COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano e sia dato il quadrato $ABCD$ di vertici $A := (1, 2)$, $B := (4, 6)$, $C := (8, 3)$ e $D := (5, -1)$.

2 (a) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al quadrato $ABCD$ (cioè passante per tutti i vertici del quadrato):

$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Motivazione:

Le diagonali di un quadrato si intersecano in un punto che è il punto medio di entrambe: poiché le diagonali hanno la medesima lunghezza questo punto è equidistante dai vertici ed è, perciò, il centro della circonferenza cercata. Calcolando il punto medio di due vertici non consecutivi, ad esempio A e C, si trova $E := \left(\frac{1+8}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Calcolando la distanza di E da uno qualsiasi dei vertici, ad esempio A, troviamo il raggio della circonferenza cercata, cioè $\sqrt{\left(\frac{9}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}}$.

2 (b) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza inscritta al quadrato $ABCD$ (cioè tangente tutti i lati del quadrato):

$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Motivazione:

Il punto E determinato al punto precedente è equidistante dai quattro lati ed è, quindi, il centro della circonferenza inscritta al quadrato $ABCD$. Questa circonferenza ha diametro uguale al lato del quadrato (e, quindi, raggio uguale alla metà del lato). Per calcolare la lunghezza del lato basta calcolare la distanza tra due vertici consecutivi, ad esempio A e B. Si ottiene così $\sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$. Dunque la circonferenza cercata ha raggio $\frac{5}{2}$.

2. Siano dati i tre vettori $\mathbf{u} := (3, 1)$, $\mathbf{v} := (2, 3)$ e $\mathbf{w} := (8, 5)$ di $\mathbb{R}^2$.

2	

(a) Date le condizioni $f(\mathbf{u}) := (2, 5)$, $f(\mathbf{v}) := (3, 3)$, $f(\mathbf{w}) := (1, 4)$:

☐ esiste un unico omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte;
☒ non esiste alcun omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte;
☐ esiste più di un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte.

Motivazione:

I 2 vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono uno multiplo dell'altro e sono, quindi, linearmente indipendenti. Essi, pertanto, formano una base di $\mathbb{R}^2$. Comunque siano assegnate le immagini dei vettori di una base di uno spazio vettoriale esiste un unico omomorfismo che soddisfa tali assegnazioni. In particolare esiste un unico omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le prime due condizioni. Se l'omomorfismo f così determinato soddisfa anche la terza condizione allora esiste un unico omomorfismo che soddisfa tutte e tre le condizioni, altrimenti non ne esiste nessuno.
Per vedere se f soddisfa anche la terza assegnazione esprimiamo $\mathbf{w}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(3, 1) + \beta(2, 3) = (8, 5).$$

Risolvendo il sistema che così si ottiene si trova $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ cioè $2\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$. Poiché f è un omomorfismo si ha allora:

$$f(\mathbf{w}) = 2f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = 2(2, 5) + (3, 3) = (7, 13).$$

Dunque la terza condizione non è soddisfatta.

2	

(b) Date le condizioni $g(\mathbf{u}) := (1, 2, 1)$, $g(\mathbf{v}) := (2, 1, 0)$, $g(\mathbf{w}) := (4, 5, 2)$:

☒ esiste un unico omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte;
☐ non esiste alcun omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte;
☐ esiste più di un omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte.

Motivazione:

Come al punto precedente sappiamo che esiste un unico omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le prime due condizioni. Se l'omomorfismo g così determinato soddisfa anche la terza condizione allora esiste un unico omomorfismo che soddisfa tutte e tre le condizioni, altrimenti non ne esiste nessuno.
Poiché g è un omomorfismo si ha allora:

$$g(\mathbf{w}) = 2g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) = 2(1, 2, 1) + (2, 1, 0) = (4, 5, 2).$$

Dunque la terza condizione è soddisfatta.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) := (3x + y - 5z, 2x + 3y - z, x - 2z)$.

2	

(a) Determina una base del nucleo di f.

$(2, -1, 1)$

Motivazione:

Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

si trova che il nucleo è formato dai vettori del tipo $(2t, -t, t)$ al variare del parametro reale t. Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ troviamo che una base del nucleo di f è formata dal vettore $(2, -1, 1)$.

2	

(b) Determina una base dell'immagine di f.

$(3, 2, 1), (1, 3, 0)$.

Motivazione:

Per il punto precedente il nucleo di f ha dimensione 1: pertanto l'immagine di f ha dimensione $3 - 1 = 2$. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Basta allora prendere 2 colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio le prime 2, e considerare i vettori le cui componenti rispetto alla base canonica sono dati da queste due colonne e cioè i vettori $(3, 2, 1)$ e $(1, 3, 0)$.

3	

(c) Determina una base di $f(\mathbb{R}^3) \cap \ker f$.

$(2, -1, 1)$

Motivazione:

Dai punti precedenti sappiamo già che $\dim \ker f = 1$ e $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$. Per la formula di Grassmann abbiamo allora

$$\dim(f(\mathbb{R}^3) \cap \ker f) = \dim(f(\mathbb{R}^3) + \dim \ker f - \dim(f(\mathbb{R}^3) + \ker f) = 3 - \dim(f(\mathbb{R}^3) + \ker f)$$

La somma $f(\mathbb{R}^3) + \ker f$ è generata dai vettori $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 0)$ e $(2, -1, 1)$. La sua dimensione è allora uguale al rango della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Questo rango è almeno 2 (la dimensione di $f(\mathbb{R}^3) + \ker f$ è almeno uguale alla dimensione di $f(\mathbb{R}^3)$). Calcolando il determinante si trova che è uguale a 0, pertanto la matrice ha rango 2. Dalla formula precedente abbiamo allora che $f(\mathbb{R}^3) \cap \ker f$ ha dimensione 1 e, pertanto, coincide con $\ker f$.

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

3

(a) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

ogni valore di k

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è uguale a $-(3-x)(2-x)^2x$ qualunque sia k. I suoi autovalori sono, dunque, 0, 2 e 3. Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi:

$$\begin{aligned} \dim E(0) &= 4 - \operatorname{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 1 \text{ qualunque sia } k, \\ \dim E(2) &= 4 - \operatorname{rk}(A_k - 2 \cdot I) = 2 \text{ qualunque sia } k, \\ \dim E(3) &= 4 - \operatorname{rk}(A_k - 3 \cdot I) = 1 \text{ qualunque sia } k. \end{aligned}$$

Dunque la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale all'ordine della matrice, cioè a 4, per ogni valore di k.

1

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = -1$

Motivazione:

Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = -1$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = -1$

3

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo siano dati i punti $P := (2, 5)$, $B := (8, -3)$ e la retta $r : 3x + y - 1 = 0$.

2	

(a) Determina la proiezione ortogonale A di P su r: $\boxed{A = (-1, 4)}$

Motivazione:

La retta r è ortogonale al vettore $(3, 1)$. La retta n passante per P e ortogonale a r ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $3(2+3t) + (5+t) - 1 = 0$ che ha soluzione $t = -1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto $A = (-1, 4)$ proiezione di P su r.

2	

(b) Determina il simmetrico C di B rispetto a r: $\boxed{C = (-4, -7)}$

Motivazione:

La retta s passante per B e ortogonale a r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $3(8+3t)+(-3+t)-1 = 0$ che ha soluzione $t = -2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del punto $H = (2, -5)$ proiezione di B su r. Il punto $C = (\bar{x}, \bar{y})$ è il punto tale che H sia il punto medio di B e C, cioè $\frac{8+\bar{x}}{2} = 2$ e $\frac{-3+\bar{y}}{2} = -5$ da cui si trova $C = (-4, -7)$.

3	

(c) Determina l'area del triangolo ABC:

$\boxed{60}$

Motivazione:

Per il calcolo dell'area prendiamo come base il lato BC la cui lunghezza è $\sqrt{(8-(-4))^2 + (-3-(-7))^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

Poiché B e C sono simmetrici rispetto a r, la retta s passante per B e C è ortogonale a r. Poiché il punto A appartiene a r, la sua proiezione ortogonale su s è esattamente l'intersezione tra r e s, cioè il punto H determinato al punto precedente. La distanza tra A e s, cioè l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC, è allora uguale alla distanza tra A e H, vale a dire $\sqrt{(-1-2)^2 + (4-(-5))^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

L'area del triangolo è allora uguale a $\frac{4\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}}{2} = 60$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x \quad + 3z - 1 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$

2 | |

(a) Di piani contenenti r e paralleli a s:

☐ non ne esiste nessuno;

☒ ne esiste uno solo: il piano π di equazione cartesiana $\boxed{5x - 2y + 11z - 9 = 0}$

☐ ne esiste più di uno.

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x + 3z - 1) + \mu(y + 2z + 2) = 0$, che, riscritto, dà $\lambda x + \mu y + (3\lambda + 2\mu)z - \lambda + 2\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, -3, -1)$, otteniamo la relazione $1\lambda - 3\mu - 1(3\lambda + 2\mu) = 0$, vale a dire $-2\lambda - 5\mu = 0$. Le soluzioni non banali di questa equazione omogenea sono tutte proporzionali tra loro e corrispondono quindi a un unico piano π di cui si può trovare l'equazione cartesiana sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 5$ e $\mu = -2$ nell'equazione del fascio di piani.

2 | |

(b) Di piani contenenti r e ortogonali a s:

☒ non ne esiste nessuno;

☐ ne esiste uno solo: il piano σ di equazione cartesiana

☐ ne esiste più di uno.

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo già che il piano generico contenente r ha equazione cartesiana $\lambda x + \mu y + (3\lambda + 2\mu)z - \lambda + 2\mu = 0$: il vettore $(\lambda, \mu, 3\lambda + 2\mu)$ dà la direzione ortogonale a questo piano. La condizione di ortogonalità con la retta s può essere espressa richiedendo che questo vettore sia proporzionale al vettore $(1, -3, -1)$ che dà la direzione di s. Visto che λ e μ sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità possiamo richiedere che $(\lambda, \mu, 3\lambda + 2\mu) = (1, -3, -1)$. È facile allora vedere che queste condizioni sono incompatibili e, quindi, non esistono piani contenenti r e ortogonali a s.

3 | |

(c) Le rette r e s sono:

☐ coincidenti ☐ incidenti ☐ parallele e distinte ☒ sghembe

Motivazione:

Se le rette r e s fossero parallele (coincidenti o distinte), ogni piano passante per r sarebbe parallelo a s. Sappiamo che così non è dal primo punto. Le rette possono allora essere o incidenti o sghembe.
Cerchiamo un eventuale punto di intersezione tra r e s. Otteniamo il sistema: $\begin{cases} (2 + t) \qquad + 3(3 - t) - 1 = 0 \\ (1 - 3t) + 2(3 - t) + 2 = 0 \end{cases}$ vale a dire $\begin{cases} -2t + 10 = 0 \\ -5t + 9 = 0 \end{cases}$. Questo sistema è, chiaramente, non risolubile. Dunque r e s non hanno punti in comune e sono, perciò, sghembe.