

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissata in $V^2(O)$ una base ortonormale formata dai vettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

2	
---	--

(a) Quante sono le basi di $V^2(O)$ aventi come primo vettore \mathbf{v}_1 ?

Motivazione:

2	
---	--

(b) Quante sono le basi ortonormali di $V^2(O)$ aventi come primo vettore \mathbf{v}_1 ?

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il punto $A := (3, 5, 7)$ e, al variare dei parametri a, b, c e d , le rette:

$$r : \begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \\ z = c + 3t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + dt \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

2

- (a) Determina tutti i valori di a, b, c e d per i quali esiste uno ed un sol piano passante per A e perpendicolare sia a r che a s .

Motivazione:

2

- (b) Determina tutti i valori di a, b, c e d per i quali esiste una ed una sola retta passante per A e perpendicolare sia a r che a s .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3

- (a) Determina gli autovalori di A e una base per ciascun autospazio di A . Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

- (b) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2

- (c) Determina, se esiste, un'altra matrice ortogonale N tali che $D = N^{-1}AN$ (con D stessa matrice diagonale determinata al punto precedente).

$$N := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Motivazione:

4. Si consideri il sistema di equazioni
$$\begin{cases} x + y - z + tw = 1 \\ x + 2y + tz - w = 2t \\ 2x + 2ty - 2z + 2w = 2 \end{cases}$$
 dove t è un parametro reale.

2

- (a) Determina i valori di t per cui il sistema ha una sola soluzione.

Motivazione:

3

- (b) Determina i valori di t per cui il sistema ha infinite soluzioni, specificando per ciascuno di essi la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni.

Motivazione:

2

- (c) Tra i valori di t determinati al punto precedente scegline uno per cui la dimensione dello spazio affine delle soluzioni è la più alta e trova tutte le soluzioni del sistema in tal caso.

Valore di t scelto:

Soluzioni del sistema:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3, 4)$, $B := (5, 3)$. Sia r la retta passante per A e B .

3

(a) Determina due punti C e D tali che $ABCD$ sia un quadrato contenuto nel semipiano delimitato da r e contenente l'origine:

$C = (\quad , \quad)$	$D = (\quad , \quad)$
-------------------------	-------------------------

Motivazione:

2

(b) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al quadrato $ABCD$ (cioè passante per i punti A , B , C e D) e l'equazione cartesiana della circonferenza inscritta al quadrato $ABCD$ (cioè tangente ai lati del quadrato)

Motivazione:

2

(c) Detta s la retta passante per C e D e detto P il punto di intersezione tra la retta s e l'asse delle x determina l'area del triangolo ABP

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} 3x + 2y - 3z - 11 = 0 \\ 4x + 3y - 5z - 9 = 0 \end{cases}$

3

(a) Le rette r e s sono:

coincidenti incidenti parallele e distinte sghembe

Motivazione:

2

(b) Di piani contenenti r e paralleli a s :

non ne esiste nessuno;
 ne esiste uno solo: il piano π di equazione cartesiana
 ne esiste più di uno.

Motivazione:

2

(c) Di piani contenenti r e ortogonali a s :

non ne esiste nessuno;
 ne esiste uno solo: il piano σ di equazione cartesiana
 ne esiste più di uno.

Motivazione: