COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^5$ siano dati l'iperpiano $\pi : x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 1 = 0$ e i punti $A := (k, 0, 0, 0, 0)$ e $B := (0, 3, 0, 0, 1)$.

2 (a) Per quali valori di k il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano?

$k > 1$

Motivazione:

L'iperpiano π divide $\mathbb{R}^5$ nei semispazi definiti dalle disequazioni $x_1-x_2+2x_3-2x_4+x_5-1 > 0$ e $x_1-x_2+2x_3-2x_4+x_5-1 < 0$. Il segmento di estremi A e B interseca l'iperpiano se i punti A e B stanno in semispazi diversi. Sostituendo le coordinate dei punti A e B nel polinomio $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 1$ otteniamo, rispettivamente $k - 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = k - 1$ e $0 - 3 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 - 1 = -3 < 0$. Dunque A e B stanno su semipiani diversi se e solo se $k - 1 > 0$ cioè $k > 1$.

2 (b) Per quali valori di k la retta passante per A e B è ortogonale all'iperpiano π?

Nessun valore

Motivazione:

La direzione ortogonale all'iperpiano è individuata dal vettore $(1, -1, 2, -2, 1)$. La direzione della retta passante per A e B è individuata dal vettore $(0 - k, 3 - 0, 0 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (-k, 3, 0, 0, 1)$. Non c'è alcun valore di k per cui tali vettori sono proporzionali.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $f(1,1,0) = f(0,1,-1)$ e $f(1,1,1) = (0,0)$.

2	

(a) L'applicazione lineare f è suriettiva?

☐ Sì ☒ No ☐ Le informazioni non sono sufficienti a stabilirlo

Motivazione:

Poiché i vettori $(1,1,0)$ e $(0,1,-1)$ hanno la stessa immagine, la loro differenza, cioè il vettore $(1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1)$ ha come immagine $(0,0)$. Pertanto il nucleo di f contiene i vettori $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$. Poiché questi vettori sono linearmente indipendenti il nucleo di f ha almeno dimensione 2. Ma allora $\dim f(\mathbb{R}^3) = 3 - \dim\ker f \leq 3 - 2 = 1$. Pertanto f non è suriettiva.

2	

(b) È possibile determinare $f(0,1,0)$ con le informazioni in nostro possesso? Se sì, qual è?

☒ Sì $f(0,1,0) = (0,0)$ ☐ Le informazioni non sono sufficienti a determinare $f(0,1,0)$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$ appartengono al nucleo di f. Poiché $(0,1,0) = (1,1,1) - (1,0,1)$ anche il vettore $(0,1,0)$ appartiene al nucleo di f, cioè $f(0,1,0) = (0,0)$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\}$ e il sottospazio vettoriale F_k generato da $\mathbf{u} := (1, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_k := (k, 2, 1, 0)$ con k parametro reale.

2 (a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}_k$ appartiene a E?

$k = 0$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}_k$ appartiene a E se e solo se $k - 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0$, cioè se e solo se $k = 0$.

2 (b) Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

Nessun valore

Motivazione:

La somma $E + F_k$ è diretta se e solo se $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$. Il sottospazio E è dato come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo formato da una sola equazione non banale. Dunque $\dim E = 4 - 1 = 3$. Il sottospazio F_k è generato da due vettori che, qualunque sia k, non sono multipli uno dell'altro: pertanto $\dim F_k = 2$. Per la formula di Grassmann si ha allora $\dim(E \cap F_k) = \dim E + \dim F_k - \dim(E + F_k) = 5 - \dim(E + F_k)$. Poiché la dimensione di $E + F_k$ non può superare la dimensione di $\mathbb{R}^4$, cioè 4, la dimensione di $E \cap F_k$ è almeno 1.

3 (c) Determina una base ortonormale di E.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

4. Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-2 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

| 3 | |

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} := (1, 0, 0)$ appartiene all'immagine di f?

$k \neq 2$

Motivazione:

Il determinante della matrice A_k è $(k-2)(k^2-4) = (k-2)^2(k+2)$. Per $k \neq 2$ e $k \neq -2$ la matrice è invertibile e, quindi, f è un endomorfismo biiettivo: la usa immagine coincide con $\mathbb{R}^3$ e, dunque, contiene in particolare $\mathbf{v}$. Per $k = 2$ la matrice diviene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché l'immagine di f_k è generata dai vettori le cui decomposizione rispetto alla base canonica è data dalle colonne di A_k, vediamo che in tal caso l'immagine è generata dal solo vettore $(1, 2, 2)$: in particolare non contiene $\mathbf{v}$. Per $k = -2$ la matrice diviene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Considerando ancora i vettori di $\mathbb{R}^3$ corrispondenti alle colonne, vediamo che $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio generato da essi: infatti è un multiplo del vettore $(-4, 0, 0)$ corrispondente alla terza colonna.

| 2 | |

(b) Per quali valori di k il nucleo di f_k ha dimensione 2?

$k = 2$

Motivazione:

La dimensione del nucleo di f_k è uguale a $3 - \operatorname{rk} A_k$. Il nucleo ha dimensione 2 se e solo se la matrice A_k ha rango 1, cioè se e solo se le sue colonne sono tutte multiple una dell'altra. Ciò avviene se e solo se $k = 2$.

| 2 | |

(c) Fissato $k = 2$ determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (5, 5)$, $B := (6, 4)$ e $C := (-1, 5)$.

2	

(a) Determina l'intersezione degli assi del triangolo.

$D := (2, 1)$

Motivazione:

I tre assi di un triangolo si intersecano in un punto: è quindi sufficiente intersecare due degli assi. Il punto medio di A e B è il punto $M := \left(\frac{5+6}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$. La retta passante per A e B ha parametri direttori $(6-5, 4-5) = (1, -1)$. Dunque la generica retta ortogonale al lato AB ha equazione cartesiana del tipo $x - y + h = 0$. Imponendo il passaggio per M otteniamo la condizione $\frac{11}{2} - \frac{9}{2} + h = 0$ da cui ricaviamo $h = -1$. L'equazione dell'asse è, dunque, $x - y - 1 = 0$. Il punto medio di A e C è il punto $N := \left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = (2, 5)$. La retta passante per A e B ha parametri direttori $(5-(-1), 5-5) = (6, 0)$, cioè è parallela all'asse delle x. Dunque la generica retta ortogonale al lato AB ha equazione cartesiana del tipo $x + k = 0$. Imponendo il passaggio per N otteniamo la condizione $2 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = -2$. L'equazione dell'asse è, dunque, $x - 2 = 0$. Intersecando i due assi troviamo allora il punto $D := (2, 1)$.

2	

(b) La circonferenza passante per i punti A, B e C ha equazione cartesiana:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

Motivazione:

L'intersezione degli assi del triangolo è equidistante dai tre vertici ed è quindi il centro della circonferenza cercata. Sappiamo già dal punto precedente che questo centro è il punto $(2, 1)$. Calcolando la sua distanza da uno qualsiasi dei vertici, ad esempio A, troviamo il raggio della circonferenza: $\sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$. Dunque la circonferenza cercata ha equazione $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y - 10 < 0 \\ y - 5 < 0 \\ x + 7y - 34 > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano date le rette $r : \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$

2 (a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

$x - y - 3 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda(2x-3y+z-2)+\mu(x-2y+z+1) = 0$ ovvero $(2\lambda + \mu)x + (-3\lambda - 2\mu)y + (\lambda + \mu)z - 2\lambda + \mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, 1, -2)$, otteniamo la relazione $(2\lambda + \mu) \cdot 1 + (-3\lambda - 2\mu) \cdot 1 + (\lambda + \mu) \cdot (-6) = 0$, vale a dire $-7\lambda - 7\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2 (b) Il piano σ parallelo sia a s che a r e contenente il punto $A := (1, -3, 1)$ ha equazione:

$x - y - 4 = 0$

Motivazione:

Il piano cercato è parallelo sia a r sia a s e, dunque, è parallelo al piano π, e ha, pertanto, equazione del tipo $x - y + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A, otteniamo la condizione $1 - (-3) + k = 0$, da cui troviamo $k = -4$.

3 (c) La retta t proiezione ortogonale di r sul piano σ ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta t è l'intersezione del piano σ con il piano ρ contenente r e ortogonale a σ. Dalla soluzione del punto a sappiamo già che il generico piano contenente r ha equazione del tipo $(2\lambda + \mu)x + (-3\lambda - 2\mu)y + (\lambda + \mu)z - 2\lambda + \mu = 0$. Imponendo l'ortogonalità di questo piano con σ vale a dire l'ortogonalità dei rispettivi vettori ortogonali, otteniamo la condizione $(2\lambda + \mu) \cdot 1 + (-3\lambda - 2\mu) \cdot (-1) + (\lambda + \mu) \cdot 0 = 0$, vale a dire $5\lambda + 3\mu = 0$. Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 3$ e $\mu = -5$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano $\rho : x + y - 2z - 11 = 0$.