COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 1, 1)$, $B := (3, 2, 4)$, $C := (1, 1, 2)$ e $D := (3, k, 1)$.

2 (a) I punti A, B e C sono allineati?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I tre punti sono allineati se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2-1 & 4-1 \\ 1-2 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Questa matrice ha rango 2 e, pertanto i punti non sono allineati.

2 (b) Determina i valori di k per cui i punti A, B, C e D sono complanari:

$k = \frac{5}{4}$

Motivazione:

Utilizziamo la formula che dà la complanarità dei quattro punti A, B, C e D:

$$\begin{vmatrix} 3-2 & 2-1 & 4-1 \\ 1-2 & 1-1 & 2-1 \\ 3-2 & k-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0$$

che dà $5 - 4k = 0$ la cui soluzione è $k = \frac{5}{4}$.

2. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + ky + 2z = 9 \\ 2x + y + kz = 5k \\ 3x + 2y + 3z = 16 \end{cases}$$

2 (a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

$k \neq 1$ e $k \neq \frac{5}{3}$

Motivazione:

La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & k \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Il determinante di A è $3k^2 - 8k + 5$ che si annulla per $k = 1$ e $k = \frac{5}{3}$. Se k è diverso da questi due valori il sistema è Crameriano ed ha, quindi, una sola soluzione. Se $k = 1$ oppure $k = \frac{5}{3}$ la matrice A ha rango minore r di 3: pertanto o il sistema non è risolubile, oppure le soluzioni dipendono da $3 - r$ parametri, sono cioè più di una.

2 (b) Per quali valori di k la terna $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ è soluzione del sistema?

$k = 2$

Motivazione:

La terna assegnata deve soddisfare tutte le equazioni del sistema. Sostituendo i valori dati nel sistema troviamo le condizioni

$$\begin{cases} 3 + k \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9 \\ 2 \cdot 3 + 2 + k \cdot 1 = 5k \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 16 \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} 5 + 2k = 9 \\ 8 + k = 5k \\ 16 = 16 \end{cases}$$

Risolvendo questo semplice sistema nell'incognita k si trova 2 come unica soluzione.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Per quali valori di k la matrice A_k ha -2 come autovalore?

$k = -1$

Motivazione:

La matrice A_k ha -2 come autovalore se e solo se $\det(A_k - (-2)I) = 0$. Poiché

$$\det(A_k - (-2)I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + 1$$

si ha che A_k ha -2 come autovalore se e solo se $k + 1 = 0$, cioè $k = -1$.

2	

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = 1$

Motivazione:

Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = 1$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 1$

3	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z, w) := (2x + y - z - w, y + z + w, x + y)$ e sia E_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da $\mathbf{v}_k := (1, 3, k)$.

2

(a) Determina una base del nucleo di f.

$(-1, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -1)$

Motivazione:

Basta risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x + y - z - w = 0 \\ \quad\quad y + z + w = 0 \\ x + y \quad\quad\quad = 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono $(-h, h, k, -h - k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo $h = 1$ e $k = 0$ troviamo il vettore $(-1, 1, 0, -1)$; ponendo $h = 0$ e $k = 1$ troviamo il vettore $(0, 0, 1, -1)$.

2

(b) Determina una base dell'immagine di f.

$(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $\dim \ker f = 2$ e, pertanto, $\dim f(\mathbb{R}^4) = 4 - \dim \ker f = 2$. L'immagine di f è generata dalle immagini dei vettori della base canonica: basta allora trovare 2 vettori linearmente indipendenti tra questi vettori immagine. Facendo i calcoli si vede che $f(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 1)$ e $f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Questi due vettori così trovati sono linearmente indipendenti e, pertanto, formano una base per l'immagine di f.

3

(c) Per quali valori di k si ha $\mathbb{R}^3 = f(\mathbb{R}^4) \oplus E_k$?

$k \neq 2$

Motivazione:

Devono essere soddisfatte le due condizioni $\mathbb{R}^3 = f(\mathbb{R}^4) + E_k$ e $f(\mathbb{R}^4) \cap E_k = \{\mathbf{0}\}$. Se la prima condizione è soddisfatta, abbiamo che $\dim(f(\mathbb{R}^4) + E_k) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, quindi, dalla formula di Grassmann si ottiene

$$\dim(f(\mathbb{R}^4) \cap E_k) = \dim(f(\mathbb{R}^4) + E_k) - \dim f(\mathbb{R}^4) - \dim E_k = 3 - 2 - 1 = 0.$$

Basta dunque verificare per quali valori di k si ha $\mathbb{R}^3 = f(\mathbb{R}^4) + E_k$. Poiché $f(\mathbb{R}^4)$ è generato da $(2, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$, mentre E_k è generato da $(1, 3, k)$, abbiamo che la somma $f(\mathbb{R}^4) + E_k$ è generata da $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ e $(1, 3, k)$: pertanto la dimensione di $f(\mathbb{R}^4) + E_k$ è uguale al rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$. Questa matrice ha rango 3 se e solo se ha determinante non nullo, cioè se e solo se $2k - 4 \neq 0$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (3, 1)$, $O := (0, 0)$ e $B := (7, -2)$.

2

(a) Determina un punto C tale che $AOBC$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$\boxed{C = (10, -1)}$

Motivazione:

Il punto medio tra A e B è il punto $M := \left(\frac{3+7}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = \left(5, -\frac{1}{2}\right)$. Il punto C è il simmetrico di O rispetto a M: se $D := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0+0}{2}, \frac{y_0+0}{2}\right) = \left(5, -\frac{1}{2}\right)$ da cui otteniamo $x_0 = 10$, $y_0 = -1$.

2

(b) Determina il punto M di intersezione delle diagonali del parallelogramma $AOBC$ trovato al punto precedente.

$\boxed{M := \left(5, -\frac{1}{2}\right)}$

Motivazione:

Il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogramma è il punto medio di ciascuna delle diagonali. Abbiamo già trovato questo punto medio al punto precedente.

3

(c) L'insieme dei punti interni al parallelogramma $AOBC$ è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - 3y > 0 \\ 2x + 7y > 0 \\ x - 3y - 13 < 0 \\ 2x + 7y - 13 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r: \begin{cases} 2x + 3y \qquad + 3 = 0 \\ 3x + 5y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$x + y - 2z + 2 = 0$

Motivazione:

Considerato il fascio di piani passanti per r: $\lambda(2x + 3y + 3) + \mu(3x + 5y + 2z + 4) = 0$, riscriviamone l'equazione come $(2\lambda + 3\mu)x + (3\lambda + 5\mu)y + 2\mu z + 3\lambda + 4\mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(3, -1, 1)$, otteniamo la relazione $(2\lambda + 3\mu)3 + (3\lambda + 5\mu)(-1) + 2\mu \cdot 1 = 0$, vale a dire $3\lambda + 6\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 2$ e $\mu = -1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

$x + y - 2z - 4 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo alle rette r e s e, quindi, è anche parallelo al piano π trovato al punto precedente. La sua equazione sarà allora del tipo $x + y - 2z + k = 0$. Per determinare il valore di k per cui si ottiene un piano contenente s basta allora imporre il passaggio per un punto di s: infatti un piano parallelo ad una retta o contiene tutta la retta o non contiene alcun punto della retta. Imponendo allora il passaggio per il punto $P := (5, 1, 1)$ (ottenuto ponendo $t = 0$ nelle equazioni parametriche di s) otteniamo la condizione $5 + 1 - 2 \cdot 1 + k = 0$ da cui otteniamo $k = -4$.

3	

(c) La sfera tangente ai piani π e σ ed avente il centro sull'asse delle x ha equazione cartesiana:

$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$

Motivazione:

Una sfera è tangente a un piano se e solo se la distanza tra questo piano e il centro della sfera è uguale al raggio della sfera stessa.
Il centro C della sfera cercata dovrà allora essere un punto equidistante dai due piani π e σ. Poiché C deve appartenere all'asse delle x avremo che $C := (h, 0, 0)$ per qualche valore di h. Imponendo l'equidistanza da π e σ troviamo la condizione:

$$\frac{|h + 0 - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|h + 0 - 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

vale a dire $|h + 2| = |h - 4|$ da cui si ricava che o $h + 2 = h - 4$, che non ha soluzione, o che $h + 2 = 4 - h$ la cui soluzione è $h = 1$. La sfera cercata ha allora centro in $(1, 0, 0)$. Calcolando ora la distanza del centro da uno dei due piani, ad esempio da π troviamo che il raggio della sfera è uguale a $\frac{|1+0-2\cdot0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ e, pertanto l'equazione cartesiana della sfera è $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$.