

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano f e g due omomorfismi da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 tali che $f(2, 1) = g(2, 1) = (1, 3, 3)$ e $\ker f = \ker g$.

2

(a) Se $\dim \ker f = \dim \ker g = 1$ allora necessariamente gli omomorfismi f e g coincidono? Sì No

Motivazione:

Sia $\mathbf{v}_1 := (2, 1)$ e sia \mathbf{v}_2 un vettore non nullo di $\ker f = \ker g$. Dal momento che $\mathbf{v}_1 \notin \ker f$, abbiamo che \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 formano una base di \mathbb{R}^2 .

Per ipotesi abbiamo $f(\mathbf{v}_1) = g(\mathbf{v}_1) = (1, 3, 3)$ e $f(\mathbf{v}_2) = g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$.

Ma allora i due omomorfismi f e g coincidono perché coincidono sugli elementi di una base di \mathbb{R}^2 .

2

(b) Se $\dim \ker f = \dim \ker g = 0$ allora necessariamente gli omomorfismi f e g coincidono? Sì No

Motivazione:

Poiché $\dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, abbiamo che $\dim \ker f = 0$ se e solo se l'immagine di f ha dimensione 2. Lo stesso vale per g .

Scelta una base per \mathbb{R}^2 , per dare un omomorfismo da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 si possono assegnare le immagini dei vettori di una base: comunque si scelgano queste immagini esisterà uno e un solo omomorfismo che soddisfa queste assegnazioni.

Poiché conosciamo già l'immagine di $(2, 1)$ sia tramite f che tramite g scegliamo una base di \mathbb{R}^2 formata da $(2, 1)$ e da un altro vettore che non sia un suo multiplo, ad esempio $(1, 0)$.

Poiché per ipotesi $f(2, 1) = (1, 3, 3)$, per avere un omomorfismo la cui immagine abbia dimensione 2 basta imporre che $f(1, 0)$ non sia multiplo di $(1, 3, 3)$: ad esempio possiamo porre $f(1, 0) = (1, 0, 0)$.

Analogamente per costruire g basta imporre che $g(1, 0)$ non sia multiplo di $(1, 3, 3)$: possiamo scegliere ad esempio $g(1, 0) = (2, 0, 0)$ ottenendo così un omomorfismo diverso da f .

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine, si considerino i punti $A := (30, 30)$, $B := (39, 33)$, $C := (30, 34)$ e $D := (34, 30)$.

2

- (a) I segmenti AB e CD (estremi esclusi) hanno un punto in comune?

Sì No

Motivazione:

Il segmento AB è dato dai punti $P := (x, y)$ tali che

$$\begin{cases} x = 30 + (39 - 30)t \\ y = 30 + (33 - 30)t \end{cases}$$

con $0 < t < 1$.

Il segmento CD è dato dai punti $P := (x, y)$ tali che

$$\begin{cases} x = 30 + (34 - 30)t \\ y = 34 + (30 - 34)t \end{cases}$$

con con $0 < t < 1$.

Per determinare i punti di intersezione delle rette contenenti i due segmenti cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 30 + 9t = 30 + 4u \\ 30 + 3t = 34 - 4u \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione $t = \frac{1}{3}$, $u = \frac{3}{4}$. Dal momento che sia t che u sono compresi tra 0 e 1, il punto di intersezione delle due rette appartiene ai segmenti AB e CD .

Vedere il file dei commenti.

2

- (b) Il punto D è interno al triangolo ABC ?

Sì No

Motivazione:

Osserviamo che, se il punto D fosse interno al triangolo ABC allora i punti C e D appartenerebbero allo stesso semipiano delimitato dalla retta r_{AB} passante per A e B .

Abbiamo però visto che il segmento CD interseca la retta r_{AB} passante per A e B , pertanto i punti C e D appartengono a semipiani delimitati dalla retta r_{AB} differenti.

Da ciò segue che il punto D non è interno al triangolo ABC .

Vedere il file dei commenti.

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 definito da $f(x, y, z) := (2x - 2y, x + y + z, 3x - y + z)$.

2

(a) Determinare una base del nucleo di f .

(1, 1, -2)

Motivazione:

Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

si trova che il nucleo è formato dai vettori del tipo $(t, t, -2t)$ al variare del parametro reale t . Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ troviamo che una base del nucleo di f è formata dal vettore $(1, 1, -2)$.

2

(b) Determinare una base dell'immagine di f .

(2, 1, 3), (-2, 1, -1)

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che il nucleo ha dimensione uguale a 1. Pertanto l'immagine ha dimensione uguale a $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$. Poiché l'immagine è generata dalle immagini dei vettori di una base di \mathbb{R}^3 , possiamo calcolare successivamente le immagini dei vettori di una base di \mathbb{R}^3 , ad esempio la base canonica, finché ne troviamo due linearmente indipendenti. Abbiamo $f(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$ e $f(0, 1, 0) = (-2, 1, -1)$. Poiché i vettori così ottenuti sono linearmente indipendenti, essi formano una base per l'immagine di f e non c'è bisogno di calcolare l'immagine di $(0, 0, 1)$.

3

(c) Stabilire se esistono due vettori linearmente indipendenti aventi la stessa immagine. Se esistono, determinarli.

(1, 0, 0) e (2, 1, -2)

Motivazione:

Due vettori hanno la stessa immagine se e solo se la loro differenza appartiene al nucleo. Poiché il nucleo è generato dal vettore $(1, 1, -2)$ abbiamo, ad esempio, che i vettori $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 0) + (1, 1, -2) = (2, 1, -2)$ hanno la stessa immagine. Questi vettori sono chiaramente linearmente indipendenti.

Vedere il file dei commenti.

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2

- (a) Determinare gli autovalori di A .

0	5
---	---

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 0 & 0 & 0-x \end{vmatrix} = -x^3 + 5x^2$, che si annulla per 0 e 5.

Vedere il file dei commenti.

3

- (b) Determinare una base per ciascun autospazio di A . Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)$
5	$(1, 2, 0)$

Motivazione:

Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-2h - k, h, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

Per calcolare $E(5)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 5I$, cioè

$$\begin{cases} -4x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, 2h, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(5)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

Vedere il file dei commenti.

2

- (c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<i>Vedere il file dei commenti.</i>
--	--	-------------------------------------

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $B := (5, 3)$, $C := (-1, 1)$ e la retta $t : x + 2y + 5 = 0$.

2

- (a) Determina l'equazione cartesiana della retta r parallela a t ed equidistante dai punti B e C :

$$x + 2y - 6 = 0$$

Motivazione:

La generica retta parallela a t ha equazione del tipo $x + 2y + h = 0$. Imponendo l'equidistanza da B e C troviamo l'equazione $\frac{|5+2\cdot 3+h|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-1+2\cdot 1+h|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ da cui ricaviamo $h = -6$.

Vedere il file dei commenti.

3

- (b) Detto A il punto di intersezione tra r e l'asse delle y e detto H il punto d'intersezione tra r e la retta passante per B e C determinare il simmetrico D di A rispetto a H

$$D = (4, 1)$$

Motivazione:

Intersecando la retta r con l'asse delle y troviamo il punto $A = (0, 3)$.

La retta passante per B e C ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 5 + (-1 - 5)t \\ y = 3 + (1 - 3)t \end{cases}$. Intersecando con la retta r troviamo l'equazione $(5 - 6t) + 2(3 - 2t) - 6 = 0$ la cui soluzione è $t = \frac{1}{2}$. In corrispondenza di tale valore troviamo allora il punto $H = (2, 2)$. Il simmetrico di A rispetto a H è il punto $D := (\bar{x}, \bar{y})$ tale che H sia punto medio di A e D : otteniamo così le equazioni $\frac{0+\bar{x}}{2} = 2$, $\frac{3+\bar{y}}{2} = 2$ da cui ricaviamo $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 1$.

3

- (c) Determina l'area del triangolo ABH e del triangolo ACH :

$$A(ABH) = \frac{5}{2}$$

$$A(ACH) = \frac{5}{2}$$

Motivazione:

Se consideriamo come base di entrambi i triangoli il lato AH , la cui lunghezza è $\sqrt{(2-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$, vediamo che le altezze relative a tali basi sono, rispettivamente, la distanza di B da r e la distanza di C da r . Dal punto a sappiamo che queste distanze sono uguali fra loro e sono uguali precisamente a $\frac{5}{\sqrt{5}}$: pertanto entrambi i triangoli hanno area uguale a $\frac{\sqrt{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{5}{2}$.

Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

$$\text{e } s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

2

- (a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$$x - y + 2z + 1 = 0$$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda(x + 2y - 3z + 2) + \mu(2x + y - z + 3) = 0$ ovvero $(\lambda + 2\mu)x + (2\lambda + \mu)y + (-3\lambda - \mu)z + 2\lambda + 3\mu = 0$.

Imponendo la condizione di parallelismo con s , cioè con il vettore $(1, 3, 1)$, otteniamo la relazione $1 \cdot (\lambda + 2\mu) + 3 \cdot (2\lambda + \mu) + 1 \cdot (-3\lambda - \mu) = 0$, vale a dire $4\lambda + 4\mu = 0$.

Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = -1$ e $\mu = 1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π .

Vedere il file dei commenti.

2

- (b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

$$x - y + 2z - 7 = 0$$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo sia a r sia a s e, dunque, è parallelo al piano π , e ha, pertanto, equazione del tipo $x - y + 2z + k = 0$. Per imporre che il piano contenga la retta s è allora sufficiente imporre che contenga un punto di s , ad esempio, il punto $(2, 1, 3)$, ottenendo la condizione $2 - 1 + 2 \cdot 3 + k = 0$, da cui troviamo $k = -7$.

3

- (c) Determinare l'equazione cartesiana della sfera con il centro sull'asse delle x e le cui intersezioni con i piani π e σ sono circonferenze entrambe di raggio uguale a 2.

$$(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$$

Motivazione:

Due piani intersecano una sfera in circonferenze di raggio uguale se e solo se il centro della sfera è equidistante dai due piani. Il generico punto dell'asse x è del tipo $(h, 0, 0)$. Imponendo che sia equidistante da π e σ troviamo l'equazione: $\frac{|h-0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|h-0+2\cdot 0-7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}$ la cui soluzione è $h = 3$. Dunque il centro della sfera cercata è $C := (3, 0, 0)$. Inoltre la distanza di C dal piano π (e da σ) è uguale a $\frac{4}{\sqrt{6}}$. Se γ è la circonferenza di raggio 2 intersezione della sfera cercata con il piano π , il suo centro H è la proiezione di C su π . Detto allora P un qualsiasi punto di γ , il triangolo CHP è un triangolo rettangolo in H il cui cateto CH è uguale alla distanza di C da π , cioè $\frac{4}{\sqrt{6}}$, mentre il cateto HP è uguale al raggio di γ cioè 2.

Per il teorema di Pitagora l'ipotenusa CP è allora uguale a $\sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{3}}$: poiché P sta sulla sfera questo valore è uguale al raggio della sfera cercata.