COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissata in $V^2(O)$ una base ortonormale formata dai vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

2 (a) Quante sono le basi di $V^2(O)$ aventi come primo vettore $\mathbf{v}_1$?

Infinite.

Motivazione:

I vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}_2 := a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ formano una base di $V^2(O)$ se e solo se essi sono linearmente indipendenti. Ciò è verificato se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

è invertibile, cioè se e solo se $a \neq b$. Chiaramente vi sono infinite coppie (a,b) verificanti questa condizione. Basta infatti osservare che, fissata per esempio $a = 0$, tutti gli infiniti numeri $b \neq 0$ verificano la condizione richiesta.

2 (b) Quante sono le basi ortonormali di $V^2(O)$ aventi come primo vettore $\mathbf{v}_1$?

Nessuna.

Motivazione:

I vettori appartenenti ad una base ortonormale hanno tutti norma uguale a 1. Poiché il vettore $\mathbf{v}_1$ ha norma diversa da 1, non esiste alcuna base ortonormale contenente il vettore $\mathbf{v}_1$.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il punto $A := (3, 5, 7)$ e, al variare dei parametri a, b, c e d, le rette:

$$r : \begin{cases} x = a + \ \ t \\ y = b + 2t \\ z = c + 3t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = \ \ 1 \\ y = \ \ 2 + dt \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

2	

(a) Determina tutti i valori di a, b, c e d per i quali esiste uno ed un sol piano passante per A e perpendicolare sia a r che a s.

Nessun valore di a, b, c e d.

Motivazione:

Le rette r e s hanno rispettivamente vettori direttori $\mathbf{u} := (1, 2, 3)$ e $\mathbf{v} := (0, d, 5)$. Osserviamo che il rango della matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & d & 5 \end{pmatrix}$$

è uguale a 2 per tutti i valori di a, b, c e d: infatti il minore formato dalla prima e dalla terza colonna ha determinante non nullo. Pertanto le due rette non sono tra loro parallele. Sappiamo però che rette perpendicolari ad uno stesso piano sono tra loro parallele. Ne segue che non esiste mai un piano perpendicolare ad entrambe le rette r e s.

2	

(b) Determina tutti i valori di a, b, c e d per i quali esiste una ed una sola retta passante per A e perpendicolare sia a r che a s.

Tutti i valori di a, b, c e d.

Motivazione:

Una retta verificante le condizioni date ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + lt \\ y = 5 + mt \\ z = 7 + nt \end{cases}$$

con il vettore $\mathbf{w} := (l, m, n)$ perpendicolare ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Pertanto (l, m, n) devono verificare il sistema:

$$\begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ \qquad dm + 5n = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema omogeneo formato da due equazioni in tre incognite. La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice B determinata nel punto (a) e quindi ha rango uguale a 2 per tutti i valori di a, b, c e d. Il nostro sistema ha quindi infinite soluzioni tutte proporzionali tra loro. Pertanto queste infinite soluzioni determinano un'unica retta.

Vedere il file dei commenti.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3

(a) Determina gli autovalori di A e una base per ciascun autospazio di A. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(-2, 1, 0)$
5	$(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = -x(x-5)^2$, che si annulla per 0 e 5.

Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-2h, h, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

Per calcolare $E(5)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 5I$, cioè

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, 2h, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(5)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

2

(b) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad M := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Vedere il file dei commenti.*

2

(c) Determina, se esiste, un'altra matrice ortogonale N tali che $D = N^{-1}AN$ (con D stessa matrice diagonale determinata al punto precedente).

$N := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *Vedere il file dei commenti.*

Motivazione:

Le colonne di una matrice ortogonale che diagonalizza A si ottengono a partire da una base ortonormale di ciascun autospazio: basta quindi prendere, anche solo per uno degli autospazi, una base ortonormale differente. Ad esempio, nella base ortonormale di $E(5)$ utilizzata per scrivere M rimpiazziamo il vettore $(0, 0, 1)$ con il suo vettore opposto $(0, 0, -1)$ ottenendo un vettore che è anch'esso ortogonale all'altro vettore della base di $E(5)$ ed ha norma 1: modifichiamo poi di conseguenza la terza colonna della matrice ortogonale.

4. Si consideri il sistema di equazioni $\begin{cases} x + y - z + tw = 1 \\ x + 2y + tz - w = 2t \\ 2x + 2ty - 2z + 2w = 2 \end{cases}$ dove t è un parametro reale.

2	

(a) Determinare i valori di t per cui il sistema ha una sola soluzione.

Nessun valore

Motivazione:

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema ha un'unica soluzione se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno entrambe rango uguale al numero delle incognite, cioè, in questo caso, 4. La matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno entrambe 3 righe e quindi hanno al massimo rango 3: pertanto non esiste alcun valore per cui hanno rango 4.

Vedere il file dei commenti.

3	

(b) Determina i valori di t per cui il sistema ha infinite soluzioni, specificando per ciascuno di essi la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni.

Vi sono infinite soluzioni per ogni valore di t.
Per $t = 1$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione 2
per $t \neq 1$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione 1

Motivazione:

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango: in tal caso le soluzioni dipendono da un numero di parametri uguale al numero delle incognite meno il rango delle matrici.
La matrice del sistema è $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & t & -1 \\ 2 & 2t & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamone il rango. Il minore B formato dalle prime 2 righe e dalle prime 2 colonne di A_t ha determinante non nullo. Gli orlati di B sono le matrici $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & t \\ 2 & 2t & -2 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2t & 2 \end{pmatrix}$. Questi minori hanno determinante rispettivamente uguale a $-2t^2 + 2$ e $2t^2 - 2t$. Il determinante di C_1 si annulla per $t = 1$ e $t = -1$ mentre quello di C_2 si annulla per $t = 0$ e $t = 1$: l'unico valore per cui si annullano contemporaneamente è $t = 1$. Pertanto A_t ha rango 3 se $t \neq 1$ e rango 2 se $t = 1$. Nel primo caso anche la matrice completa del sistema ha rango 3: infatti il suo rango è maggiore o uguale del rango della matrice del sistema e non può essere maggiore di 3 perché la matrice completa ha 3 righe. Pertanto, se $t \neq 1$ il sistema è risolubile con infinite soluzioni dipendenti da $4 - 3 = 1$ parametro. Pertanto lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione 1.
Se invece $t = 1$ consideriamo gli orlati di B nella matrice completa del sistema: sappiamo già che due di essi (cioè C_1 e C_2) hanno determinante nullo. L'unico che dobbiamo considerare è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante di questo minore è 0 la matrice completa del sistema ha rango 2 e il sistema è risolubile con infinite soluzioni dipendenti da $4 - 2 = 2$ parametri indipendenti. Pertanto lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione 2.

2	

(c) Tra i valori di t determinati al punto precedente scegline uno per cui la dimensione dello spazio affine delle soluzioni è la più alta e trova tutte le soluzioni del sistema in tal caso.

Valore di t scelto: $t = 1$

Soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 3h - 3k \\ y = 1 - 2h + 2k \\ z = h \\ w = k \end{cases}$$ con h e k parametri reali

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3,4)$, $B := (5,3)$. Sia r la retta passante per A e B.

3 (a) Determina due punti C e D tali che $ABCD$ sia un quadrato contenuto nel semipiano delimitato da r e contenente l'origine:

$C = (4,1)$	$D = (2,2)$

Motivazione:

La retta r ha equazione $\begin{vmatrix} x-3 & y-4 \\ 5-3 & 3-4 \end{vmatrix} = 0$ cioè $x + 2y - 11 = 0$. Poiché $0 + 2 \cdot 0 - 11 < 0$, il semipiano delimitato da r e contenente l'origine è definito dalla disequazione $x+2y-11 < 0$. Il quadrato cercato ha lato uguale alla distanza tra A e B cioè $\sqrt{(5-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$. La retta ortogonale a r e passante per A ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \ \ t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$: dunque il generico punto di questa retta è $(3 + t, 4 + 2t)$. Imponendo che la distanza di questo punto da A sia uguale al lato del quadrato troviamo $\sqrt{(3 + t - 3)^2 + (4 + 2t - 4)^2} = \sqrt{5}$ da cui otteniamo $t = 1$ e $t = -1$. I due punti che otteniamo in corrispondenza di tali valori appartengono a semipiani opposti rispetto a r. Per $t = 1$ otteniamo il punto $(4,6)$: poiché $4 + 2 \cdot 6 - 11 > 0$, il punto cercato è l'altro, cioè $D := (2,2)$. Poiché un quadrato è, in particolare, un parallelogramma, per trovare C calcoliamo prima il punto medio M tra B e D. Otteniamo così $M = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Imponendo che M sia il punto medio tra $C := (\bar{x}, \bar{y})$ e A otteniamo $\left(\frac{\bar{x}+3}{2}, \frac{\bar{y}+4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ da cui ricaviamo $C = (4,1)$.

Vedere il file dei commenti.

2 (b) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al quadrato $ABCD$ (cioè passante per i punti A, B, C e D) e l'equazione cartesiana della circonferenza inscritta al quadrato $ABCD$ (cioè tangente ai lati del quadrato)

Circonferenza circoscritta: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
Circonferenza inscritta: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Motivazione:

Entrambe le circonferenze hanno centro nel centro M del quadrato che abbiamo gia determinato al punto precedente. La circonferenza inscritta ha raggio uguale alla metà del lato del quadrato, cioè $\frac{\sqrt{5}}{2}$, mentre il raggio della circonferenza circoscritta può essere calcolato come la distanza tra il centro della circonferenza e uno qualunque dei vertici del quadrato, ad esempio A, ottenendo $\sqrt{\left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

2 (c) Detta s la retta passante per C e D e detto P il punto di intersezione tra la retta s e l'asse delle x determina l'area del triangolo ABP

$A(ABP) = \frac{5}{2}$

Motivazione:

Consideriamo come base del triangolo il lato AB la cui lunghezza è $\sqrt{5}$. L'altezza relativa a tale base è data dalla distanza di P da r: poiché P giace sulla retta s che è parallela a r, la distanza di P da r è uguale alla distanza di s da r cioè al lato del quadrato $ABCD$ che è $\sqrt{5}$. Il triangolo ha allora area $\frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$.

Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 3x + 2y - 3z - 11 = 0 \\ 4x + 3y - 5z - 9 = 0 \end{cases}$

3 | (a) Le rette r e s sono:

☐ coincidenti ☐ incidenti ☒ parallele e distinte ☐ sghembe

Motivazione:

Se trasformiamo le equazioni cartesiane di r e s nelle equazioni parametriche otteniamo:
$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
Poiché i parametri direttori delle due rette sono proporzionali, le due rette sono parallele. Per stabilire coincidono oppure sono distinte prendiamo un punto qualsiasi di r, ad esempio $P := (1, 1, 2)$ e ne sostituiamo le coordinate nelle equazioni di s. Poiché $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 11 \neq 0$ abbiamo che P non appartiene a s e, dunque, le due rette sono distinte.

Vedere il file dei commenti.

2 | (b) Di piani contenenti r e paralleli a s:

☐ non ne esiste nessuno;
☐ ne esiste uno solo: il piano π di equazione cartesiana
☒ ne esiste più di uno.

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che le rette r e s sono parallele. Dunque tutti i piani che contengono r, essendo paralleli a r, sono anche paralleli a s.

Vedere il file dei commenti.

2 | (c) Di piani contenenti r e ortogonali a s:

☒ non ne esiste nessuno;
☐ ne esiste uno solo: il piano σ di equazione cartesiana
☐ ne esiste più di uno.

Motivazione:

Sappiamo già che le rette r e s sono parallele: quindi ogni piano ortogonale a s è anche ortogonale a r. I piani contenenti r non sono ortogonali a r stessa, quindi non esiste nessun piano come quello cercato.

Vedere il file dei commenti.