

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  avente i vettori  $\mathbf{u} := (1, 2, 3)$  e  $\mathbf{v} := (1, 1, 2)$  come autovettori entrambi con autovalore uguale a 4 rispettivamente.  
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2

- (a) *Il vettore  $\mathbf{w} := (3, 6, 9)$  è un autovettore di  $f$ .*

Motivazione:

2

- (b) *Il vettore  $\mathbf{w}' := (2, 3, 5)$  è autovettore di  $f$ .*

Motivazione:

2. Dati in  $\mathbb{R}^4$  i punti  $A := (1, 2, 3, 4)$ ,  $B := (3, 5, 7, 9)$ ,  $C := (4, \frac{13}{2}, 9, \frac{23}{2})$  e  $D := (1, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Il punto  $C$  appartiene al segmento di estremi  $A$  e  $B$ ?

Motivazione:

2

(b) Determinare la dimensione dell'involuppo convesso dei punti  $A, B$  e  $D$  e determinarne le sue equazioni parametriche.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato, al variare del parametro reale  $k$ , il sottoinsieme  $E_k$  di  $\mathbb{R}^3$ :

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2x - 3y + (k^2 + 2k)z = 4 - k^2\}$$

2

(a) Determinare i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2

(b) Determinare i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

**Scegliere uno dei valori di  $k$  determinati al punto b e utilizzarlo nel resto dell'esercizio**

Valore di  $k$  scelto:

3

(c) Determinare una base per un sottospazio  $F$  supplementare di  $E_k$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3[x]$  definito da  $f(p(x)) := 2p(x) - 3p'(x)$  (si ricorda che la derivata del polinomio  $p(x) = a + bx + cx^2$  è  $p'(x) = b + 2cx$ ).

2

(a) Determinare la matrice  $A$  rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3[x]$  (cioè la base formata da  $1, x$  e  $x^2$  in quest'ordine).

--

Motivazione:

--

3

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di  $f$ .

Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore $\lambda$	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

--

2

(c) L'endomorfismo è diagonalizzabile?  Sì  No

Motivazione:

--

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto  $P := (5, -9)$  e la circonferenza  $\gamma : x^2 + (y - 6)^2 = 50$ . Siano  $r$  e  $s$  le rette passanti per  $P$  e tangenti a  $\gamma$  e siano  $R$  e  $S$  i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e  $\gamma$ .

2

- (a) Le rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

2

- (b) Detto  $C$  il centro di  $\gamma$ , i triangoli  $CPR$  e  $CPS$  hanno la stessa area. Calcolare l'area di uno dei due.

Motivazione:

3

- (c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto  $A := (4, 5, 2)$  e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} .$$

3

(a) Determinare la distanza tra il punto  $A$  e la retta  $r$ .

Motivazione:

2

(b) Dato il punto  $B := (1, 2, 4)$ , determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $B$  e contenente la retta  $r$ .

Motivazione:

2

(c) Determinare la distanza tra il punto  $A$  e il piano  $\pi$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  avente i vettori  $\mathbf{u} := (1, 2, 3, 4)$  e  $\mathbf{v} := (1, 1, 2, 2)$  come autovettori entrambi con autovalore uguale a 5.  
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2

- (a) *Il vettore  $\mathbf{w} := (4, 8, 12, 16)$  è un autovettore di  $f$ .*

Motivazione:

2

- (b) *Il vettore  $\mathbf{w}' := (2, 3, 5, 6)$  è autovettore di  $f$ .*

Motivazione:

2. Dati in  $\mathbb{R}^4$  i punti  $A := (4, 3, 2, 1)$ ,  $B := (9, 7, 5, 3)$ ,  $C := (\frac{23}{2}, 9, \frac{13}{2}, 4)$  e  $D := (1, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Il punto  $C$  appartiene al segmento di estremi  $A$  e  $B$ ?

Motivazione:

2

(b) Determinare la dimensione dell'involuppo convesso dei punti  $A, B$  e  $D$  e determinarne le sue equazioni parametriche.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato, al variare del parametro reale  $k$ , il sottoinsieme  $E_k$  di  $\mathbb{R}^3$ :

$$E_k := \{(x, y, z) \mid (3k + k^2)x - 3y + z = 9 - k^2\}$$

2

(a) Determinare i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2

(b) Determinare i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

**Scegliere uno dei valori di  $k$  determinati al punto b e utilizzarlo nel resto dell'esercizio**

Valore di  $k$  scelto:

3

(c) Determinare una base per un sottospazio  $F$  supplementare di  $E_k$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3[x]$  definito da  $f(p(x)) := 3p(x) + 2p'(x)$  (si ricorda che la derivata del polinomio  $p(x) = a + bx + cx^2$  è  $p'(x) = b + 2cx$ ).

2

- (a) Determinare la matrice  $A$  rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3[x]$  (cioè la base formata da  $1, x$  e  $x^2$  in quest'ordine).

--

Motivazione:

--

3

- (b) Determinare una base per ciascun autospazio di  $f$ .

Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore $\lambda$	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

--

2

- (c) L'endomorfismo è diagonalizzabile?  Sì  No

Motivazione:

--

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto  $P := (-10, 5)$  e la circonferenza  $\gamma : (x - 5)^2 + y^2 = 50$ . Siano  $r$  e  $s$  le rette passanti per  $P$  e tangenti a  $\gamma$  e siano  $R$  e  $S$  i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e  $\gamma$ .

2

- (a) Le rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

2

- (b) Detto  $C$  il centro di  $\gamma$ , i triangoli  $CPR$  e  $CPS$  hanno la stessa area. Calcolare l'area di uno dei due.

Motivazione:

3

- (c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto  $A := (2, 5, 4)$  e la retta

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} .$$

3

(a) Determinare la distanza tra il punto  $A$  e la retta  $r$ .

Motivazione:

2

(b) Dato il punto  $B := (4, 2, 1)$ , determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $B$  e contenente la retta  $r$ .

Motivazione:

2

(c) Calcolare la distanza tra il punto  $A$  e il piano  $\pi$ .

Motivazione: