COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia γ la circonferenza del piano passante per i punti $A := (2, 0)$, $O := (0, 0)$ e $B := (0, 2k)$ con $k \neq 0$.

2 (a) Determina i valori di k per cui γ ha raggio 3:

$k = \sqrt{8}$ e $k = -\sqrt{8}$.

Motivazione:

L'asse del segmento di estremi A e O ha equazione $x = 1$.
L'asse del segmento di estremi B e O ha equazione $y = k$.
L'intersezione di queste due rette dà il centro $C = (1, k)$ di γ.
La distanza tra C e un qualsiasi punto della circonferenza, ad esempio O, dà il raggio $\sqrt{1^2 + k^2}$ di γ. Imponendo che il raggio sia uguale a 3 otteniamo l'equazione $1 + k^2 = 9$ le cui soluzioni sono $k = \sqrt{8}$ e $k = -\sqrt{8}$.

2 (b) Determina i valori di k per cui γ è tangente alla retta $r : 2x + y - 5 = 0$:

$k = \frac{1}{2}$ e $k = -2$

Motivazione:

Dal punto precedente conosciamo il centro e il raggio di γ.
La distanza del centro di γ dalla retta r è $\frac{|2+k-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$.
Uguagliando tale distanza al raggio di γ otteniamo l'equazione $\frac{|k-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 + k^2}$ che sviluppata diviene $2k^2 + 3k - 2 = 0$ le cui soluzioni sono $k = \frac{1}{2}$ e $k = -2$.

2. Sia f un omomorfismo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(2,1) = (1,1,2)$ e $f(1,-3) = (0,-2,1)$.

2	

(a) I dati assegnati sono sufficienti per determinare $f(5,-1)$?

☒ Sì, $f(5,-1) = \boxed{(2,0,5)}$ ☐ No, non sono sufficienti

Motivazione:

Esprimiamo il vettore $(5,-1)$ come combinazione lineare dei vettori $(2,1)$ e $(1,-3)$.

$$(5,-1) = \alpha(2,1) + \beta(1,-3),$$

cioè

$$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta \\ -1 = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $(5,-1) = 2(2,1) + (1,-3)$. Poiché f è un omomorfismo, troviamo allora

$$f(5,-1) = 2f(2,1) + f(1,-3) = 2(1,1,2) + (0,-2,1) = (2,0,5).$$

2	

(b) Il vettore $(4,0,10)$ appartiene all'immagine di f?

☒ Sì ☐ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo

Motivazione:

Notiamo che $(4,0,10)$ è esattamente $2f(5,-1)$. Poiché $f(5,-1)$ appartiene all'immagine di f e l'immagine di f è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, anche $(4,0,10)$ appartiene all'immagine di f.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito da $E := \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

2	

(a) Determina una base di E.

$(1, 2, 0)$ $(0, 3, 1)$

Motivazione:

Risolvendo l'equazione $2x - y + 3z = 0$ si può esprimere, ad esempio, y in funzione di x e z ed ottenere così:

$$E = \{(x, 2x + 3z, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Ponendo prima $x = 1$ e $z = 0$ e poi $x = 0$ e $z = 1$ otteniamo una base per E.

2	

(b) Sia dato al variare di k il vettore $\mathbf{v}_k := (2, k, 1)$ e sia F il sottospazio generato da $\mathbf{v}_k$. Per quali valori di k si ha $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?

$k \neq 7$

Motivazione:

Si ha $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ se e solo se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ e $E + F = \mathbb{R}^3$.
Il sottospazio F ha dimensione 1. Dunque $F \subseteq E$ oppure $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$. Pertanto $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ se e solo se $\mathbf{v}_k \notin E$. Il vettore $\mathbf{v}_k \notin E$ se e solo se $2 \cdot 2 - k + 3 \cdot 1 \neq 0$, cioè se e solo se $k \neq 7$.
Se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ per la formula di Grassmann abbiamo che $\dim(E + F) = \dim E + \dim F$: poiché $\dim E = 2$ dal punto precedente e $\dim F = 1$ abbiamo che $\dim(E+F) = 3$ e, pertanto $E + F = \mathbb{R}^3$.

3	

(c) Scegli k tale che $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

Valore di k scelto: $k = 0$

Esprimi il vettore $(5, 5, 3)$ come somma di un vettore di E e di un vettore di F:

$(5, 5, 3) = (1, 5, 1) + (4, 0, 2)$

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2	

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, calcolare $f(1,-1,-1)$:

$(1,-1,-1)$

Motivazione:

Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $(1,-1,-1)$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore colonna delle componenti di $f(1,-1,-1)$ rispetto alla base canonica.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $(0,-1,k)$ è autovettore di f?

$k = -1$

Motivazione:

Il vettore $(0,-1,k)$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che $f(0,-1,k) = \lambda(0,-1,k)$. Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $(0,-1,k)$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2k \\ -3-k \\ 2k \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore colonna delle componenti di $f(0,-1,k)$ rispetto alla base canonica. Dunque

$$f(0,-1,k) = (-2-2k, -3-k, 2k).$$

Allora $(0,-1,k)$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che

$$(-2-2k, -3-k, 2k) = \lambda(0,-1,k),$$

cioè $-2-2k = 0$, $-3-k = -\lambda$ e $2k = \lambda k$. Ciò avviene se e solo se $k = -1$.

3	

(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1,-1,-1)$, $(0,-1,-1)$, $(1,2,1)$.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia data la circonferenza

$$\gamma : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0.$$

2	

(a) Il centro C e il raggio r di γ sono:

$C = (1, 1)$	$r = 2\sqrt{2}$

2	

(b) La retta r tangente a γ nel punto $P := (-1, -1)$ ha equazione cartesiana:

$x + y + 2 = 0$

Motivazione:

La tangente in P è ortogonale al raggio congiungente C con P, i cui parametri direttori sono $(1 - (-1), 1 - (-1)) = (2, 2)$. La retta r ha allora equazione del tipo $2x + 2y + k = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $2(-1)+2(-1)+k = 0$ da cui otteniamo $k = 4$. La retta r ha allora equazione $2x + 2y + 4 = 0$ o, equivalentemente, $x + y + 2 = 0$.

3	

(c) Detti A e B i punti d'intersezione della retta r con gli assi coordinati, l'area del triangolo ABC è:

4

Motivazione:

L'intersezione della retta r con l'asse delle x si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che dà il punto $A = (-2, 0)$. L'intersezione della retta r con l'asse delle y si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

che dà il punto $B = (0, -2)$.
La distanza di A da B è uguale a $\sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{8}$. L'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB è uguale alla distanza di C dalla retta per A e B, cioè dalla retta r. Poiché tale retta è tangente a γ, la sua distanza da C, cioè dal centro di γ è uguale al raggio di γ cioè $\sqrt{8}$. Dunque l'area del triangolo ABS è uguale a $\frac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{2} = 4$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$x - 4y - 7z - 10 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda(x+y-2z)+\mu(y+z+2) = 0$ ovvero $\lambda x + (\lambda + \mu)y + (-2\lambda + \mu)z + 2\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, 2, -1)$, otteniamo la relazione $1\lambda + 2(\lambda + \mu) - 1(-2\lambda + \mu) = 0$, vale a dire $5\lambda + \mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 1$ e $\mu = -5$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

$x - 4y - 7z + 18 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo sia a r sia a s e, dunque, è parallelo al piano π, e ha, pertanto, equazione del tipo $x - 4y - 7z + k = 0$. Per imporre che il piano contenga la retta s è allora sufficiente imporre che contenga un punto di s, ad esempio, il punto $(1, 3, 1)$, ottenendo la condizione $1 - 4 \cdot 3 - 7 \cdot 1 + k = 0$, da cui troviamo $k = 18$.

3	

(c) La regione di spazio delimitata dai due piani π e σ è definita dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - 4y - 7z - 10 < 0 \\ x - 4y - 7z + 18 > 0 \end{cases}$$