

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$ . Sia  $g$  l'endomorfismo di  $V$  definito da  $g(\mathbf{v}) := f(3\mathbf{v})$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$

2

(a) Sia dato un vettore  $\mathbf{w} \in \ker f$ .

- |   |
|---|
| <input type="checkbox"/> $\mathbf{w} \in \ker g$ sempre<br><input type="checkbox"/> $\mathbf{w} \in \ker g$ solo se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . |
|---|

2

(b) Sia  $\mathbf{u}$  un autovettore di  $f$  relativamente all'autovalore 5. Allora:

- |  |
|--|
| <input type="checkbox"/> il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di $g$ relativamente all'autovalore 5<br><input type="checkbox"/> il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di $g$ relativamente all'autovalore 15<br><input type="checkbox"/> il vettore $\mathbf{u}$ è autovettore di $g$ relativamente all'autovalore 8<br><input type="checkbox"/> il vettore $\mathbf{u}$ non è autovettore di $g$ |
|--|

Motivazione:

2

2. Siano dati i punti  $P_0 := (1, 2, 0, 0)$ ,  $P_1 := (1, 0, 2, 0)$ ,  $P_2 := (1, 0, 0, 2)$ ,  $P_3 := (3, 0, 0, 0)$  di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano  $\Sigma$  passante per i punti  $P_0, P_1, P_2$  e  $P_3$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare equazioni parametriche della retta  $r$  passante per  $P_0$  e perpendicolare a  $\Sigma$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  definito da  $f(x, y, z) := (x + 2y + 3z, -x - 2y - 3z, 2x + 4y + 6z)$ .

2

(a) Determinare una base dell'immagine di  $f$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base del nucleo di  $f$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una base del nucleo che sia ortonormale relativamente al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ .

Motivazione:

4. Si consideri uno spazio vettoriale  $V$  avente come base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ . Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $V$  tale che  $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_3, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$ .

2

- (a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  relativamente alla base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

2

- (b) Determinare la matrice  $B$  associata a  $f$  relativamente alla base  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$ .

Motivazione:

3

- (c) Determinare una matrice  $M$  tale che  $B = M^{-1}AM$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (1, 1)$  e  $B := (3, 3)$ .

2

(a) Determinare i punti  $C$  e  $D$  appartenenti all'asse del segmento  $AB$  aventi distanza dalla retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$  uguale a  $2\sqrt{2}$ .

Motivazione:

2

(b) Calcolare l'area del quadrilatero  $ACBD$ .

Motivazione:

3

(c) Sia  $E$  il punto simmetrico di  $A$  rispetto a  $B$  e sia  $F$  il punto simmetrico di  $B$  rispetto a  $A$ . Calcolare l'area del quadrilatero  $ECFD$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano  $\pi : x + 2y + z - 7 = 0$ , il punto  $A := (1, 3, 0)$  appartenente a  $\pi$  e i punti  $B := (3, 7, 2)$  e  $C := (3, 6, 2)$ .

2

- (a) Sia  $r$  la retta passante per i punti  $A$  e  $B$ . Quante sono le rette passanti per  $A$ , appartenenti al piano  $\pi$  e perpendicolari alla retta  $r$ ? Determinare, se esiste, una di tale rette dandone equazioni cartesiane.

Motivazione:

3

- (b) Sia  $s$  la retta passante per i punti  $A$  e  $C$ . Quante sono le rette passanti per  $A$ , appartenenti al piano  $\pi$  e perpendicolari alla retta  $s$ ? Determinare, se esiste, una di tale rette dandone equazioni cartesiane.

Motivazione:

2

- (c) Verificare se la retta passante per  $B$  e  $C$  è parallela al piano  $\pi$  o se lo interseca in un punto.

Motivazione: