

COGNOME..... NOME..... N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia data la circonferenza  $\gamma$  di centro  $C := (4, 2)$  e raggio  $3k$  con  $k$  numero reale. Sia dato il punto  $P := (2, 1)$ .

- (a) Per quali valori di  $k$  per il punto  $P$  passano due rette tangenti distinte alla circonferenza  $\gamma$ ?

Motivazione:

- (b) Per quali valori di  $k$  una delle due tangenti alla circonferenza  $\gamma$  passanti per  $P$  è parallela alla retta  $r$  di equazione  $3x + 4y + 2 = 0$ ?

Motivazione:

2. Sia data la matrice a coefficienti reali  $A_k := \begin{pmatrix} 2 & k^2 & 1 \\ -k & 2k & 1 \\ 1 & 1 & -2k \end{pmatrix}$  dove  $k$  è un parametro reale.

- (a) Per quali valori di  $k$  esiste una matrice ortogonale  $M$  tale che  $M^{-1}A_kM$  sia diagonale?

Motivazione:

- (b) Per quali valori di  $k$  esiste una matrice ortogonale  $M$  tale che  $M^{-1}(A_k + 2kI)M$  sia diagonale?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  definito da  $f(x, y, z) := (x + 2y + 5z, -x + 3y, 2x + y + 7z)$  e sia  $E$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$   $E := \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ .

- (a) Determina una base del nucleo di  $f$ .

2

Motivazione:

- (b) Determina una base dell'immagine di  $f$ .

2

Motivazione:

- (c) Determina un vettore non nullo appartenente a  $f(\mathbb{R}^3) \cap E$ .

3

Motivazione:

4. Sia  $E$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{u} := (0, 1, 0, -1)$  e  $\mathbf{v} := (1, -2, 1, 0)$ . Sia  $\mathbf{w}_k := (k, 1, -1, 1)$

2  (a) Per quali valori del parametro reale  $k$  il vettore  $\mathbf{w}_k$  appartiene ad  $E$ ?

Motivazione:

2  (b) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{w}_k$  è ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) sia a  $\mathbf{u}$  che a  $\mathbf{v}$ ?

Motivazione:

Scegli uno degli eventuali valori di  $k$  determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di  $k$  scelto:

3  (c) Determina una base ortonormale dello spazio generato da  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}_k$ .

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti  $A := (1, 3)$  e  $B := (-1, -3)$ . Indichiamo con  $C$  e  $D$  i due punti del piano tali che  $ABC$  e  $ABD$  sono triangoli equilateri.

|   |  |
|---|--|
| 3 |  |
|---|--|

 (a) I punti  $C$  e  $D$  hanno coordinate:

Motivazione:

|   |  |
|---|--|
| 2 |  |
|---|--|

(b) L'area del quadrilatero  $ACBD$  (attenzione all'ordine dei vertici) è uguale a:

Motivazione:

|   |  |
|---|--|
| 2 |  |
|---|--|

(c) Determina l'equazione cartesiana dell'asse del segmento di estremi  $C$  e  $D$ :

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette  $r$  :  $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  e

$$s : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

- (a) Il piano  $\pi$  passante per  $r$  e parallelo a  $s$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

- (b) La distanza tra  $s$  e  $\pi$  è:

Motivazione:

- (c) La retta  $t$ , proiezione ortogonale di  $s$  sul piano  $\pi$  ha equazioni cartesiane:

Motivazione: