COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2(k^2 - k)x + y + 3z = k^2 - 1\}$$

2 (a) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

Per ogni k

Motivazione:

Il sottoinsieme E_k è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y e z, qualunque sia k.

2 (b) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 1$ e $k = -1$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $k^2 - 1 = 0$.

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine e sia dato il triangolo T di vertici $A := (1, 2)$, $B := (4, 1)$ e $C := (5, 7)$. L'equazione della retta r_{AB} passante per A e B è $x + 3y - 7 = 0$, l'equazione della retta r_{BC} passante per B e C è $6x - y - 23 = 0$ e l'equazione della retta r_{AC} passante per A e C è $5x - 4y + 3 = 0$

2	

(a) Il punto $P := (3, 3)$:

☒ è interno al triangolo T	☐ è esterno al triangolo T	☐ appartiene al bordo del triangolo T

Motivazione:

L'insieme dei punti interni al triangolo T è dato dall'intersezione del semipiano delimitato da r_{AB} e contenente C, del semipiano delimitato da r_{BC} e contenente A, e del semipiano delimitato da r_{AC} e contenente B.
I due semipiani delimitati da r_{AB} hanno disequazioni $x + 3y - 7 > 0$ e $x + 3y - 7 < 0$. Sostituendo le coordinate di C in $x + 3y - 7$ troviamo $5 + 3 \cdot 7 - 7 = 19$ che è un numero positivo. Pertanto il primo semipiano cercato è $x + 3y - 7 > 0$. Procedendo analogamente per le altre rette troviamo che l'insieme dei punti interni al triangolo T è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + 3y - 7 > 0 \\ 6x - y - 23 < 0 \\ 5x - 4y + 3 > 0 \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate di P troviamo $3 + 3 \cdot 3 - 7 = 5 > 0$, $6 \cdot 3 - 3 - 23 = -8 < 0$ e $5 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 3 = 6 > 0$. Dunque il punto P è interno al triangolo.

2	

(b) Il punto $Q := (-2, 3)$:

☐ è interno al triangolo T	☒ è esterno al triangolo T	☐ appartiene al bordo del triangolo T

Motivazione:

Conosciamo già dal punto precedente i semipiani la cui intersezione definisce i punti interni del triangolo. Poiché $5 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 + 3 = -19 < 0$, il punto Q appartiene al semipiano delimitato da r_{AC} che non contiene B: questo semipiano è formato da punti esterni al triangolo.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di matrice rappresentativa $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale e sia $\mathbf{v} := (1, 2, 1)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$.

2	

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al nucleo di f?

nessun valore

Motivazione:

Moltiplicando la matrice A per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ k+4 \\ 3 \end{pmatrix}$ si ottiene che $f(\mathbf{v}) = (3, k+4, 3)$. Poiché questo vettore non si annulla per alcun valore di k si ottiene che $\mathbf{v}$ non appartiene al nucleo di f per alcun valore di k.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f?

$k = 2$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Dal punto precedente sappiamo già che $f(\mathbf{v}) = (3, k+4, 3)$. Dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che

$$(3, k+4, 3) = \lambda(1, 2, 1),$$

cioè $3 = \lambda$, $k + 4 = 2\lambda$ e $3 = \lambda$. Ciò avviene se e solo se $\lambda = 3$ e $k = 2$.

3	

(c) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f?

$k \neq -4$

Motivazione:

La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Poiché $\det A = -4 - k$ si ha che per $k \neq -4$ l'immagine di f ha dimensione 3 e, pertanto, coincide con $\mathbb{R}^3$: in tal caso chiaramente $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f.
Nel caso in cui $k = -4$ il rango di A è minore di 3. Poiché A possiede almeno un minore di ordine 2 con determinante non nullo, ad esempio quello formato dalle prime due righe e due colonne, il rango di A è esattamente 2. Inoltre le prime due colonne di A danno i vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} := (-1, 2, 0)$ che formano una base dell'immagine di f. Allora $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se e solo se il sottospazio E generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ coincide con l'immagine di f, cioè ha dimensione 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono date dalle componenti di $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica ha determinante -2 e, pertanto, E ha dimensione 3: dunque $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di f.

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 2, 1)$ e $\mathbf{v} := (1, 2, -2, 3)$ e sia $F := \{(x, y, z, t) \mid x + y + z - t = 0\}$.

2

(a) Determina la dimensione di $E \cap F$

1

Motivazione:

Il sottospazio E è generato da due vettori linearmente indipendenti e ha, quindi, dimensione 2. Il sottospazio F è definito come insieme delle soluzioni di una equazione omogenea non banale e ha, quindi, dimensione $4 - 1 = 3$. Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 5 - \dim(E + F).$$

Poiché $F \subseteq E + F \subseteq \mathbb{R}^4$ la dimensione di $E + F$ può essere 3 o 4. La dimensione di $E + F$ è 3 se e solo se $E + F = F$ il che avviene se e solo se $E \subseteq F$ vale a dire se e solo se sia $\mathbf{u}$ che $\mathbf{v}$ appartengono a F. Poiché $1 + 0 + 2 - 1 \neq 0$, si ha che $\mathbf{u} \notin F$. Dunque $\dim(E + F) = 4$ e $\dim(E \cap F) = 1$.

2

(b) Esistono due vettori linearmente indipendenti appartenenti a F ed ortogonali a $\mathbf{u}$?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Un vettore (x, y, z, t) è ortogonale a $\mathbf{u}$ se e solo se il suo prodotto scalare con $\mathbf{u}$ si annulla, cioè se e solo se $x + 2z + t = 0$. Dunque l'insieme dei vettori di F ortogonali a $\mathbf{u}$ è l'insieme dei vettori (x, y, z, t) che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x \phantom{{}+y} + 2z + t = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo formato da 2 equazioni indipendenti: pertanto i vettori di F ortogonali a $\mathbf{u}$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione $4 - 2 = 2$, e quindi tra essi se ne possono scegliere 2 linearmente indipendenti.

3

(c) Determina una base ortonormale di F

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (-11, 5)$ e la circonferenza $\gamma : (x-4)^2 + y^2 = 50$. Siano r e s le rette passanti per P e tangenti a γ e siano R e S i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e γ.

2

(a) Le rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$r : x + y + 6 = 0 \qquad s : x - 7y + 46 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La circonferenza γ ha centro $C := (4, 0)$ e raggio $5\sqrt{2}$. La generica retta passante per P ha equazione $a(x + 11) + b(y - 5) = 0$. Imponendo che la distanza di questa retta generica da C sia uguale al raggio di γ troviamo la condizione:

$$\frac{|a(4 + 11) + b(0 - 5)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5\sqrt{2}$$

equivalente a $7a^2 - 6ab - b^2 = 0$ le cui soluzioni sono $b = a$ e $b = -7a$, da cui troviamo le equazioni cercate.

2

(b) Detto C il centro di γ, i triangoli CPR e CPS hanno la stessa area. Si calcoli l'area di uno dei due.

$\boxed{50}$

Motivazione:

Il triangolo CPR è rettangolo in R. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale alla distanza tra C e P, cioè $\sqrt{(-11-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{250}$. Il cateto CR ha lunghezza uguale al raggio di γ, cioè $\sqrt{50}$. Per il teorema di Pitagora il cateto PR ha lunghezza

$$\sqrt{\left(\sqrt{250}\right)^2 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{200}.$$

L'area del triangolo è allora uguale a $\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{200}}{2} = 50$.

3

(c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$x + 3y - 4 = 0 \qquad 3x - y + 38 = 0$

Motivazione:

Il centro della circonferenza γ è equidistante dalle rette r e s. Una delle due bisettrici è, quindi, la congiungente il punto P con il centro della circonferenza. La sua equazione può allora scriversi come

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 0 \\ -11 - 4 & 5 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata e semplificata, dà l'equazione $x + 3y - 4 = 0$. Poiché le due bisettrici sono ortogonali tra loro, consideriamo la generica retta ortogonale alla retta trovata $3x - y + h = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $3(-11) - 5 + h = 0$ da cui otteniamo $h = 38$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x + y + z - 10 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ e sia P il punto d'intersezione tra la retta r e il piano di equazione $x = 0$.

3

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione cartesiana:

$x - y + z - 2 = 0$

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di s possiamo determinare le equazioni parametriche di $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$. Dunque s ha parametri direttori $(1, 2, 1)$.

Consideriamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(2x + y - 4) + \mu(5x + y + z - 10) = 0,$$

che possiamo riscrivere come $(2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + \mu)y + \mu z - 4\lambda - 10\mu = 0$. Imponendo il parallelismo di questo piano con il vettore direttore di s troviamo la condizione $(2\lambda + 5\mu) \cdot 1 + (\lambda + \mu) \cdot 2 + \mu \cdot 1 = 0$, vale a dire $4\lambda + 8\mu = 0$. Prendendo, ad esempio, $\lambda = -2$ e $\mu = 1$ troviamo l'equazione del piano π.

2

(b) La retta l passante per P e parallela a s ha equazioni cartesiane:

$\begin{cases} x - z + 6 = 0 \\ x - 2y + 3z - 10 = 0 \end{cases}$

Motivazione:

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x + y + z - 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ che dà l'intersezione tra r e il piano di equazione $x = 0$ troviamo che $P = (0, 4, 6)$.

La generica retta parallela a s ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x - z + h = 0 \\ x - 2y + 3z + k = 0 \end{cases}$. Imponendo il passaggio per P otteniamo le condizioni $0 - 6 + h = 0$ e $0 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + k = 0$ da cui ricaviamo $h = 6$ e $k = -10$.

2

(c) La retta l:

☐ è incidente il piano π ☒ giace sul piano π ☐ è parallela a π ma non giace su π

Motivazione:

Il piano π è parallelo a s e, quindi, è parallelo a ogni retta parallela a s, in particolare a l. Il piano π contiene la retta r: in particolare contiene il punto P. Poiché P è un punto di l, il piano π è parallelo a l e contiene un punto di l: pertanto π contiene l'intera retta l.