COGNOME..........................NOME..........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi IN STAMPATELLO su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V un sottospazio vettoriale di dimensione 5 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$.
   Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$.

2 (a) Determinare la minima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia minima.

Motivazione:

2 (b) Determinare la massima dimensione possibile del sottospazio vettoriale $V \cap W$.
Dare una base di V e una base di W in modo tale che $\dim(V \cap W)$ sia massima.

Motivazione:

2. Siano dati, al variare del parametro k, i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:
$\mathbf{v}_1 := (1, 0, 1, k, 0), \mathbf{v}_2 := (0, 1, 0, 0, 0), \mathbf{v}_3 := (0, 1, 1, 0, 0), \mathbf{v}_4 := (0, 1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_5 := (1, 0, k, 1, 0)$.

2 (a) Determinare tutti i valori di k per cui i cinque vettori dati formano una base di $\mathbb{R}^5$.

Motivazione:

2 (b) Posto $k = 0$ e considerati i vettori:
$\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 := 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_4 := \mathbf{v}_1$, calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^5$ da essi generato.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3[x]$ l'omomorfismo così definito $f(a, b, c, d) := a + b + (a - c + d)x + (b + c + d)x^2$.

3	

(a) Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3[x]$ e una base dell'immagine di f.

Motivazione:

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Motivazione:

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ supplementare di $\ker f$.

Motivazione:

4. Sia data la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3	

(a) Determinare, se esistono, una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che si abbia $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare, se esiste, una matrice N, tale che si abbia $\det N = -\det M$ e $D = N^{-1}AN$, dove M e D sono le matrici ottenute nella risposta (a).

Motivazione:

2	

(c) Determinare, se esiste, una matrice U, tale che si abbia $\det U = 1$ e $D = U^{-1}AU$, dove D è la matrice ottenuta nella risposta (a).

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (-1, 8)$ e $B := (3, 2)$ e la retta $r : 3x + 2y = 0$.

2 (a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente il centro K su r.

Motivazione:

3 (b) Scrivere l'equazione della circonferenza γ' simmetrica della circonferenza γ rispetto alla retta passante per A e B e verificare se, detto K' il centro di γ', il quadrilatero $KAK'B$ è un quadrato.

Motivazione:

2 (c) Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ passanti per K'.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, -2, 2)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

2

(a) Verificare se le rette r e s sono sghembe.

Motivazione:

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r e s.

Motivazione:

3

(c) Determinare equazioni parametriche della retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

Motivazione: