

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, si considerino le due circonferenze di equazioni  $\gamma_1 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$  e  $\gamma_2 : (x + 1)^2 + (y - 7)^2 = k$  con  $k$  parametro reale.

2

(a) Per quali valori di  $k$  le due circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono tangenti esternamente?

Motivazione:

2

(b) Per quali valori di  $k$  le due circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono tangenti internamente?

Motivazione:

2. Siano dati i punti  $A := (1, 0, 1, 1, 1)$ ,  $B := (2, 1, 1, 1, 1)$ ,  $C := (1, 0, 2, 1, 2)$  e  $D_k := (3, k, 2, 1, 2)$  di  $\mathbb{R}^5$  con  $k$  parametro reale.

- 2  (a) Per quali valori di  $k$  l'involuppo affine dei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D_k$  ha dimensione 4?

Motivazione:

- 2  (b) Per quali valori di  $k$  l'involuppo affine dei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D_k$  ha dimensione 3?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di  $f$ .

--

Motivazione:

--

2

(b) Determina una base del nucleo di  $f$ .

--

Motivazione:

--

3

(c) Determina una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $M$  tali che  $D = M^{-1}AM$ .

$D := \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$	$M := \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$
---	---

4. Si consideri il sistema di equazioni nelle incognite  $x, y, z$  e  $w$   $\begin{cases} x + 2y + z = k - 2 \\ x + y + z + w = 0 \\ 3x + 5y + 3z + w = k \end{cases}$  dove  $k$  è un parametro reale.

2

- (a) Determina i valori di  $k$  per cui il sistema ha esattamente una soluzione.

Motivazione:

3

- (b) Determina i valori di  $k$  per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

Motivazione:

2

- (c) Determina i valori di  $k$  per cui il sistema ammette la soluzione banale.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine, siano date le rette  $r : x+y+1 = 0$ ,  $s : 2x-y+2 = 0$  e  $t : x - y + 3 = 0$ . Siano  $A$  il punto di intersezione di  $r$  e  $s$ ,  $B$  il punto di intersezione di  $r$  e  $t$  e  $C$  il punto di intersezione delle rette  $s$  e  $t$ .

2

- (a) La retta parallela a  $t$  e passante per il punto  $A$  di intersezione tra  $r$  e  $s$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

- (b) Determina un punto  $D$  tale che  $ABCD$  sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

Motivazione:

3

- (c) L'insieme dei punti interni al triangolo delimitato dalle rette  $r$ ,  $s$  e  $t$  è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto  $A := (1, 2, -1)$  e la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

3

(a) La proiezione ortogonale  $B$  di  $A$  sulla retta  $r$  ha coordinate

Motivazione:

2

(b) La sfera  $\Sigma$  di centro  $A$  e tangente alla retta  $r$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

(c) Il piano  $\pi$  contenente  $r$  e tangente a  $\Sigma$  ha equazione cartesiana:

Motivazione: