vale a dire (tenuto conto del fatto che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2$ e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$):

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 k^2 + 2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})k + \|\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0.$$

Questa disuguaglianza può essere interpretata come una disequazione di secondo grado in k (si noti che il coefficiente di k^2 è non nullo perché stiamo considerando il caso in cui $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$). Affinché un trinomio di secondo grado in k sia maggiore o uguale a 0 per tutti i valori di k, è necessario che il suo discriminante sia minore o uguale a 0, vale a dire, nel caso in questione:

$$(2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}))^2 - 4\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq 0.$$

Con semplici calcoli otteniamo:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2$$

da cui, estraendo le radici, otteniamo la disuguaglianza di Schwarz. ■

Teorema (Disuguaglianza triangolare o di Minkowsky) *Per ogni* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

Dimostrazione Osserviamo che

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2.\end{aligned}$$

Ora, per la disuguaglianza di Schwarz, sappiamo che

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \leq |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

e, dunque,

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2.$$

Estraendo le radici troviamo la disuguaglianza di Minkowsky. ■

APPENDICE B

Richiami di geometria del piano

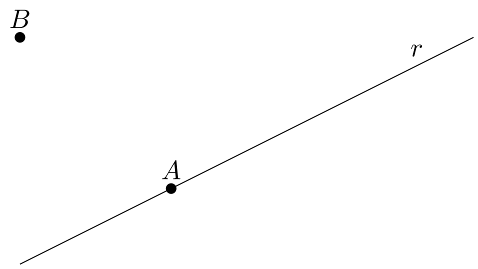
Richiamiamo alcuni argomenti di geometria euclidea del piano che sono stati studiati nei corsi pre-universitari. Non diamo le dimostrazioni delle proprietà enunciate.

B.1 Punti e rette

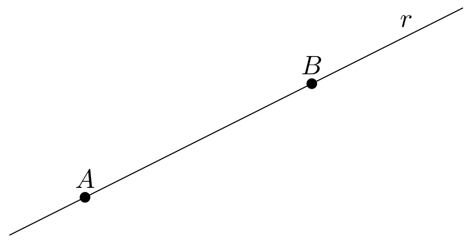
Gli enti primitivi della geometria del piano sono:

- **i punti**, che di solito vengono indicati con lettere maiuscole;
- **le rette**, che di solito vengono indicate con lettere minuscole.

Un punto del piano appartiene o meno a una retta. Nella figura seguente il punto A appartiene alla retta r mentre il punto B non appartiene alla retta r. In tal caso diciamo anche che la retta r **passa** per il punto A e non passa per il punto B. Usiamo anche i simboli $A \in r$, $B \notin r$.



Dati due punti distinti A e B del piano, esiste una e una sola retta r passante per essi.

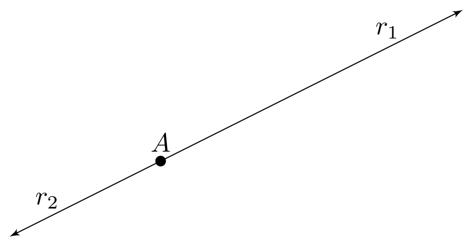


Pertanto, dati due punti distinti A e B, possiamo considerare **la** retta passante per essi (se non avessimo avuto la proprietà dell'unicità avremmo dovuto parlare di **una** retta passante per A e B). Spesso per indicare la retta passante per A e B useremo il simbolo r_{AB}.

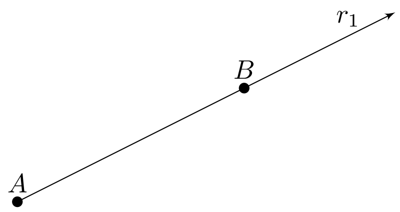
Dal fatto che per due punti distinti passa una e una sola retta segue che, se due rette hanno più di un punto in comune, allora coincidono.

B.2 Semirette, segmenti e semipiani

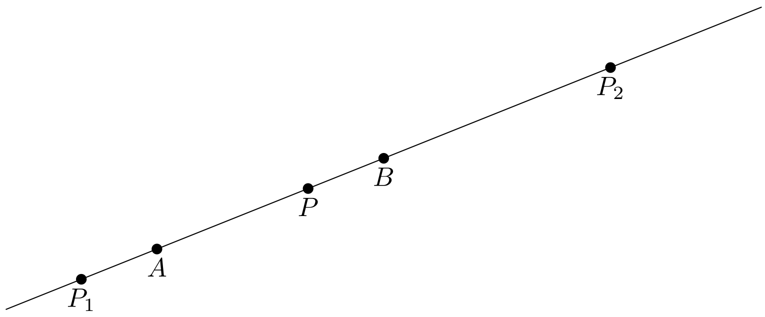
Sia data una retta r e un suo punto A. Il punto A divide i punti di r distinti da A in due **semirette** r_1 e r_2 aventi **origine** in A. Qualche volta diremo anche che le due semirette sono **delimitate** dal punto A.



Notiamo che, per definizione, l'origine A delle due semirette non appartiene a nessuna delle due semirette. Inoltre ogni punto della retta r distinto da A appartiene a una e una sola delle semirette delimitate da A. Per determinare una semiretta è sufficiente allora dare la sua origine A e un suo punto B distinto da A.

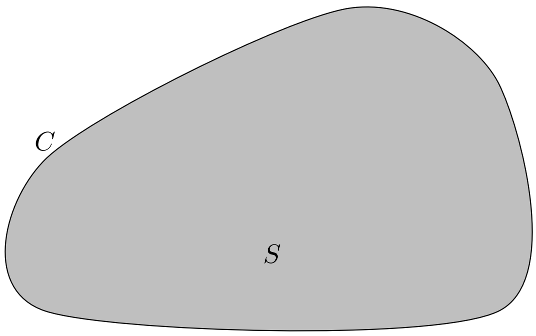


Dati due punti distinti A e B, il **segmento** AB di estremi A e B è l'insieme dei punti appartenenti sia alla semiretta di origine A e passante per B, sia alla semiretta di origine B e passante per A.



Nella figura precedente il punto P appartiene al segmento AB mentre i punti P_1 e P_2 non appartengono ad esso. Notiamo che dalla definizione di segmento segue che gli estremi A e B **non** appartengono al segmento AB. Alcune volte, per ricordare ciò, useremo il nome di **segmento aperto**. Chiamiamo invece **segmento chiuso** di estremi A e B l'insieme formato dal segmento AB e dai suoi estremi A e B.

Un insieme S di punti del piano si dice **convesso** se, dati comunque due punti A e B di S, tutti i punti del segmento AB appartengono a S. Nella seguente figura l'insieme S dei punti del piano delimitati dalla curva C è un insieme convesso.

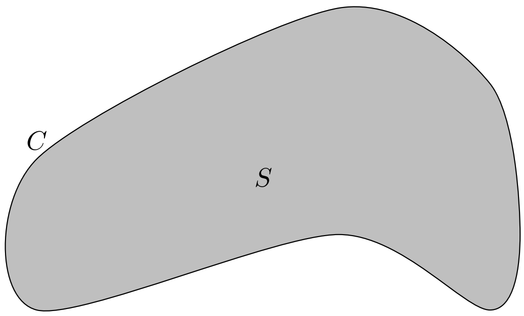


I punti, i segmenti, le semirette sono insiemi convessi.

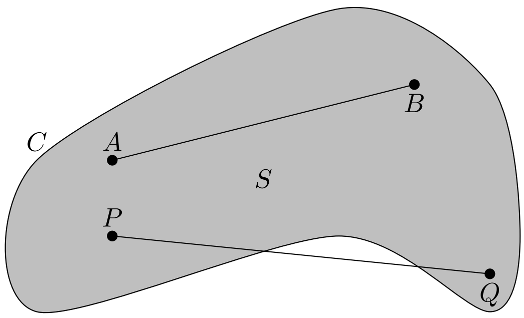
Sia data una retta r, un suo punto A e siano r_1 e r_2 le due semirette di r di origine A. Siano P e Q due punti di r distinti da A. Nel caso in cui P e Q appartengono alla stessa semiretta allora il segmento di estremi P e Q è tutto contenuto nella semiretta stessa (in particolare il segmento non contiene A); nel caso in cui P e Q non appartengono alla stessa semiretta allora il segmento di estremi P e Q contiene A.

Un insieme non convesso si dice anche **concavo**.

Nella seguente figura l'insieme S dei punti delimitati dalla curva C non è un insieme convesso.

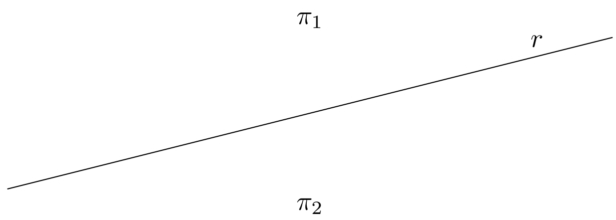


Infatti un insieme S è non convesso se **non** è vero che dati comunque due punti A e B di S, tutti i punti del segmento AB appartengono a S. Un insieme S è quindi non convesso se esistono due suoi punti P e Q tali che il segmento PQ contenga qualche punto **non** appartenente a S. Per esempio l'insieme S della figura precedente non è convesso perché il segmento PQ contiene punti non appartenenti ad S.

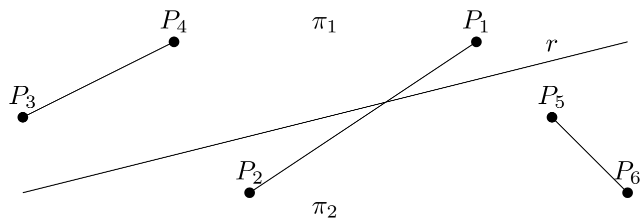


Notiamo che nell'insieme S vi sono coppie di punti AB tali che il segmento AB è tutto contenuto in S.

Una retta r divide i punti del piano non appartenenti a r in due sottoinsiemi convessi, detti **semipiani** π_1 e π_2 delimitati da r. Per definizione, i punti della retta r non appartengono ad alcuno dei semipiani π_1 e π_2 da essa delimitati.

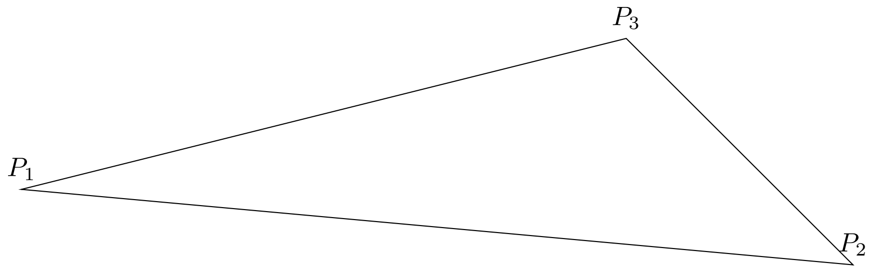


Siano dati due semipiani π_1 e π_2 delimitati da una retta r e due punti P e Q non appartenenti ad r. Nel caso in cui P e Q appartengono allo stesso semipiano allora il segmento di estremi P e Q è tutto contenuto nel semipiano stesso (in particolare il segmento non ha punti in comune con r); nel caso in cui P e Q non appartengono allo stesso semipiano allora il segmento di estremi P e Q contiene un punto di r.



B.3 Poligoni

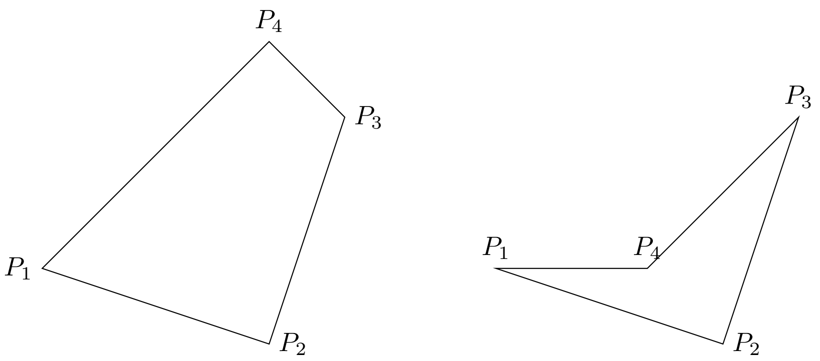
Dati tre punti P_1, P_2 e P_3 chiamiamo **triangolo** $P_1P_2P_3$ l'insieme formato dai tre punti P_1, P_2, P_3 (che si dicono **vertici** del triangolo) e dai tre segmenti P_1P_2, P_2P_3 e P_3P_1 (che si dicono **lati** del triangolo).



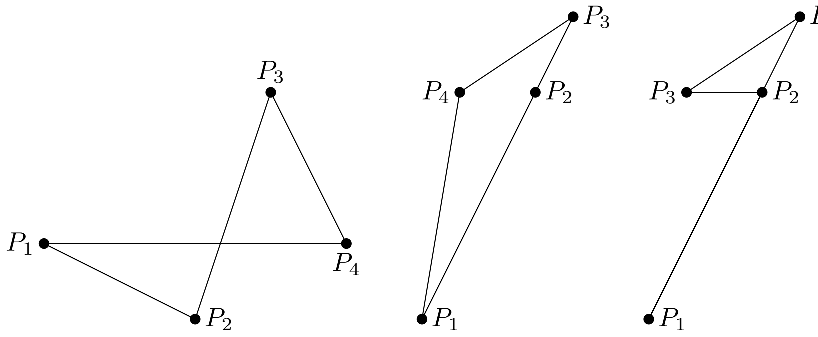
Nella figura precedente i tre vertici del triangolo sono non allineati. Quando i tre vertici sono allineati il triangolo si dice **degenere**.

L'insieme delimitato dai lati di un triangolo non degenere è un insieme convesso. I suoi punti si dicono **interni** al triangolo.

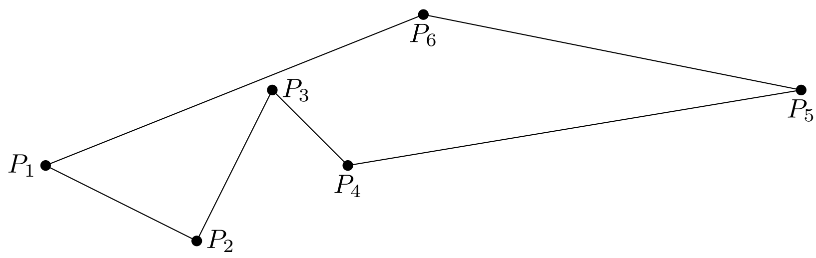
Dati quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4 chiamiamo **quadrilatero** $P_1P_2P_3P_4$ l'insieme formato dai quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4 (che si dicono **vertici** del quadrilatero) e dai quattro segmenti P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 e P_4P_1 (che si dicono **lati** del quadrilatero.



Nelle due figure precedenti lati differenti del quadrilatero non hanno alcun punto in comune e nessun vertice appartiene a uno degli altri lati o a un loro prolungamento. Non sempre ciò avviene.



Le definizioni di triangolo e di quadrilatero si possono generalizzare. Dati n punti P_1, P_2, ..., P_n, chiamiamo **poligono** $P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ l'insieme formato dagli n punti P_1, P_2, ..., P_n, (che si dicono **vertici** del poligono) e dagli n segmenti P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ e P_nP_1 (che si dicono **lati** del poligono.



B.4 Distanze tra punti

Dati due punti distinti U_1 e U_2 del piano, possiamo considerare la **distanza** tra i punti con **unità di misura** U_1U_2. La distanza tra due punti A e B è un numero reale che indichiamo con il simbolo $\mathrm{d}(A,B)$. Si ha ovviamente $\mathrm{d}(U_1,U_2) = 1$. Si può dimostrare che la distanza soddisfa le proprietà:

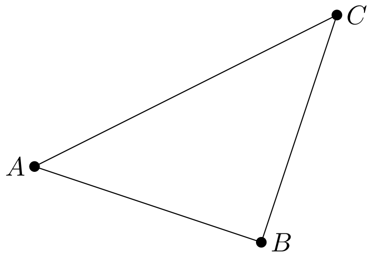
• $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(B,A)$ per ogni A e B (cioè la distanza tra due punti non dipende dall'ordine con cui sono scelti i due punti);

• $\mathrm{d}(A,B) \geq 0$ per ogni A e B (cioè la distanza tra due punti è un numero positivo o nullo);

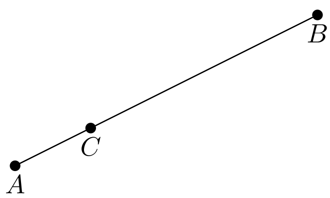
• $\mathrm{d}(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$ (cioè due punti hanno distanza nulla se e solo se essi coincidono);

• $\mathrm{d}(A,B) \leq \mathrm{d}(A,C) + \mathrm{d}(C,B)$ per ogni A, B e C (cioè la lunghezza di un lato di un triangolo, eventualmente degenere, è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due lati. Per questa ragione questa disuguaglianza si dice **triangolare**);

• $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(A,C) + \mathrm{d}(C,B)$ se e solo se il punto C appartiene al segmento chiuso AB.



$\mathrm{d}(A, B) < \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$

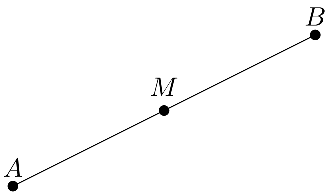


$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$

Dati due punti A e B, esiste ed è unico un punto M tale che

$$\mathrm{d}(M, A) = \mathrm{d}(M, B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, B).$$

Il punto M viene detto **punto medio** di A e B. Dall'ultima delle proprietà della distanza segue che il punto medio M appartiene al segmento AB. Dalla definizione segue inoltre che, se $A = B$, allora $M = A = B$.



B.5 Rette parallele

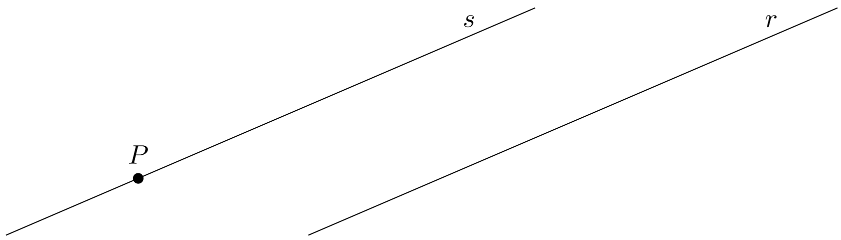
Dal momento che per due punti distinti passa una e una sola retta, si ha che due rette possono intersecarsi in:

- nessun punto (le rette si dicono **parallele non coincidenti**);
- un punto (le rette si dicono **incidenti**);
- tutti i loro punti (le rette si dicono **parallele coincidenti**).

Pertanto due rette r e s si dicono **parallele** (in simboli $r \parallel s$) se è verificata una delle seguenti condizioni:

- le due rette coincidono (in simboli $r \equiv s$), cioè tutti i punti della retta r appartengono alla retta s e, viceversa, tutti i punti della retta s appartengono alla retta r;
- le due rette non hanno alcun punto in comune.

In base al **quinto postulato di Euclide**, data una retta r e un punto P, esiste una e una sola retta s passante per P e parallela a r.



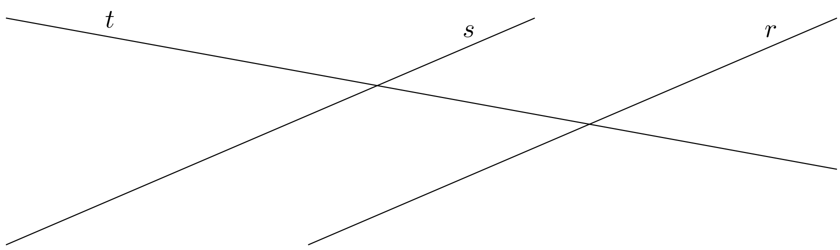
Nella figura precedente abbiamo disegnato un punto P non appartenente alla retta r. Se il punto P appartiene alla retta r, allora la retta s passante per P e parallela alla retta r è la retta r stessa.

La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza:

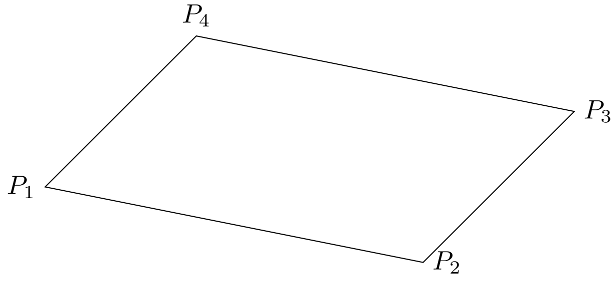
- (proprietà riflessiva) per ogni retta r si ha $r \parallel r$;
- (proprietà simmetrica) se $r \parallel s$ allora $s \parallel r$;
- (proprietà transitiva) se $r \parallel s$ e se $s \parallel t$ allora $r \parallel t$.

Notiamo che, se avessimo definito parallele due rette se e solo se esse non hanno alcun punto in comune, avremmo avuto che la relazione di parallelismo verifica la proprietà simmetrica ma **non** verifica né la proprietà riflessiva né la proprietà transitiva.

Date due rette parallele r ed s, ogni retta t incidente r è incidente anche s.



Un caso particolare di quadrilatero è il parallelogramma. Un quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ si dice **parallelogramma** se i suoi quattro vertici sono a tre a tre non allineati (in particolare sono distinti) e se $r_{P_1P_2} \parallel r_{P_3P_4}$ e $r_{P_2P_3} \parallel r_{P_4P_1}$.

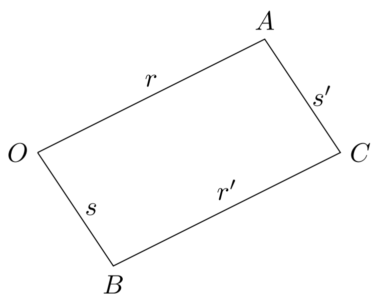


I lati opposti di una parallelogramma hanno la stessa lunghezza. Nel parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P_1, P_2) &= \mathrm{d}(P_3, P_4) \\ \mathrm{d}(P_2, P_3) &= \mathrm{d}(P_4, P_1). \end{aligned}$$

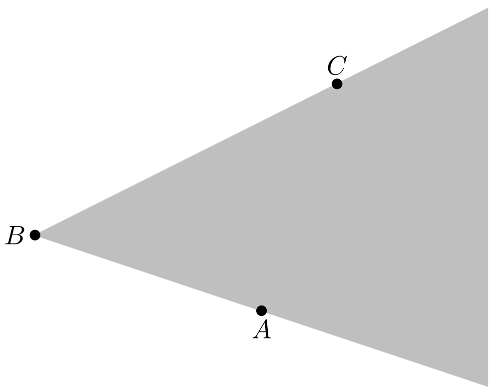
Dati tre punti O, A e B non allineati, esiste uno e un solo punto C tale che $OACB$ sia un parallelogramma. Il quarto vertice C del parallelogramma può essere così determinato:

- determiniamo la retta r' passante per B e parallela alla retta r passante per O e A;
- determiniamo la retta s' passante per A e parallela alla retta s passante per O e B;
- determiniamo infine il punto C come intersezione delle rette r' e s'.



B.6 Angoli

Siano A, B e C tre punti distinti non allineati. Chiamiamo **angolo** $\widehat{ABC}$ l'intersezione del semipiano delimitato dalla retta passante per B e A contenente C con il semipiano delimitato dalla retta passante per B e C contenente A. Il punto B viene detto **vertice** dell'angolo.



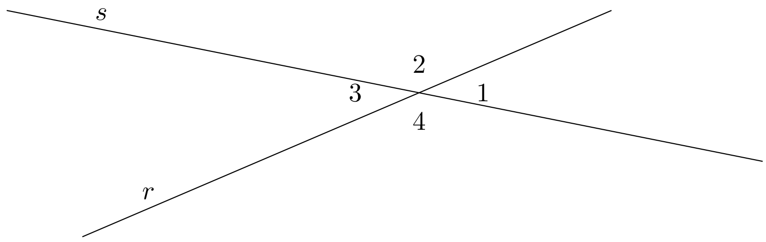
Per definizione $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBA}$ sono lo stesso angolo, mentre $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ sono angoli differenti.

I punti appartenenti alla retta passante per B e A e i punti appartenenti alla retta passante per B e C non appartengono all'angolo $\widehat{ABC}$.

Nella definizione di angolo che abbiamo appena dato abbiamo richiesto che i tre punti non siano allineati. In alcuni casi è però necessario dare la definizione di angolo anche quando i tre punti A, B e C siano allineati. In tal caso, se i punti A e C appartengono alla stessa semiretta delimitata da B, diciamo che l'angolo $\widehat{ABC}$ è, per definizione, l'**angolo nullo**. Se invece i punti A e C appartengono a diverse semirette delimitate da B, di angoli ne abbiamo due: i due semipiani delimitati dalla retta passante per i tre punti. Quando sarà necessario, specificheremo quale dei due scegliamo considerando un punto del semipiano scelto. In ogni caso diciamo che abbiamo l'**angolo piatto**.

Gli angoli da noi definiti sono tutti convessi. In alcuni casi è però necessario considerare anche angoli concavi. In altri casi, per esempio quando si fa trigonometria, è necessario definire una orientazione dell'angolo, si parlerà allora di angoli orientati. In linea di massima noi non faremo uso né degli angoli concavi né degli angoli orientati.

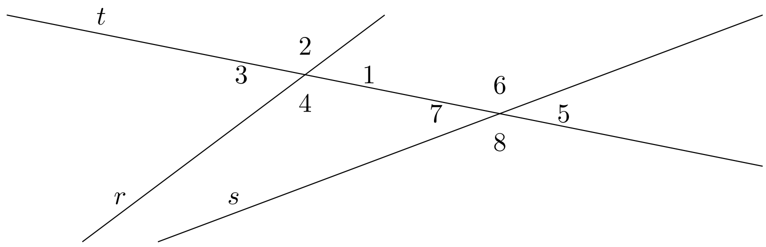
Due rette r e s che si intersecano in un punto determinano quattro angoli.



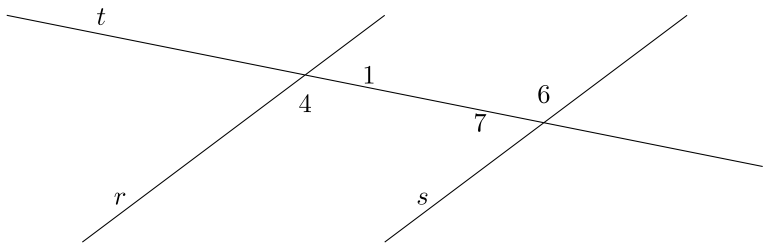
Gli angoli 1 e 3 e gli angoli 2 e 4 si dicono **opposti al vertice**. Gli angoli opposti al vertice sono uguali: pertanto gli angoli 1 e 3 sono uguali. Anche gli angoli 2 e 4 sono uguali.

Gli angoli 1 e 2 si dicono **adiacenti**. Anche gli angoli 2 e 3, gli angoli 3 e 4 e gli angoli 4 e 1 si dicono adiacenti.

Due rette r e s tagliate da una trasversale t determinano otto angoli.



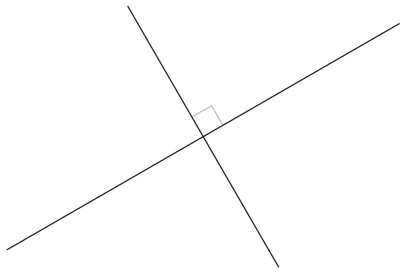
Gli angoli 1 e 7 si dicono **alterni interni**. Anche gli angoli 4 e 6 si dicono alterni interni. Se le rette r e s sono parallele allora gli angoli alterni interni sono uguali. Viceversa, se gli angoli alterni interni sono uguali, le rette sono parallele.



Nella figura qui sopra, gli angoli 1 e 7 sono uguali (e quindi sono uguali anche gli angoli 4 e 6. Le rette r e s sono pertanto parallele.

B.7 Ortogonalità

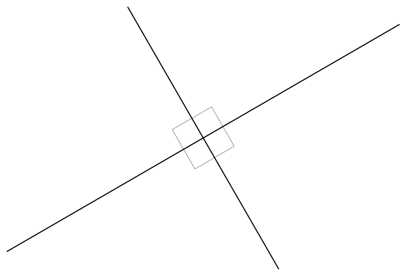
Un angolo si dice **retto** se è uguale a uno dei due angoli ad esso adiacenti.



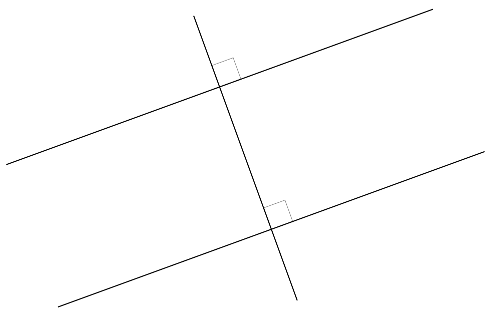
Poiché i due angoli adiacenti a un angolo sono opposti al vertice, se un angolo è uguale a uno dei suoi due angoli adiacenti, allora esso è anche uguale all'altro angolo adiacente.

Un angolo retto viene simboleggiato da un quadratino.

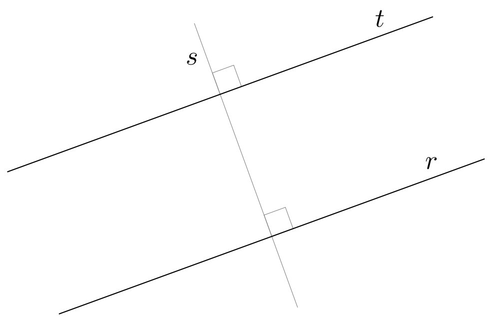
Due rette incidenti in un punto si dicono **perpendicolari** o **ortogonali** se i quattro angoli da esse formati sono tra loro uguali (e quindi sono retti).



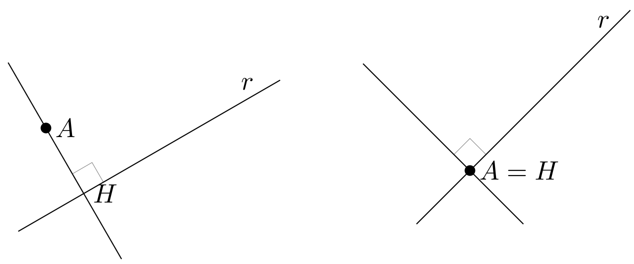
Due rette ortogonali a una stessa retta sono tra loro parallele.



Se una retta r è ortogonale a una retta s e se la retta s è a sua volta ortogonale a una retta t, allora le rette r e t sono parallele.

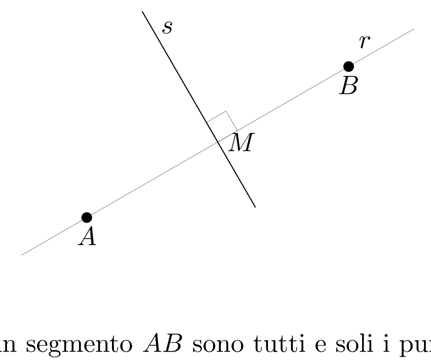


Dato un punto A e una retta r, esiste una e una sola retta n passante per A e ortogonale a r.

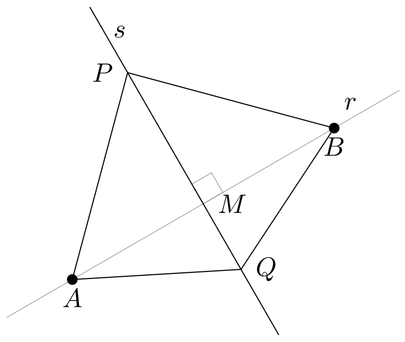


Nelle figure precedenti sono rappresentati sia il caso in cui il punto non appartenga alla retta sia il caso in cui il punto appartenga alla retta. Il punto H di intersezione tra n e r viene detto **proiezione** del punto A sulla retta r. Notiamo che nel caso in cui il punto A appartenga alla retta r la sua proiezione su r è il punto A stesso.

Dati due punti A e B distinti, sia M il loro punto medio e sia r la retta passante per A e B. La retta s passante per M e ortogonale alla retta r si dice **asse** del segmento AB.



I punti dell'asse di un segmento AB sono tutti e soli i punti equidistanti da A e da B. In altre parole, se un punto P è tale che $\mathrm{d}(P, A) = \mathrm{d}(P, B)$, allora il punto P appartiene all'asse del segmento AB e viceversa.

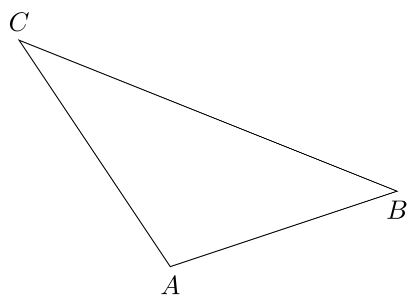


B.8 Triangoli

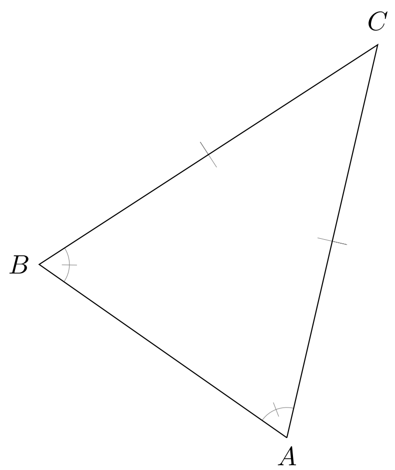
Abbiamo visto che tre punti A, B e C non allineati determinano un triangolo non degenere. D'ora in poi consideriamo solo triangoli non degeneri.

Con il termine **lati** del triangolo di solito si intendono i tre segmenti AB, BC e CA. Alcune volte però viene usata la dicitura lati del triangolo per indicare la lunghezza dei tre lati del triangolo, cioè i numeri reali positivi $\mathrm{d}(A, B)$, $\mathrm{d}(B, C)$ e $\mathrm{d}(C, A)$. Dal contesto si capisce quale delle due definizioni viene usata.

Un triangolo si dice **scaleno** se ha tutti e tre i lati differenti.

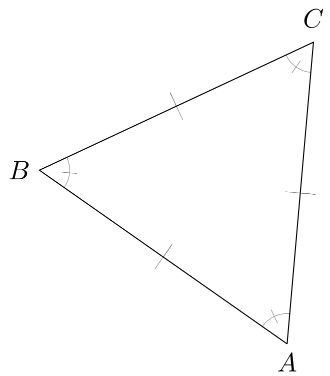


Un triangolo si dice **isoscele** se ha almeno due lati uguali.



Un triangolo isoscele ha due angoli uguali. Gli angoli uguali sono quelli opposti ai due lati uguali. Viceversa, se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha due lati uguali, è cioè isoscele. I lati uguali sono quelli opposti agli angoli uguali.

Un triangolo si dice **equilatero** se ha tutti e tre i lati uguali.

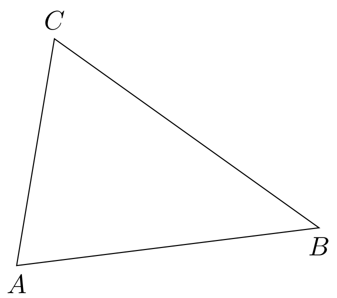


Un triangolo equilatero ha tutti e tre gli angoli uguali. Viceversa un triangolo con tutti e tre gli angoli uguali è equilatero.

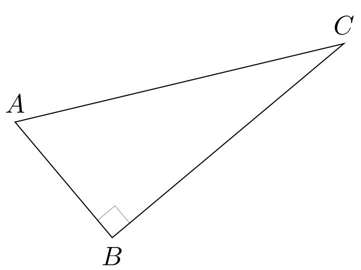
La somma degli angoli di un triangolo è uguale a un angolo piatto. Pertanto se conosciamo l'ampiezza di due angoli di un triangolo allora conosciamo anche l'ampiezza del terzo angolo.

Poiché la somma degli angoli di un triangolo è uguale a π, gli angoli di un triangolo equilatero hanno tutti ampiezza uguale a $\frac{\pi}{3}$.

Un triangolo si dice **acutangolo** se ha tutti gli angoli acuti.



Un triangolo si dice **rettangolo** se ha un angolo retto.



In un triangolo rettangolo i lati adiacenti all'angolo retto si dicono **cateti** del triangolo, mentre il lato opposto all'angolo retto si dice **ipotenusa** del triangolo.

Quindi il triangolo rettangolo della figura precedente ha come cateti i lati BC e BA e come ipotenusa il lato AC.

Per i triangoli rettangoli si ha il **teorema di Pitagora**.

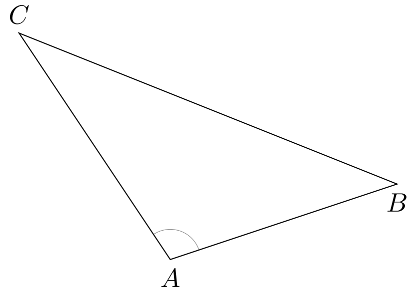
Se un triangolo di vertici A, B e C è rettangolo in b, allora si ha:

$$\mathrm{d}(A, C)^2 = \mathrm{d}(A, B)^2 + \mathrm{d}(B, C)^2.$$

Vale anche il viceversa del teorema di Pitagora: un triangolo i cui lati soddisfano la formula di cui sopra, è rettangolo in B.

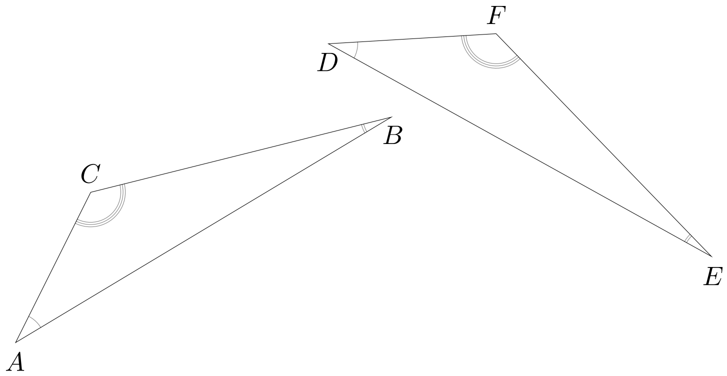
Dal teorema di Pitagora segue che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa ha lunghezza maggiore delle lunghezze dei cateti.

Un triangolo si dice **ottusangolo** se ha un angolo ottuso.



Due triangoli si dicono **uguali** se i loro lati e i loro angoli sono a due a due uguali.

Per verificare quindi se due triangoli sono uguali dobbiamo fare sei controlli.



Nella figura precedente i triangoli ABC e EFG sono uguali.

In effetti, per verificare che due triangoli siano uguali, non è necessario controllare l'uguaglianza di tutti i lati e di tutti gli angoli. Vi sono infatti i seguenti **criteri di uguaglianza dei triangoli**:

Primo criterio Due triangoli, aventi uguali due lati e l'angolo fra essi compreso, sono uguali.

Per esempio, nella figura precedente, se sappiamo che $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(D, E)$ e $\mathrm{d}(A, C) = \mathrm{d}(D, F)$ e sappiamo che l'angolo in A e l'angolo in D sono uguali, possiamo concludere che i triangoli ABC e DEF sono uguali.

Secondo criterio Due triangoli, aventi uguali un lato e gli angoli ad esso adiacenti, sono uguali.

Per esempio, nella figura precedente, se sappiamo che $\mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(E, F)$, che l'angolo in B è uguale all'angolo in E e che l'angolo in C è uguale all'angolo in F possiamo concludere che i triangoli ABC e DEF sono uguali.

Terzo criterio Due triangoli, aventi uguali i tre lati, sono uguali.

Per esempio, nella figura precedente, se sappiamo che si ha: $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(D, E)$, $\mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(E, F)$ e, infine, $\mathrm{d}(C, A) = \mathrm{d}(F, D)$ possiamo concludere che i triangoli ABC e DEF sono uguali.

Notiamo che due triangoli aventi rispettivamente uguali tre angoli, **non** sono necessariamente uguali.

Si pensi, per esempio, a due triangoli equilateri aventi lati di lunghezza differente. I due triangoli, pur avendo ovviamente gli angoli uguali (hanno tutti ampiezza uguale a $\frac{\pi}{3}$ non sono uguali.

Notiamo infine che, poiché la somma degli angoli di un triangolo è uguale a un angolo piatto, se due triangoli hanno due angoli rispettivamente uguali, allora essi hanno uguale anche il terzo angolo.

B.9 Distanze tra insiemi

Dati due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, definiamo **distanza** tra gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ l'estremo inferiore delle distanze $\mathrm{d}(A, B)$, dove A è un qualsiasi punto di $\mathcal{A}$ e B è un qualsiasi punto di $\mathcal{B}$. Indichiamo la distanza tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con il simbolo $\mathrm{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Quindi:

$$\mathrm{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \coloneqq \inf_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \mathrm{d}(A, B).$$

In altre parole, per determinare la distanza tra i due insiemi, calcoliamo le distanze tra tutti i punti A di $\mathcal{A}$ e tutti i punti B di $\mathcal{B}$ e quindi prendiamo l'estremo inferiore di tutte queste distanze.

Osserviamo innanzitutto che dalla definizione di distanza deriva immediatamente che, se due insiemi hanno intersezione non vuota, allora la loro distanza è uguale a 0. Non è però vero il viceversa. Esistono cioè insiemi che, pur avendo distanza uguale a 0, hanno intersezione vuota. Si pensi, per esempio, all'insieme formato da un'iperbole e all'insieme formato dai punti di un suo asintoto. L'iperbole e un suo asintoto non hanno alcun punto in comune, eppure la distanza tra i due insiemi è uguale a 0. Osserviamo a questo proposito che, nel definire la distanza tra due insiemi, abbiamo considerato l'insieme inferiore e non il minimo delle distanze punti del primo insieme e punti del secondo insieme. Nel caso dell'iperbole e di un suo asintoto, non esiste il minimo ma esiste l'estremo inferiore.

Torniamo alla nostra definizione di distanza tra due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Nel caso in cui almeno uno dei due insiemi sia formato da infiniti punti, la definizione di distanza richiederebbe il calcolo di infinite distanze. In effetti, in moltissimi casi, il calcolo della distanza è molto più agevole perché si possono determinare un punto $\bar{A}$ su $\mathcal{A}$ e un punto $\bar{B}$ su $\mathcal{B}$ di distanza minima, verificanti cioè la seguente proprietà:

$$\mathrm{d}(\bar{A}, \bar{B}) \leq \mathrm{d}(A, B) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}.$$

In tal caso si ha quindi:

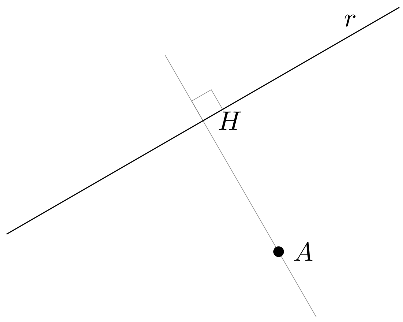
$$\mathrm{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{d}(\bar{A}, \bar{B}).$$

Vediamo due casi.

- Distanza tra un punto A e una retta r.

Si dimostra facilmente che, indicata con H la proiezione di A su r, si ha:

$$\mathrm{d}(A, H) \leq \mathrm{d}(A, Q) \text{ per ogni } Q \in r.$$



Pertanto si ha

$$\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H).$$

Notiamo che, se il punto A appartiene alla retta r, si ha $\mathrm{d}(A, r) = 0$.

- Distanza tra due rette r e s.

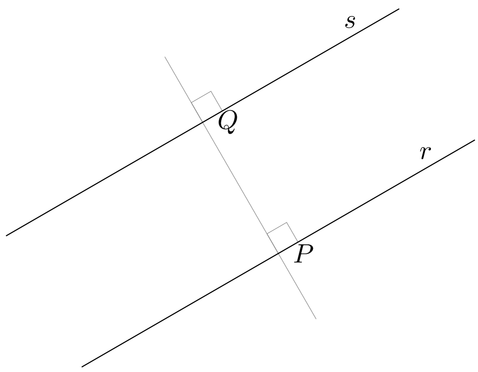
Se le due rette sono incidenti o parallele coincidenti, hanno intersezione non vuota e quindi la loro distanza è uguale a 0. Consideriamo ora il caso in cui le rette r e s sono parallele distinte. Osserviamo che, fissato un qualsiasi punto P di r e la sua proiezione Q su s, si ha:

$$\mathrm{d}(P, Q) \leq \mathrm{d}(P', S')$$

per ogni punto P' di r e per ogni punto S di s.

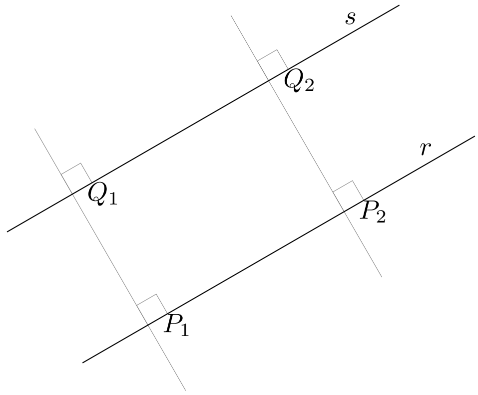
Abbiamo pertanto:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(P, Q).$$



Osserviamo che, nel calcolare la distanza tra le due rette, abbiamo scelto un punto P sulla retta r e quindi a prima vista si potrebbe pensare che il risultato dipenda dalla scelta del punto Psulla retta r. In effetti ciò non accade. Scelti infatti due punti distinti P_1 e P_2 sulla retta r, siano Q_1 e Q_2 le loro proiezioni sulla retta s. Abbiamo allora il rettangolo $P_1P_2Q_2Q_1$. In un parallelogramma i lati opposti sono uguali, quindi

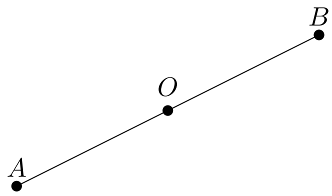
$$d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2).$$



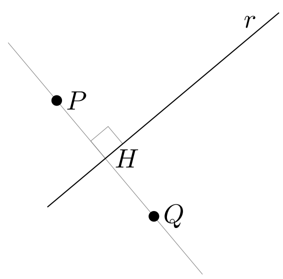
Si ha $d(r, s) = d(s, r)$. Infatti, se la proiezione di un punto $P \in r$ sulla retta s è il punto H, si ha che la proiezione del punto $H \in s$ sulla retta r è il punto P.

B.10 Simmetrie

Dati due punti O ed A il **simmetrico** di A rispetto a O è l'unico punto B del piano tale che O sia il punto medio di A e B. Notiamo che il simmetrico di O rispetto a O stesso è O.



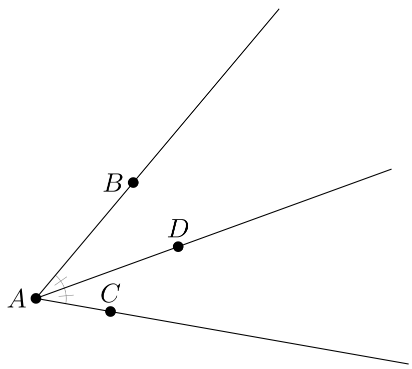
Dato un punto P e una retta r chiamiamo **simmetrico** di P rispetto alla retta r il punto Q tale che il punto P e il punto Q hanno come punto medio la proiezione del punto P sulla retta r.



Notiamo che, se il punto P appartiene alla retta r, il suo simmetrico rispetto a r è il punto P stesso.

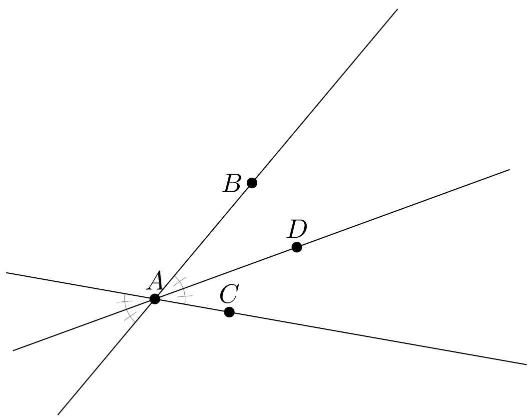
B.11 Bisettrici

Dato un angolo $\widehat{BAC}$, chiamiamo **bisettrice** dell'angolo, la semiretta con origine in A passante per D, tale che gli angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ siano uguali.

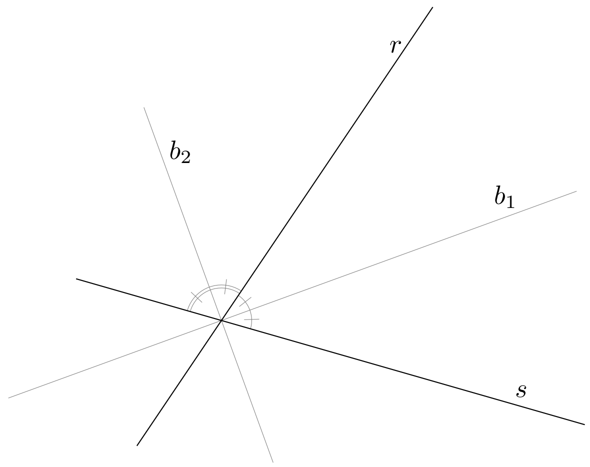


Spesso per bisettrice si intende tutta la retta passante per A e D. Dal contesto sarà chiaro quale delle due accezioni (semiretta o retta) di bisettrice stiamo usando.

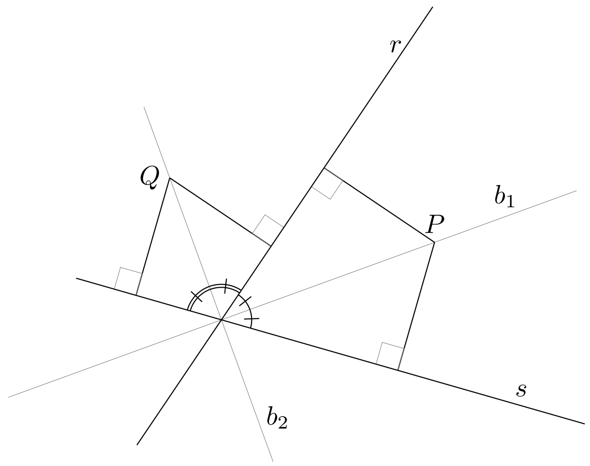
Notiamo che la bisettrice (intesa come retta) dell'angolo $\widehat{BAC}$ è anche bisettrice dell'angolo opposto al vertice dell'angolo $\widehat{BAC}$.



Siano date due rette r e s che si intersecano in un punto A. Si definiscono **bisettrici** delle rette r e s le rette b_1 e b_2 passanti per A tali che gli angoli da esse formati con le rette r e s siano uguali.

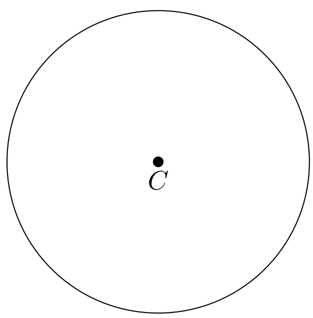


Le bisettrici di due rette sono tra loro ortogonali. L'insieme dei punti delle due bisettrici delle rette r e s coincide con l'insieme dei punti equidistanti dalle rette r e s. In altre parole, un punto P appartiene a una delle due bisettrici di r e s se e solo se $\mathrm{d}(P, r) = \mathrm{d}(P, s)$.



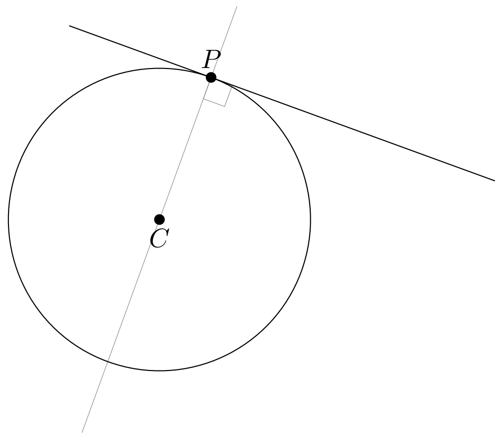
B.12 Circonferenze

Dato un punto C e un numero reale $r \geq 0$, chiamiamo **circonferenza** di **centro** C e **raggio** r l'insieme dei punti P aventi distanza da C uguale a r.

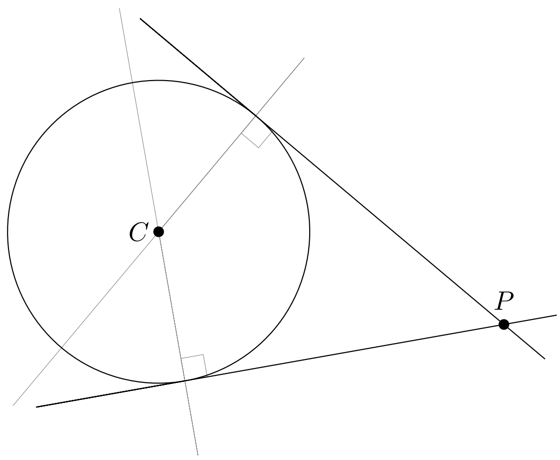


Notiamo che la circonferenza di centro C e raggio uguale a 0 è data dal solo punto C.

Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro C e raggio $r > 0$ e sia P un punto di $\mathcal{C}$. Si ha chiaramente che qualsiasi retta passante per P ha distanza dal centro C minore o uguale a r. Si verifica facilmente che esiste ed è unica una retta passante per P che ha distanza da C uguale a r. Tale retta è la retta passante per P e ortogonale alla retta passante per C e per P. Essa viene chiamata retta **tangente** alla circonferenza $\mathcal{C}$ in P.



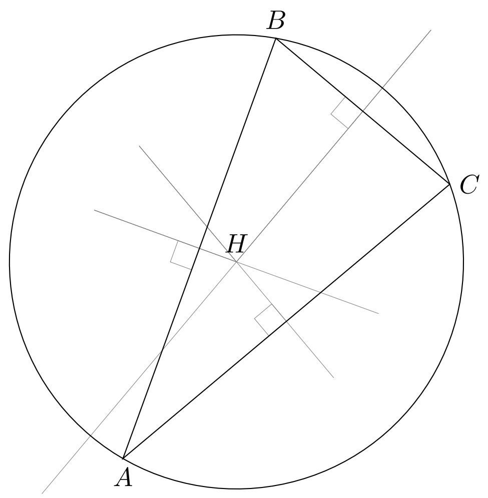
Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro C e raggio r e sia P un punto tale che $\mathrm{d}(P, C) > r$ (il punto P è quindi un punto **esterno** alla circonferenza). Allora esistono due rette passanti per P tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$.



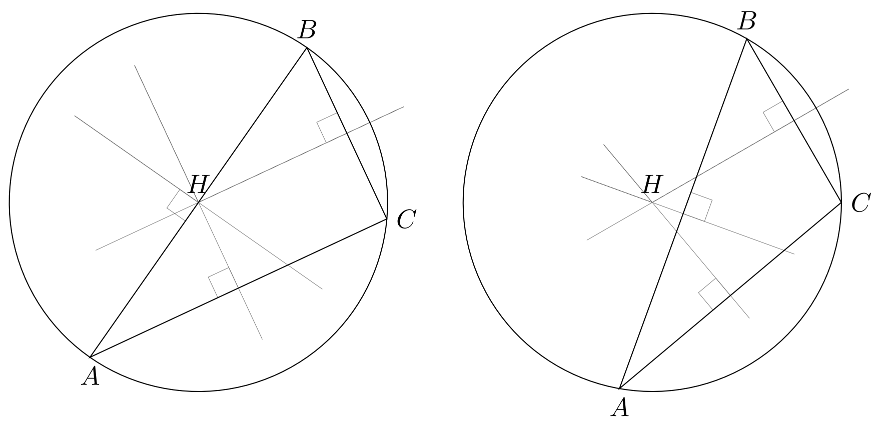
Ricordiamo infine che, una circonferenza di raggio uguale a r ha lunghezza uguale a $2\pi r$, dove π è il numero irrazionale pi greco e l'area della porzione di piano racchiusa dalla circonferenza (che viene chiamata **cerchio**) è uguale a πr^2.

B.13 Punti notevoli dei triangoli

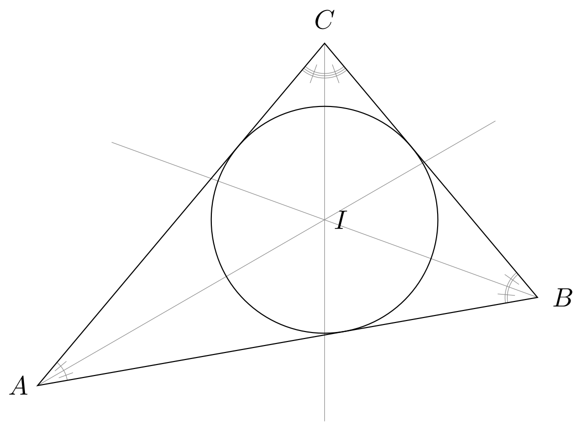
Gli assi dei tre lati di un triangolo si chiamano **assi** del triangolo. Poiché l'asse di un segmento è dato da tutti e soli i punti equidistanti dai suoi estremi, abbiamo che i tre assi di un triangolo si intersecano in un punto H equidistante dai vertici del triangolo. Esso è quindi il centro della circonferenza passante per A, B e C. Questa circonferenza si dice **circoscritta** al triangolo ABC. Il punto H viene detto **circocentro** del triangolo ABC.



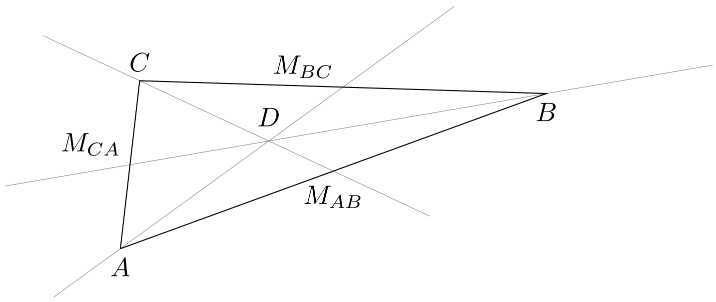
Notiamo che nel caso in cui il triangolo sia rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa mentre nel caso in cui il triangolo sia ottusangolo il circocentro è un punto esterno al triangolo.



Dato un triangolo ABC, consideriamo le bisettrici dei tre angoli del triangolo. Poiché i punti di una bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo, abbiamo che le bisettrici interne di un triangolo si intersecano in un punto I equidistante dalle tre rette che contengono i lati del triangolo. Pertanto il punto I è il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ tangente alle tre rette contenenti i tre lati del triangolo. La circonferenza $\mathcal{C}$ viene detta **inscritta** nel triangolo; il punto I viene chiamato **incentro** del triangolo.

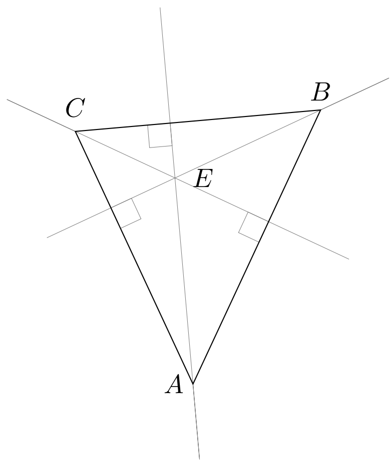


Dato un triangolo ABC, chiamiamo **mediana** passante per il vertice A del triangolo la retta passante A e per il punto medio di B e C.



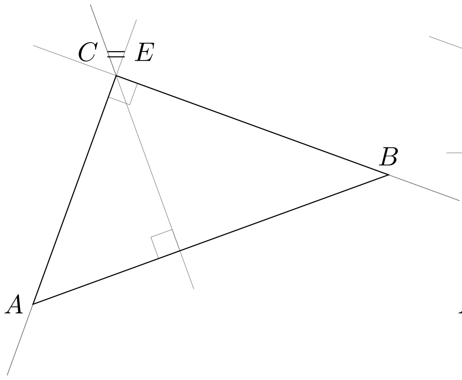
Si può dimostrare che le tre mediane di un triangolo si intersecano in un punto che chiamiamo **baricentro**.

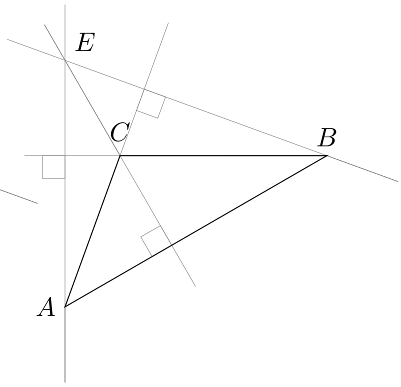
Dato un triangolo ABC, chiamiamo **altezza** del triangolo passante per A la retta passante per A e ortogonale alla retta passante per B e C. In modo analogo si definiscono le altre due altezze del triangolo.



Si può dimostrare che le tre altezze si intersecano in un punto detto **ortocentro** del triangolo.

Notiamo che nel caso in cui il triangolo sia rettangolo l'ortocentro è il vertice del triangolo corrispondente all'angolo retto mentre nel caso in cui il triangolo sia ottusangolo l'ortocentro è un punto esterno al triangolo.



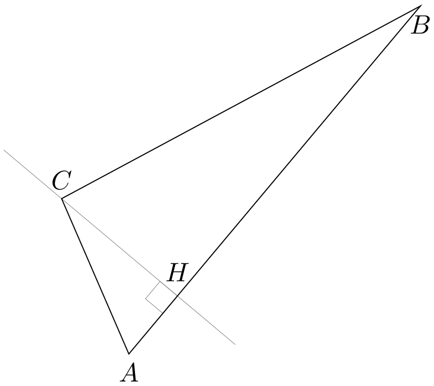


Il termine **altezza** di un triangolo viene usato per indicare due cose differenti. Si può indicare, come abbiamo fatto sopra, la retta passante per un vertice del triangolo e ortogonale alla retta contenente il lato opposto. Con il termine altezza di un triangolo relativa a un suo vertice si intende spesso la distanza tra il vertice e la sua proiezione sulla retta contenente il lato opposto. Dal contesto si capisce quale delle due definizioni viene usata.

L'**area** $\mathcal{S}$ di un triangolo è uguale a

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

dove con b indichiamo la lunghezza di un lato del triangolo (che di solito viene chiamato **base** del triangolo) e con h l'altezza relativa al vertice opposto al lato scelto.



Dato un triangolo ABC, la sua area è quindi uguale a

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(A, B) \cdot \mathrm{d}(C, r)$$

dove con r abbiamo indicato la retta passante per A e B.

Notiamo inoltre che la scelta del vertice da cui far passare l'altezza e la relativa base sono arbitrarie. In altre parole ogni lato del triangolo può essere scelto come base.

Dato un triangolo avente lati di lunghezza a, b e c, indicato con p il **semiperimetro** del triangolo, cioè $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, si ha che l'area del triangolo è data dalla **formula di Erone**:

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

APPENDICE C

Richiami di geometria dello spazio

Ricordiamo alcuni argomenti di geometria dello spazio che dovrebbero essere stati studiati nei corsi pre-universitari. Non diamo le dimostrazioni delle proposizioni enunciate.

Per comprendere quel che segue si consiglia di aiutarsi con disegni che rappresentino schematicamente ciò che descriviamo a parole.

C.1 Punti, rette e piani

La geometria dello spazio nasce come modello dello spazio che ci circonda. Tuttavia la geometria dello spazio, analogamente alla geometria del piano, può essere introdotta anche in modo assiomatico. Vengono cioè introdotti alcuni "enti primitivi" legati da "relazioni primitive" per i quali si suppone che sussistano certe proprietà dette "assiomi" o "postulati". Gli enti primitivi, le relazioni primitive e gli assiomi sono schematizzazioni dello spazio che ci circonda.

Sfruttando gli assiomi, vengono poi dimostrate altre proprietà, dette "proposizioni" o "teoremi". Gli **enti primitivi** della geometria dello spazio sono:

- i punti, che di solito vengono indicati con lettere maiuscole: A, B, P, ...;
- le rette, che di solito vengono indicate con lettere minuscole: r, s, ...;
- i piani, che di solito vengono indicati con lettere greche minuscole: α, β, π, ...

C.2 La relazione di appartenenza

Gli enti primitivi sono legati da alcune **relazioni primitive** di:

- **appartenenza di un punto a una retta** o, con altre parole, **passaggio di una retta per un punto**;

• **appartenenza di un punto a un piano** o, con altre parole, **passaggio di un piano per un punto**.

Vi sono poi altre relazioni primitive che per il momento non introduciamo.

Le relazioni di appartenenza verificano i seguenti **assiomi di appartenenza**:

1. dati due punti distinti, esiste una e una sola retta passante per essi;

2. ogni retta contiene almeno due punti;

3. esistono almeno tre punti non allineati;

4. dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano passante per essi;

5. ogni piano ha almeno un punto che gli appartiene;

6. se due punti di una retta appartengono a un piano allora ogni punto della retta appartiene al piano (si dice allora che **la retta è contenuta (o giace) nel piano** o che **il piano passa per la retta**);

7. se due piani hanno in comune un punto allora hanno in comune almeno un altro punto (e, quindi, per l'assioma precedente hanno in comune la retta passante per i due punti);

8. vi sono almeno quattro punti che non appartengono a uno stesso piano.

Dagli assiomi precedenti derivano i seguenti teoremi:

Teorema C.1 *Dato un punto A e una retta r non passante per A, esiste uno e uno solo piano passante per A e per r.*

Teorema C.2 *Date due rette incidenti in un punto, esiste uno e un solo piano passante per entrambe.*

C.3 Semirette, segmenti, semipiani, semispazi

Come già detto, oltre alle relazioni di appartenenza, esistono altre relazioni primitive. Gli assiomi che le caratterizzano (e che non daremo qui esplicitamente) permettono di dare un senso al concetto intuitivo di punto compreso tra altri due punti. Grazie a ciò, si possono dare le definizioni di **semiretta**, **segmento**, **insieme convesso** e di **semipiano** come nella geometria del piano. Le proprietà relative ad essi sono analoghe a quelle della geometria del piano.

Si può inoltre dimostrare che un piano π divide i punti dello spazio in due sottoinsiemi, detti **semispazi** S_1 e S_2 **delimitati dal piano** π. Per definizione i punti del piano π non appartengono ad alcuno dei due semispazi da esso delimitati. I due semispazi sono caratterizzati dalla seguente proprietà:

• se due punti A e B appartengono a uno stesso semispazio, allora tutti i punti del segmento AB appartengono al semispazio (in altre parole ogni semispazio è convesso);

• se due punti A e B appartengono a semispazi differenti, allora il segmento AB interseca il piano π in un punto.

C.4 Parallelismo tra due rette

Definizione C.3 Due rette r e s dello spazio si dicono:

- **sghembe** se non esiste alcun piano che le contiene;
- **complanari** se esiste un piano che le contiene entrambe.

Due rette complanari r e s si dicono:

- **incidenti** se hanno un solo punto in comune;
- **parallele distinte** se non hanno alcun punto in comune (in simboli $r \parallel s$ e $r \neq s$);
- **parallele coincidenti** se hanno tutti i punti in comune (in simboli $r \parallel s$ e $r = s$). △

Osservazione C.4 Pertanto due rette sono parallele se e solo se coincidono oppure esiste un piano che le contiene entrambe e non hanno alcun punto in comune. △

Teorema C.5 *La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza.*

Sappiamo che nella geometria del piano si ha il:

Postulato C.6 (quinto postulato di Euclide) Data una retta r e un punto P, esiste una e una sola retta passante per P e parallela a r. △

Da questo postulato deriva il seguente

Teorema C.7 *Dato nello spazio un punto P e una retta r, esiste una e una sola retta passante per il punto P e parallela a r.*

La dimostrazione di questo teorema è interessante ma semplice. Consigliamo il lettore di farla.

Abbiamo poi il:

Teorema C.8 *Date due rette parallele non coincidenti, esiste uno e un solo piano passante per entrambe.*

C.5 Parallelismo tra due piani

Definizione C.9 Dati due piani π e σ, si dicono:

- **incidenti** se essi hanno in comune tutti e soli i punti di una retta;
- **paralleli distinti** se essi non hanno alcun punto in comune (in simboli $\pi \parallel \sigma$, $\pi \neq \sigma$);
- piani **paralleli coincidenti** se essi hanno tutti i loro punti in comune (in simboli $\pi \parallel \sigma$, $\pi = \sigma$). △

Osservazione C.10 Il settimo assioma di appartenenza (vedi paragrafo C.2) assicura che due piani sono coincidenti o incidenti (in una retta) o paralleli distinti. △

Teorema C.11 *La relazione di parallelismo tra piani è una relazione di equivalenza.*

Teorema C.12 *Dato un punto P e un piano π, esiste uno e un sol piano σ passante per P e parallelo a π.*

C.6 Parallelismo tra una retta e un piano

Definizione C.13 Un piano π e una retta r si dicono:

- **incidenti** se essi hanno in comune un solo punto;

- **paralleli** se

– non hanno in comune alcun punto: in tal caso si dice che la retta r è parallela al piano π e non è contenuta nel piano π (in simboli $r \parallel \pi$ e $r \nsubseteq \pi$);

– essi hanno in comune tutti i punti di r: in tal caso si dice che la retta r è parallela al piano π ed è contenuta nel piano π (in simboli $r \parallel \pi$ e $r \subseteq \pi$) △

Teorema C.14 *Siano π e σ due piani. Se π è parallelo a due rette r e s incidenti contenute entrambe nel piano σ, allora $\pi \parallel \sigma$.*

Teorema C.15 *Dati un punto P e due rette r e s non parallele, esiste uno e un solo piano π passante per P e parallelo a r e s. Il piano π è il piano passante per le rette incidenti r' e s' dove r' è la retta passante per P e parallela a r mentre s' è la retta passante per P e parallela a s.*

Come caso particolare del teorema precedente abbiamo:

Teorema C.16 *Date due rette non parallele r e s esiste uno e un sol piano π passante per r e parallelo a s. Il piano π viene determinato nel seguente modo: si considera un qualsiasi punto P della retta r, si prende la retta s' parallela alla retta s e passante per P; le rette r e s' sono incidenti e quindi determinano il piano passante per esse. Il piano trovato è appunto il piano cercato π.*

Teorema C.17 *Date due rette r e s sghembe, esistono due piani π e σ paralleli tali che π passa per r e σ passa per s.*

Il piano π è il piano passante per r e parallelo a s. Il piano σ è il piano passante per s e parallelo a r.

C.7 Parallelogrammi, angoli

Molti concetti della geometria del piano si estendono senza problemi alla geometria dello spazio. Ne riportiamo alcuni.

Notiamo che tre punti distinti non allineati determinano un piano e quindi la definizione di **parallelogramma** nello spazio si riconduce a quella della geometria del piano.

Un angolo è determinato da un punto detto **vertice** e da altri due punti distinti tra loro e distinti dal vertice. Se i tre punti non sono allineati per essi passa un solo piano. Se i tre punti sono allineati per essi passano infiniti piani. In ogni caso la definizione di **angolo** nella geometria dello spazio si riporta alla definizione di angolo nella geometria del piano.

In particolare la definizione di angolo **retto** è uguale a quella della geometria del piano.

C.8 Ortogonalità

Definizione C.18 Siano date due rette r e s. Sia P un punto nello spazio e siano r' e s' le rette passanti per P e parallele alle rette r e s rispettivamente. Le rette r' e s', poiché si intersecano in P, sono contenute in un piano. Se gli angoli formati dalle rette r' e s' sono retti diciamo che le rette r e s sono **perpendicolari** o **ortogonali** (in simboli $r \perp s$). △

Osservazione C.19 Notiamo che due rette r e s possono essere ortogonali anche se sono sghembe. △

Osservazione C.20 Per dare la definizione di ortogonalità tra rette nello spazio ci siamo ricondotti alla nozione di ortogonalità tra rette nel piano. Eppure vi sono significative differenze. Eccone due:

- data una retta r e un punto P, esistono infinite rette passanti per P e ortogonali a r;

- esistono rette ortogonali e incidenti a una stessa retta che non sono parallele tra loro. △

Definizione C.21 Un piano π e una retta r si dicono **perpendicolari** o **ortogonali** (in simboli $r \perp \pi$) se la retta r è ortogonale a tutte le rette che giacciono su π. △

Teorema C.22 *Se una retta r è ortogonale a due rette non parallele che giacciono su un piano π, allora r è ortogonale a π.*

Teorema C.23 *Dato un piano π e un punto P, esiste ed è unica una retta passante per P e ortogonale a π.*

Teorema C.24 *Data una retta r e un punto P, esiste ed è unico un piano π passante per P e ortogonale a r.*

Vogliamo ora dare la definizione di piani tra loro ortogonali. Sebbene ognuno abbia un'idea intuitiva di quando due piani siano tra loro ortogonali, la definizione non è semplice.

Facciamo un esempio tratto dalla vita quotidiana. Consideriamo una stanza a base rettangolare (quasi tutte le stanze sono di questo tipo). Consideriamo due pareti adiacenti. Esse si intersecano quindi in uno spigolo della stanza. Per ognuno di noi le due pareti sono tra loro ortogonali. Va bene. Ma quale è la definizione di ortogonalità? Per poter dare una definizione consideriamo il pavimento della stanza. Esso è ortogonale allo spigolo della stanza. Le intersezioni del pavimento con le due pareti formano un angolo retto. Tutto ciò ci permette di dare la seguente

Definizione C.25 Siano dati due piani π e σ che si intersecano in una retta r. Sia τ un piano ortogonale alla retta r. Siano p e s le rette in cui il piano τ interseca rispettivamente i piani π e σ.

I piani π e σ si dicono **perpendicolari** o **ortogonali** se le rette p e s sono tra loro ortogonali. △

Osservazione C.26 Si faccia bene attenzione alla definizione appena data. In essa abbiamo preso un piano τ ortogonale alla retta r. La condizione che τ sia ortogonale a r è essenziale. Si può infatti dimostrare che, se si intersecano due piani tra loro ortogonali con un piano qualsiasi, si ottengono due rette che sono tra loro ortogonali solo se il piano è ortogonale alla retta r. △

Teorema C.27 *Un piano π è ortogonale ad un piano σ se e solo se il piano π contiene una retta ortogonale al piano σ.*

Teorema C.28 *Un piano π è ortogonale ad un piano σ se e solo se, presa una retta r ortogonale a π e una retta s ortogonale a σ, le rette r e s sono ortogonali.*

Teorema C.29 *Dato un piano π e una retta r contenuta in π, esiste uno ed solo piano σ passante per r e ortogonale a π. Il piano σ può essere determinato nel seguente modo.*

- *Si considera un qualsiasi punto P della retta r.*
- *Si considera la retta s passante per P e ortogonale a π.*
- *Il piano σ cercato è il piano passante per r e s.*

Teorema C.30 *Date due rette r e s sghembe, esiste una e una sola retta n incidente e ortogonale ad entrambe le rette. La retta n viene determinata nel seguente modo.*

- *Si considerano i piani paralleli π e σ con $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \sigma$ (vedere teorema C.17).*
- *Si considera il piano α tale che $r \subseteq \alpha$ e $\alpha \perp \pi$ (vedere teorema C.29).*
- *Si considera il piano α' tale che $s \subseteq \alpha'$ e $\alpha' \perp \sigma$.*
- *La retta intersezione dei piani α e α' è proprio la retta cercata.*

Definizione C.31 Dati due punti A e B distinti, sia M il loro punto medio e sia r la retta passante per A e B. Il piano π passante per M e ortogonale alla retta r si dice **piano asse** del segmento AB. △

Teorema C.32 *I punti del piano asse di un segmento AB sono tutti e soli i punti equidistanti da A e da B. In altre parole, se un punto P è tale che* $\mathrm{d}(P, A) = \mathrm{d}(P, B)$*, allora il punto P appartiene al piano asse del segmento AB e viceversa.*

C.9 Distanze tra insiemi

La definizione di distanza tra due insiemi nello spazio è uguale alla definizione data nel caso di insiemi del piano.

Definizione C.33 Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due insiemi. Definiamo **distanza** tra gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ l'estremo inferiore delle distanze $\mathrm{d}(A, B)$, dove A è un punto di $\mathcal{A}$ e B è un punto di $\mathcal{B}$. △

Quindi, per determinare la distanza tra i due insiemi, calcoliamo le distanze tra ogni punto A di $\mathcal{A}$ e ogni punto B di $\mathcal{B}$ e quindi prendiamo l'estremo inferiore di tutte queste distanze.

Pertanto, nel caso in cui almeno uno dei due insiemi sia formato da infiniti punti, questa definizione di distanza richiederebbe il calcolo di infinite distanze. In effetti, così come per la geometria del piano, in moltissimi casi, il calcolo della distanza è molto più agevole perché si possono determinare un punto $\bar{A}$ su $\mathcal{A}$ e un punto $\bar{B}$ su $\mathcal{B}$ di distanza minima, verificanti cioè la seguente proprietà:

$$\mathrm{d}(\bar{A}, \bar{B}) \leq \mathrm{d}(A, B) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}.$$

In tal caso si ha quindi:

$$\mathrm{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{d}(\bar{A}, \bar{B}).$$

Prima di vedere alcuni di questi casi abbiamo bisogno di qualche definizione:

Definizione C.34 Dato un punto P e una retta r, chiamiamo **proiezione** del punto P sulla retta r il punto H di intersezione della retta r con il piano π passante per P e ortogonale a r. △

Definizione C.35 Dato un punto P e un piano π, chiamiamo **proiezione** del punto P sul piano π il punto H di intersezione del piano π con la retta r passante per P e ortogonale a π. △

Si dimostrano facilmente i seguenti:

Teorema C.36 *Dato un punto P e una retta r sia H la proiezione di P su r. Si ha:*

$$\mathrm{d}(P, H) \leq \mathrm{d}(P, Q) \textit{ per ogni } Q \in r.$$

Quindi:

$$\mathrm{d}(P, r) = \mathrm{d}(P, H).$$

Teorema C.37 *Dato un punto P e un piano π, sia H la proiezione del punto P sul piano π. Si ha:*

$$\mathrm{d}(P, H) \leq \mathrm{d}(P, Q) \text{ per ogni } Q \in \pi.$$

Quindi:

$$\mathrm{d}(P, \pi) = \mathrm{d}(P, H).$$

Teorema C.38 *Siano dati due piani π e σ. Si ha:*

- *se i piani sono coincidenti o incidenti in una retta si ha $\mathrm{d}(\pi, \sigma) = 0$;*

- *se i piani sono paralleli non coincidenti allora: $\mathrm{d}(\pi, \sigma) = \mathrm{d}(A, \sigma)$, dove A è un punto qualsiasi di π.*

Osservazione C.39 Dal teorema appena dato sembra, a prima vista, che la distanza dipenda dalla scelta del punto A sul piano π. Potrebbe infatti a priori accadere che, scelti due punti A e B sul piano π, le loro distanze dal piano σ siano diverse. In effetti si può dimostrare che, dal momento che i piani π e σ sono paralleli, ciò non accade. Si consiglia di fare una figura. Il calcolo della distanza tra due piani paralleli non dipende quindi dalla scelta del punto A sul piano π. △

Teorema C.40 *Sia π un piano e r una retta. Si ha:*

- *Se la retta r è incidente o se è contenuta nel piano π allora $\mathrm{d}(r, \pi) = 0$;*

- *Se la retta r e il piano π sono paralleli con r non contenuta in π, allora si ha $\mathrm{d}(r, \pi) = \mathrm{d}(A, \pi)$ dove A è un punto qualsiasi di r.*

Osservazione C.41 Anche in questo caso si dimostra facilmente (fare figura) che, poiché la retta e il piano sono paralleli, qualunque punto A si prenda sulla retta r, il risultato è sempre lo stesso. △

Teorema C.42 *Siano r e s due rette. Si ha:*

- *se r e s sono incidenti o coincidono, $\mathrm{d}(r, s) = 0$;*

- *se r e s sono parallele distinte, $\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(A, H)$ dove A è un punto qualsiasi di r e H è la sua proiezione sulla retta s;*

- *se r e s sono sghembe, $\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(R, S)$ dove $R = r \cap n$ e $S = s \cap n$ con n retta incidente e ortogonale alla rette r e s (vedere teorema C.30).*

Osservazione C.43 Nel caso in cui le rette r e s sono sghembe, il calcolo della loro distanza appare, a prima vista, abbastanza lungo. Infatti si devono determinare i punti di intersezione R e S delle due rette con la retta n ortogonale e incidente entrambe le rette. Per determinare la retta n abbiamo bisogno del piano π passante per r e parallelo a s e del piano σ passante per s e parallelo a r. Notiamo in effetti che il punto S è la proiezione del punto R sul piano σ. La distanza tra R e S è quindi uguale alla distanza tra i piani π e σ. Ma allora abbiamo:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(P, \sigma)$$

dove P è un qualsiasi punto della retta r.

Riassumendo: è sufficiente determinare il piano σ passante per s e parallelo a r (non è necessario determinare anche π), prendere un qualsiasi punto P di r e calcolare la distanza di P da σ. △

C.10 Sfere e circonferenze

Definizione C.44 Dato un punto C e un numero reale $r \geq 0$, chiamiamo **sfera di centro** C e **raggio** r l'insieme dei punti aventi distanza da C uguale a r. △

Definizione C.45 Sia $\mathcal{S}$ una sfera di centro C e raggio $r > 0$ e sia P un punto di $\mathcal{S}$. Un qualsiasi piano passante per P ha chiaramente distanza da C minore o uguale a r. Si verifica facilmente che esiste ed è unico un piano π passante per P avente distanza da C uguale a r. Questo piano è il piano passante per P e ortogonale alla retta passante per C e P. Il piano π viene chiamato **piano tangente** alla sfera π nel punto P. △

Teorema C.46 *Sia $\mathcal{S}$ una sfera di centro C e raggio $r > 0$ e sia π un piano avente distanza da C uguale a $d < r$. Quindi d è uguale alla distanza tra C e la sua proiezione H sul piano π. L'intersezione tra la sfera e il piano è data da tutti e soli i punti del piano π aventi distanza da H uguale a h dove $h^2 = r^2 - d^2$. Pertanto l'intersezione della sfera e del piano coincide con la circonferenza $\mathcal{C}$ contenuta nel piano π di centro H e raggio $h = \sqrt{r^2 - d^2}$.*
*Chiamiamo **circonferenze massime** (o **cerchi massimi**) della sfera le circonferenze ottenute come intersezione della sfera con piani passanti per il centro della sfera.*
Il raggio di una circonferenza massima è uguale a r.

Teorema C.47 *Siano dati nello spazio tre punti A, B e C non allineati. Allora:*

- *Esiste una sola circonferenza passante per essi.*
- *Esistono infinite sfere passanti per esse. I loro centri appartengono alla retta r ottenuta come intersezione del piano asse del segmento AB e del piano asse del segmento BC.*
- *La retta r è ortogonale al piano π passante per A, B e C.*
- *L'intersezione della retta r con il piano π è il centro della circonferenza passante per A, B e C.*

Ricordiamo infine alcune formule (dove π è il numero pi greco):

Lunghezza circonferenza di raggio r	$2\pi r$
Area cerchio di raggio r	πr^2
Area sfera di raggio r	$4\pi r^2$
Volume sfera di raggio r	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Da tutto ciò segue che, se in una sfera raddoppiamo il raggio, allora:

- La lunghezza di una circonferenza massima è il doppio di quella di partenza;
- l'area di un cerchio massimo è quattro volte quella di partenza;
- l'area della sfera di raggio è quattro volte quella di partenza;
- il volume della sfera è otto volte quello di partenza.