

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$ . Siano  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  due vettori linearmente indipendenti di  $V$ .

Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono autovettori di  $f$  entrambi con autovalore uguale a 3, allora il vettore  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  è autovettore di  $f$  con autovalore  $3+3=6$ .

Motivazione:

2

(b) Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono autovettori di  $f$  il primo con autovalore uguale a 3 e il secondo con autovalore uguale a 4, allora il vettore  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  è autovettore di  $f$ .

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^5$  siano dati i punti  $P_0 := (1, 0, 0, 1, 0)$ ,  $P_1 := (0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $P_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$   
e  $P_3 := (k, k, k, k, k)$ .

2

- (a) Dimostrare che i punti  $P_0, P_1, P_2$  non sono allineati.

Dimostrazione:

2

- (b) Determinare i valori di  $k$  per i quali il punto  $P_3$  appartiene al piano passante per  $P_0, P_1, P_2$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  definito da  $f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_4)$ .

1

(a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $\ker f$ .

Motivazione:

4

(c) Verificare se l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di  $\mathbb{R}^4$  che sia formata da autovettori.

Motivazione:

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ :

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

2

(a) Determinare una base di  $V$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $W$  tale che  $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $V'$  tale che  $\dim V' = 3$  e  $V + V' = \mathbb{R}^5$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo  $T$  avente come vertici i punti  $A := (3, 4 + \sqrt{21})$ ,  $B := (-3, 1)$  e  $C := (5, 7)$ .

2

- (a) Verificare se il triangolo  $T$  è rettangolo nel vertice  $A$ .

Motivazione:

3

- (b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo  $T$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare le coordinate di un quarto punto  $A'$  tale che il quadrilatero formato dai punti  $A, B, A', C$ , presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti  $A := (1, 2, -2)$ ,  $B := (3, -4, 2)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (1, -1, 1)$ .

- 2  (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore  $\mathbf{v}$  sia alla retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

- 2  (b) Determinare le coordinate del punto  $H$  proiezione ortogonale di  $B$  sul piano  $\sigma : x - 2y + 2z = 0$ .

Motivazione:

- 3  (c) Determinare se la retta  $s$  di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$  e i punti  $A$  e  $B$  sono complanari o meno.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $E$ . Siano  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  due vettori linearmente indipendenti di  $E$ .

Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) Se  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  sono autovettori di  $f$  entrambi con autovalore uguale a 5, allora il vettore  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  è autovettore di  $f$  con autovalore  $5+5=10$ .

Motivazione:

2

(b) Se  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  sono autovettori di  $f$  il primo con autovalore uguale a 5 e il secondo con autovalore uguale a 7, allora il vettore  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  è autovettore di  $f$ .

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^5$  siano dati i punti  $P_0 := (1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $P_1 := (0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $P_2 = (1, 0, 0, 1, 0)$   
e  $P_3 := (k, k, k, k, k)$ .

2

- (a) Dimostrare che i punti  $P_0, P_1, P_2$  non sono allineati.

Dimostrazione:

2

- (b) Determinare i valori di  $k$  per i quali il punto  $P_3$  appartiene al piano passante per  $P_0, P_1, P_2$ .

Motivazione:



COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  definito da:

$$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + 3x_4).$$

1

(a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $\ker f$ .

Motivazione:

4

(c) Verificare se l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di  $\mathbb{R}^4$  che sia formata da autovettori.

Motivazione:

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ :

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

2

(a) Determinare una base di  $V$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $W$  tale che  $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $V'$  tale che  $\dim V' = 3$  e  $V + V' = \mathbb{R}^5$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo  $T$  avente come vertici i punti  $A := (4 + \sqrt{21}, 3)$ ,  $B := (1, -3)$  e  $C := (7, 5)$ .

2

- (a) Verificare se il triangolo  $T$  è rettangolo nel vertice  $A$ .

Motivazione:

3

- (b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo  $T$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare le coordinate di un quarto punto  $A'$  tale che il quadrilatero formato dai punti  $A, B, A', C$ , presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti  $A := (-2, 2, 1)$ ,  $B := (2, -4, 3)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (1, -1, 1)$ .

- 2  (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore  $\mathbf{v}$  sia alla retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

- 2  (b) Determinare le coordinate del punto  $H$  proiezione ortogonale di  $B$  sul piano  $\sigma : 2x - 2y + z = 0$ .

Motivazione:

- 3  (c) Determinare se la retta  $s$  di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$  e i punti  $A$  e  $B$  sono complanari o meno.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$ . Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  due vettori linearmente indipendenti di  $V$ .

Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono autovettori di  $f$  entrambi con autovalore uguale a 4, allora il vettore  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  è autovettore di  $f$  con autovalore  $4+4=8$ .

Motivazione:

2

(b) Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono autovettori di  $f$  il primo con autovalore uguale a 4 e il secondo con autovalore uguale a 5, allora il vettore  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  è autovettore di  $f$ .

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^5$  siano dati i punti  $P_0 := (1, 0, 0, 1, 0)$ ,  $P_1 := (0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $P_2 = (1, 1, 0, 0, 0)$   
e  $P_3 := (k, k, k, k, k)$ .

2

- (a) Dimostrare che i punti  $P_0, P_1, P_2$  non sono allineati.

Dimostrazione:

2

- (b) Determinare i valori di  $k$  per i quali il punto  $P_3$  appartiene al piano passante per  $P_0, P_1, P_2$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  definito da:

$$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 4x_3, x_1 + x_2 + 4x_4).$$

1

(a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $\ker f$ .

Motivazione:

4

(c) Verificare se l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di  $\mathbb{R}^4$  che sia formata da autovettori.

Motivazione:

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ :

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

2

(a) Determinare una base di  $V$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $W$  tale che  $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $V'$  tale che  $\dim V' = 3$  e  $V + V' = \mathbb{R}^5$ .

Motivazione:



COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo  $T$  avente come vertici i punti  $A := (2, 4 + \sqrt{21})$ ,  $B := (-4, 1)$  e  $C := (4, 7)$ .

2

(a) Verificare se il triangolo  $T$  è rettangolo nel vertice  $A$ .

Motivazione:

3

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo  $T$ .

Motivazione:

2

(c) Determinare le coordinate di un quarto punto  $A'$  tale che il quadrilatero formato dai punti  $A, B, A', C$ , presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti  $A := (2, 1, -2)$ ,  $B := (-4, 3, 2)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (-1, 1, 1)$ .

- 2  (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore  $\mathbf{v}$  sia alla retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

- 3  (b) Determinare le coordinate del punto  $H$  proiezione ortogonale di  $B$  sul piano  $\sigma : 2x - y - 2z = 0$ .

Motivazione:

- 3  (c) Determinare se la retta  $s$  di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$  e i punti  $A$  e  $B$  sono complanari o meno.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $E$ . Siano  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}'$  due vettori linearmente indipendenti di  $E$ .

Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) Se  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}'$  sono autovettori di  $f$  entrambi con autovalore uguale a 6, allora il vettore  $\mathbf{e} + \mathbf{e}'$  è autovettore di  $f$  con autovalore  $6+6=12$ .

Motivazione:

2

(b) Se  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}'$  sono autovettori di  $f$  il primo con autovalore uguale a 6 e il secondo con autovalore uguale a 7, allora il vettore  $\mathbf{e} + \mathbf{e}'$  è autovettore di  $f$ .

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^5$  siano dati i punti  $P_0 := (1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $P_1 := (0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$   
e  $P_3 := (k, k, k, k, k)$ .

2

- (a) Dimostrare che i punti  $P_0, P_1, P_2$  non sono allineati.

Dimostrazione:

2

- (b) Determinare i valori di  $k$  per i quali il punto  $P_3$  appartiene al piano passante per  $P_0, P_1, P_2$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  definito da:

$$f[(x_1, x_2, x_3, x_4)] = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 5x_3, x_1 + x_2 + 5x_4).$$

1

(a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $\ker f$ .

Motivazione:

4

(c) Verificare se l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile. In caso positivo determinare una base di  $\mathbb{R}^4$  che sia formata da autovettori.

Motivazione:

4. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ :

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

2

(a) Determinare una base di  $V$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $W$  tale che  $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale  $V'$  tale che  $\dim V' = 3$  e  $V + V' = \mathbb{R}^5$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Si consideri il triangolo  $T$  avente come vertici i punti  $A := (4 + \sqrt{21}, 2)$ ,  $B := (1, -4)$  e  $C := (7, 4)$ .

2

- (a) Verificare se il triangolo  $T$  è rettangolo nel vertice  $A$ .

Motivazione:

3

- (b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo  $T$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare le coordinate di un quarto punto  $A'$  tale che il quadrilatero formato dai punti  $A, B, A', C$ , presi nell'ordine, sia un parallelogramma.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti  $A := (1, -2, 2)$ ,  $B := (3, 2, -4)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (1, 1, -1)$ .

- 2  (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per l'origine del sistema di riferimento e parallelo sia al vettore  $\mathbf{v}$  sia alla retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

- 3  (b) Determinare le coordinate del punto  $H$  proiezione ortogonale di  $B$  sul piano  $\sigma : x + 2y - 2z = 0$ .

Motivazione:

- 3  (c) Determinare se la retta  $s$  di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$  e i punti  $A$  e  $B$  sono complanari o meno.

Motivazione: