COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i punti $A := (1, 1, 0, 0)$, $B := (2, 1, 1, 1)$, $C := (1, k, 0, 1)$ e $D := (2, 1, k, 0)$ di $\mathbb{R}^4$ con k parametro reale.

2 | (a) Per quali valori di k i punti A, B e C sono allineati?

Nessun valore

Motivazione:

Facendo le differenze delle coordinate di B e A e delle differenze delle coordinate di C e A, otteniamo i vettori $(1, 0, 1, 1)$ e $(0, k-1, 0, 1)$. I punti A, B e C sono allineati se e solo se questi vettori sono linearmente dipendenti. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k-1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 per ogni valore di k (infatti le ultime 2 righe formano un minore invertibile). Pertanto non c'è alcun valore di k per cui i 3 punti sono allineati.

2 | (b) Per quali valori di k i punti A, B, C e D sono complanari?

$k = 1$

Motivazione:

Facendo le differenze delle coordinate di B e A, delle differenze delle coordinate di C e A, e delle coordinate di D e A otteniamo i vettori $(1, 0, 1, 1)$, $(0, k-1, 0, 1)$ e $(1, 0, k, 0)$. I punti A, B, C e D sono complanari se e solo se questi vettori sono linearmente dipendenti, il che avviene se e solo se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango minore di 3. Questa matrice ha rango almeno 2 per ogni valore di k (infatti le ultime 2 righe e prime 2 colonne formano un minore invertibile). I due orlati di questo minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hanno determinante rispettivamente $1-k$ e k^2-k. L'unico valore per cui si annullano entrambi è $k = 1$, e quindi questo è l'unico valore per cui i punti sono complanari.

2. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} 2x + ky + z = k \\ kx + 2y - z = 2 \end{cases}$$

2	

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

Nessuno

Motivazione:

Un sistema risolubile ha esattamente una soluzione se e solo se il rango della matrice del sistema è uguale al numero delle incognite. In questo caso il numero delle incognite è 3 mentre la matrice del sistema è a 2 righe e a 3 colonne e, quindi, il suo rango è al massimo uguale a 2.

2	

(b) Per quali valori di k il sistema ha infinite soluzioni?

Tutti i valori di k

Motivazione:

La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Il minore di ordine 1 formato dalla prima riga e prima colonna è, ovviamente, invertibile. I suoi orlati sono $\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}$ che hanno determinante, rispettivamente, $4 - k^2$ e $-2 - k$. L'unico valore per cui si annullano entrambi è $k = -2$. Dunque, per $k \neq -2$ la matrice ha rango 2, mentre per $k = -2$ la matrice ha rango 1.
Se $k \neq -2$, la matrice completa del sistema ha rango anch'essa 2 perché, essendo una matrice a 2 righe non può avere rango maggiore di 2. Pertanto per $k \neq -2$ il sistema è risolubile e le soluzioni dipendono da $3 - 2 = 1$ parametro. In particolare ci sono infinite soluzioni.
Se $k = -2$ la matrice completa del sistema diviene $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. La seconda riga è l'opposto della prima: dunque la matrice ha rango 1 e il sistema è risolubile con soluzioni dipendenti da $3 - 1 = 2$ parametri. In particolare ci sono infinite soluzioni.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito da $f(x, y, z) := (2x-2y+2z, x-y+z, y+z, 2x+y+5z)$.

2 (a) Determina una base dell'immagine di f.

$(2, 1, 0, 2)$, $(-2, -1, 1, 1)$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore formato dalla seconda e terza riga e dalle prime 2 colonne è invertibile, mentre i suoi orlati hanno determinante nullo, la matrice A ha rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime 2 colonne di A formano una base per l'immagine.

2 (b) Determina una base del nucleo di f.

$(-2, -1, 1)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo: $\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$. Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che la seconda e terza riga sono linearmente indipendenti. Dunque il sistema è equivalente al sistema formato dalla seconda e terza equazione $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Trattando z come parametro vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(-2h, -h, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Ponendo $h = 1$ troviamo il vettore $(-2, -1, 1)$.

3 (c) Determina una base di un sottospazio vettoriale E di $\mathbb{R}^4$ tale che $R^4 = f(\mathbb{R}^3) \oplus E$.

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$

Motivazione:

Considerata la base di $f(\mathbf{R}^3)$ determinata al punto a, è possibile completare questa base ed ottenere una base di $\mathbb{R}^4$, aggiungendo vettori opportunamente scelti da una base qualunque di $\mathbb{R}^4$, ad esempio la base canonica. Iniziamo ad aggiungere un vettore, Dobbiamo provare a uno a uno i vettori della base canonica finché ne troviamo uno che non è combinazione lineare di $(2, 1, 0, 2)$ e $(-2, -1, 1, 1)$. Poiché la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3, possiamo prendere il vettore $(1, 0, 0, 0)$. Cerchiamo ora tra i rimanenti vettori della base canonica uno che non sia combinazione lineare di $(2, 1, 0, 2)$, $(-2, -1, 1, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$. Il rango di $B := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è 4, quindi possiamo prendere il vettore $(0, 1, 0, 0)$. Il sottospazio generato E generato da $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$ ha dimensione 2 e la somma $f(\mathbb{R}^3) + E$ ha dimensione 4 (il rango di B). Dunque $f(\mathbb{R}^3) + E = \mathbb{R}^4$ e, per la formula di Grassmann $\dim(f(\mathbb{R}^3) \cap E) = \dim f(\mathbb{R}^3) + \dim E - \dim(f(\mathbb{R}^3) + E) = 2 + 2 - 4 = 0$.

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

3	

(a) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

ogni valore di k

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è uguale a $-(3-x)(4-x)^2x$ qualunque sia k. I suoi autovalori sono, dunque, 0, 3 e 4. Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi. Si ha $\dim E(0) = 4 - \operatorname{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 1$ qualunque sia k: infatti il minore formato dalle prime 3 righe e 3 colonne di $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 per ogni k; si ha $\dim E(3) = 4 - \operatorname{rk}(A_k - 3 \cdot I) = 1$ qualunque sia k: infatti il minore formato dalla prima, terza e quarta riga e prima, terza e quarta colonna di $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 per ogni k; infine si ha $\dim E(4) = 4 - \operatorname{rk}(A_k - 4 \cdot I) = 2$ qualunque sia k: infatti il minore formato dalle prime 2 righe e prime 2 colonne di $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 per ogni k mentre i suoi orlati hanno tutti determinante nullo.
Dunque la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale all'ordine della matrice, cioè a 4, per ogni valore di k.

1	

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = -2$

Motivazione:

Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = -2$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = -2$

3	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 2)$, $B := (4, 5)$ e le rette $r : x - 3y + 4 = 0$ e $s : 2x - y + 3 = 0$. Sia C l'intersezione di r e s.

2 (a) Determina l'equazione cartesiana della retta passante per C e parallela alla retta passante per A e B.

$15x - 10y + 25 = 0$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha parametri direttori $(4 - 2, 5 - 2) = (2, 3)$.
Le rette passanti per P sono tutte e solo quelle del fascio di rette

$$h(x - 3y + 4) + k(2x - y + 3) = 0,$$

vale a dire

$$(h + 2k)x + (-3h - k)y + (4h + 3k) = 0.$$

Imponendo il parallelismo della retta generica di questo fascio con il vettore direttore della retta passante per A e B otteniamo la condizione $2 \cdot (h + 2k) + 3 \cdot (-3h - k) = 0$ vale a dire $-7h + k = 0$. Scegliendo, ad esempio, $h = 1$ e $k = 7$ otteniamo l'equazione della retta cercata.

2 (b) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$D = (-3, -2)$

Motivazione:

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

troviamo che il punto C ha coordinate $(-1, 1)$.
Il punto medio tra A e C è il punto $M := \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Il punto D è il simmetrico di B rispetto a M: se $D := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0+4}{2}, \frac{y_0+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ da cui otteniamo $x_0 = -3$, $y_0 = -2$.

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4x - 5y + 9 > 0 \\ x - 3y + 4 < 0 \\ 3x - 2y - 2 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (3, 1, 2)$ e il piano $\pi : x + 2y - 2z - 19 = 0$.

2	

(a) La sfera S di centro P e tangente il piano π ha equazione:

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 36$

Motivazione:

La sfera S ha raggio uguale alla distanza di P da π. La distanza di P da π è:

$$\frac{|3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 36$.

2	

(b) Il piano σ tangente a S, parallelo a π e distinto da esso ha equazione cartesiana:

$\pi : x + 2y - 2z + 17 = 0$

Motivazione:

Il generico piano parallelo a π ha equazione $\pi : x + 2y - 2z + k = 0$. Imponendo che la distanza di questo generico piano dal centro P della sfera sia uguale al raggio della sfera otteniamo l'equazione:

$$\frac{|3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6,$$

vale a dire $\frac{|1+k|}{3} = 6$, le cui soluzioni sono $k = -19$ e $k = 17$. La prima corrisponde al piano π, l'altra dà l'equazione del piano σ.

3	

(c) Detto H il punto di tangenza tra la sfera S e il piano π, le sfere di raggio 5 la cui intersezione con π è la circonferenza γ di centro H e di raggio 4 hanno equazione cartesiana:

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 25 \qquad (x - 6)^2 + (y - 7)^2 + (z + 4)^2 = 25$

Motivazione:

Il punto H è la proiezione ortogonale di P sul piano π, dunque appartiene alla retta orotogonale a π e passante per P cioè la retta

$$n : \begin{cases} x = 3 + \ \ t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}.$$

Detto C il centro di una delle sfere cercate, affinché la sua intersezione con π abbia centro in H, la proiezione ortogonale di C su π deve essere H, cioè C deve appartenere alla retta passante per H e ortogonale a π, cioè la retta n stessa. Detto A un punto qualsiasi della circonferenza γ il triangolo CHA è rettangolo in H. L'ipotenusa CA è uguale al raggio della sfera cercata, cioè 5, il cateto HA è uguale al raggio della circonferenza γ, cioè 4, e, quindi, il cateto CH deve essere uguale a $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Poiché la lunghezza del cateto CH è uguale alla distanza di C da π dobbiamo allora cercare i punti sulla retta n la cui distanza da π sia uguale a 3. Otteniamo così la condizione

$$\frac{|(3 + t) + 2 \cdot (1 + 2t) - 2 \cdot (2 - 2t) - 19|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3.$$

cioè $|3t - 6| = 3$ le cui soluzioni sono $t = 1$ e $t = 3$. Sostituendo questi valori nelle equazioni di n troviamo i centri $(4, 3, 0)$ e $(6, 7, -4)$ delle due sfere cercate.