

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sono dati i punti $A = (-2, 1, 1)$, $B = (3, 7, 3)$ e la sfera $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 - 50 = 0$.

2

(a) Il segmento AB interseca la sfera?

Motivazione:

2

(b) La semiretta di origine A passante per B in quanti punti interseca la sfera?

Motivazione:

2. Sia dato, al variare del parametro reale k , il sottoinsieme E_k di \mathbb{R}^4 così definito:
 $E_k := \{(x, y, z, w) | (k-1)x + (k+1)y + 2w - k^2 + 4 = z + 2w = 0\}$

2 (a) Determinare tutti i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .

Motivazione:

2 (b) Scelto uno dei valori di k precedentemente calcolati, determinare una base di E_k .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Al variare del parametro reale k , è dato l'endomorfismo f_k di \mathbb{R}^3 la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è $A_k := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2k & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2

- (a) Determinare, per ogni valore di k , una base dell'immagine di f_k .

Motivazione:

3

- (b) Posto $k = 0$, determinare, se esiste, una base di autovettori.

Motivazione:

2

- (c) Posto $k = 0$, determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori.

Motivazione:

4. In \mathbb{R}^4 sono dati il sottospazio vettoriale V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, -1)$ e il sottospazio vettoriale $W = \{(x, y, z, w) | x - y = x + z - w = 0\}$.

2

- (a) Determinare una base di V .

Motivazione:

3

- (b) Determinare una base di W .

Motivazione:

2

- (c) Determinare una base ortonormale di $V + W$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $B := (5, 3)$ sulla retta $r : x - 2y + 1 = 0$ e il punto $A := (6, -4)$.

2

- (a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia isoscele con base BC (cioè $AB = AC$).

Motivazione:

2

- (b) Il triangolo ABC ha area:

Motivazione:

3

- (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A , B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sono dati il piano $\pi : x - y + z - 3 = 0$,

la retta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e la retta $s : \begin{cases} 3x - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

3

(a) La retta r appartiene al piano π ?

Motivazione:

2

(b) Determinare la proiezione ortogonale p della retta s sul piano π

Motivazione:

2

(c) Verificare che le rette r e p sono incidenti e determinare il piano che le contiene.

Motivazione: