

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano V e W spazi vettoriali tali che $\dim V = 3$ e $\dim W = 4$. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2

(a) Ogni omomorfismo $f : V \rightarrow W$ non è suriettivo.

Motivazione:

2

(b) Ogni omomorfismo $f : V \rightarrow W$ è iniettivo.

Motivazione:

2. Siano dati in \mathbb{R}^4 il punto A di coordinate $(1, 2, 3, 4)$, il punto B di coordinate $(3, 3, 1, 0)$. Sia r la retta passante per A e B .

2

- (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano ortogonale alla retta r e passante per A .

Motivazione:

2

- (b) Verificare se il punto C di coordinate $(1, 2, 1, 2)$ appartiene alla retta s parallela alla retta r e passante per il punto D di coordinate $(4, 3, 2, 1)$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 3 e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

2

(a) Determinare $f(1 + x + 2x^2)$.

Motivazione:

3

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f . Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio.

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(c) Determinare tutti i vettori di $f^{-1}(2 + 4x + 2x^2)$.

Motivazione:

4. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Sia V il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$

2

- (a) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W che sia supplementare di V in E .

Motivazione:

3

- (b) Determinare, se esiste, una base di un sottospazio vettoriale U di E tale che $\dim U = 2$ e $\dim(V \cap U) = 1$.

Motivazione:

2

- (c) Determinare, se esiste, una base di un sottospazio vettoriale U' di E tale che $\dim U' = 3$ e $\dim(V \cap U') = 1$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(0, -3)$ e il punto B di coordinate $(1, -2)$.

2

- (a) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e O , dove O è l'origine del sistema di riferimento.

Motivazione:

2

- (b) Calcolare le coordinate del punto H proiezione ortogonale del punto A sulla retta r passante per O e parallela al vettore $\mathbf{v} = (1, 2)$.

Motivazione:

3

- (c) Scrivere le equazioni cartesiane delle circonferenze passanti per i punti A e B e di raggio $\sqrt{5}$.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti A di coordinate $(2, 0, 1)$, B di coordinate $(0, -1, 1)$ e C di coordinate $(1, 2, -1)$.

2

- (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per i tre punti.

Motivazione:

3

- (b) Verificare che il triangolo proiezione del triangolo ABC sul piano xy è rettangolo e calcolarne l'area.

Motivazione:

2

- (c) Determinare un'equazione cartesiana del piano asse del segmento AB .

Motivazione: