COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione 5 e sia F un suo sottospazio vettoriale con una base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia W un suo sottospazio vettoriale con una base formata dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

2 (a) Esiste un omomorfismo $f : E \to V$ il cui nucleo è F e la cui immagine è W?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Completiamo la base data di F ad una base di E. Otteniamo così una base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ e $\mathbf{e}_5$. L'assegnazione arbitraria delle immagini dei vettori dello spazio di partenza definisce un omomorfismo. Poniamo allora $f(\mathbf{e}_1) := \mathbf{0}_V$, $f(\mathbf{e}_2) := \mathbf{0}_V$, $f(\mathbf{e}_3) := \mathbf{0}_V$, $f(\mathbf{e}_4) := \mathbf{v}_1$ e $f(\mathbf{e}_5) := \mathbf{v}_2$. L'immagine dell'omomorfismo così definito è generata dalle immagini dei vettori di una base dello spazio di partenza. Dunque l'immagine è generata da $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e, pertanto, coincide con W. Il nucleo ha dimensione $\dim E - \dim f(E) = \dim E - \dim W = 5 - 2 = 3$. Poiché il nucleo di f contiene perlomeno i vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$, esso contiene F. Poiché F ha dimensione esattamente 3, ciò significa che il nucleo di f coincide con F.

2 (b) Esiste un omomorfismo $g : V \to E$ il cui nucleo è W e la cui immagine è F?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

La somma della dimensione dell'immagine e del nucleo deve essere uguale alla dimensione dello spazio di partenza. Poiché $\dim V = 4$ e $\dim W + \dim F = 2 + 3 = 5$, non esiste nessun omomorfismo che soddisfa le condizioni date.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $A := (1,1,0,0)$, $B := (1,0,-1,0)$, $C := (2,1,1,0)$ e $D := (2,0,0,k)$.

2	

(a) Per quali valori di k esiste un piano che contiene i punti A, B, C e D?

$k = 0$

Motivazione:

La dimensione dell'inviluppo affine dei punti A, B, C e D è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale generato dai vettori $B - A = (0,-1,-1,0)$, $C - A = (1,0,1,0)$ e $D - A = (1,-1,0,k)$. La dimensione di tale sottospazio è uguale al rango della matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Il minore formato dalle prime due righe e due colonne ha determinante non nullo. I suoi orlati sono $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ che hanno rispettivamente determinante 0 e k. L'unico valore per cui tali minori hanno entrambi determinante nullo è $k = 0$. Dunque la matrice M ha rango 2 se $k = 0$ e rango 3 se $k \neq 0$. Pertanto per $k = 0$ l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D ha dimensione 2: dunque tali punti sono contenuti in un piano. Invece per $k \neq 0$ l'inviluppo affine dei punti A, B, C e D ha dimensione 3: pertanto tali punti non sono contenuti in un piano.

Vedere il file dei commenti.

2	

(b) Per quali valori di k esiste un iperpiano che contiene i punti A, B, C e D?

Ogni valore

Motivazione:

L'inviluppo affine di 4 punti qualsiasi ha dimensione al massimo 3: poiché gli iperpiani di $\mathbb{R}^4$ sono proprio i sottospazi affini di dimensione 3, esiste sempre un iperpiano che li contiene.

Vedere il file dei commenti.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato l'endomorfismof_k di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 1 & k & -k-1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (1, 1, -1)$.

2 | |

(a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k?

$k = -\frac{1}{2}$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k se e solo se esiste λ tale che $f_k(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Moltiplicando la matrice A per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 & k & -k-1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ottiene che $f(\mathbf{v}) = (2 + 2k, 1, -1)$. Dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che

$$(2 + 2k, 1, -1) = \lambda(1, 1, -1),$$

cioè $2 + 2k = \lambda$, $1 = \lambda$ e $-1 = -\lambda$. Ciò avviene se e solo se $\lambda = 1$ e $k = -\frac{1}{2}$.
Vedere il file dei commenti.

2 | |

(b) Per quali valori di k l'immagine di f_k ha dimensione 2?

Ogni valore

Motivazione:

La dimensione dell'immagine di f_k è uguale al rango di una sua qualsiasi matrice rappresentativa, ad esempio A_k. Osserviamo che il minore formato dalle prime 2 righe e 2 colonne di A_k è invertibile qualunque sia k, quindi la matrice A_k ha sempre rango almeno 2. Il determinante di A_k è inoltre sempre 0, pertanto A_k ha rango esattamente 2 qualunque sia k. Pertanto l'immagine di f_k ha dimensione 2 qualunque sia k.

3 | |

(c) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = -\frac{1}{2}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è $\det(A_k - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & k & -k-1 \\ 0 & 3-x & 2 \\ 0 & -3 & -2-x \end{vmatrix} = -x(x-1)^2$. Pertanto il polinomio caratteristico di A_k è totalmente riducibile e gli autovalori sono 0 di molteplicità 1 e 1 di molteplicità 2. Dobbiamo ora verificare per ciascun autovalore se la sua molteplicità coincide con la dimensione del relativo autospazio. Non è necessario far ciò per gli autovalori semplici: per essi la dimensione dell'autospazio è automaticamente uguale alla molteplicità. Consideriamo allora l'autovalore 1. La dimensione dell'autospazio relativo a 1 è uguale a:

$$3 - \operatorname{rk}(A_k - 1 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & k & -k-1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 - 2 = 1 & \text{se } k \neq -\frac{1}{2} \\ 3 - 1 = 2 & \text{se } k = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Pertanto per $k = -\frac{1}{2}$ la molteplicità di ciascun autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio e, pertanto, A_k è diagonalizzabile, mentre se $k \neq -\frac{1}{2}$ esiste un autovalore (cioè 1) la cui molteplicità non coincide con la dimensione del relativo autospazio e, pertanto, A_k non è diagonalizzabile.
Vedere il file dei commenti.

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 3, 1)$ e sia F il sottospazio vettoriale così definito $F := \{(x, y, z, w) \mid x - y + z = 0, x - z + w = 0\}$.

2 (a) Determina una base per $E \cap F$.

$(2, 5, 3, 1)$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{z}$ appartiene a E se e solo se si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cioè se si ha per qualche valore di α e β:

$$\mathbf{z} = \alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 1, 3, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\beta, \beta).$$

Imponendo che $\mathbf{z}$ appartenga a F troviamo le condizioni $\alpha-(2\alpha+\beta)+3\beta = 0$ e $\alpha-3\beta+\beta = 0$ vale a dire il sistema

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}.$$

Chiaramente questo sistema ha soluzioni del tipo $\alpha = 2\beta$. I vettori di $E \cap F$ sono allora i vettori del tipo $(2\beta, 2 \cdot 2\beta + \beta, 3\beta, \beta) = (2\beta, 5\beta, 3\beta, \beta)$. Scegliendo, ad esempio, $\beta = 1$ si trova un vettore che forma una base di $E \cap F$.

2 (b) Determina una base per $E + F$.

$(1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 3, 1)$, $(1, 1, 0, -1)$

Motivazione:

Cerchiamo innanzitutto dei generatori di $E + F$ da cui poi estrarremo una base. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ generano E: poiché sono linearmente indipendenti essi sono una base per E, che ha, dunque, dimensione 2. Risolvendo il sistema che definisce F troviamo che una base per F è formata, ad esempio, dai vettori $\mathbf{e} := (1, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{f} := (0, 1, 1, 1)$. Dunque anche F ha dimensione 2. Dal punto precedente sappiamo che $\dim(E \cap F) = 1$. Per la formula di Grassmann, si ha $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3$. Cerchiamo ora una base per $E + F$. I vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$ generano $E + F$: dobbiamo sceglierne tra essi 3 linearmente indipendenti. Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti basta aggiungere a essi uno tra i vettori $\mathbf{e}$ o $\mathbf{f}$ che non sia loro combinazione lineare. Notiamo subito che, ad esempio, $\mathbf{e}$ non è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ perché, se così fosse, dovrebbe appartenere all'intersezione $E \cap F$ ed essere multiplo del vettore $(2, 5, 3, 1)$ che forma una base di $E \cap F$. Pertanto $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{e}$ formano una base di $E + F$.
Vedere il file dei commenti.

3 (c) Stabilire se esiste un vettore non nullo appartenente a F e ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$ e in caso affermativo determinarne uno.

☐ Sì. Un vettore siffatto è:	☒ No

Motivazione:.

Un vettore $\mathbf{t} := (x, y, z, w)$ è ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{t} = 0$, cioè se e solo se $1 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = 0$ e $0 \cdot x + 1 \cdot y + 3 \cdot z + 1 \cdot w = 0$. Dunque $\mathbf{t}$ appartiene a F ed è ortogonale a sia a $\mathbf{u}$ sia a $\mathbf{v}$ se e solo se

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z + w = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + 3z + w = 0 \end{cases}$$

La matrice di questo sistema omogeneo è invertibile quindi l'unica soluzione è quella banale. In particolare non esiste un vettore non nullo in F e ortogonale sia a $\mathbf{u}$ sia a $\mathbf{v}$.
Vedere il file dei commenti.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (1, 7)$ e la retta $r : 2x - 3y + 14 = 0$.

2	

(a) Determina un punto C sulla retta r in modo che la mediana passante per C del triangolo ABC sia parallela all'asse x.

$(-1, 4)$

Motivazione:

La mediana passante per C del triangolo ABC è la retta passante per C e per il punto medio M tra A e B. Tale punto M ha coordinate $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (2, 4)$. La retta passante per tale punto e parallela all'asse x ha equazione $y - 4 = 0$. Il punto C appartiene a tale retta e alla retta r. Intersecando queste due rette troviamo che C ha coordinate $(-1, 4)$.

Vedere il file dei commenti.

2	

(b) Determina un punto D sulla retta r in modo che la mediana passante per A del triangolo ABD sia parallela all'asse y.

$D := (5, 8)$

Motivazione:

La retta passante per A e parallela all'asse y ha equazione $x - 3 = 0$. Affinché questa sia la mediana passante per A del triangolo ABD, è necessario e sufficiente che il punto medio tra D e B giaccia su questa retta. Se $D := (\bar{x}, \bar{y})$, il punto medio tra D e B è $\left(\frac{\bar{x}+1}{2}, \frac{\bar{y}+7}{2}\right)$. Tale punto appartiene alla retta di equazione $x - 3 = 0$ se e solo se $\frac{\bar{x}+1}{2} - 3 = 0$ cioè se e solo se $\bar{x} = 5$. Dunque il punto D ha coordinate $(5, \bar{y})$. Imponendo che tale punto appartenga alla retta r troviamo la condizione $2 \cdot 5 - 3\bar{y} + 14 = 0$ da cui otteniamo $\bar{y} = 8$.

Vedere il file dei commenti.

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 11 > 0 \\ 3x + 4y - 13 > 0 \\ 3x + y - 10 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (2, 3, 1)$ e il piano $\pi : x + y - z - 10 = 0$.

2 (a) La sfera S di centro P e tangente il piano π ha equazione:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 12$

Motivazione:

Una sfera è tangente a un piano se e solo se la distanza del suo centro dal piano è uguale al raggio. La distanza di P da π è:

$$\frac{|2 + 3 - 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{12}.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 12$.

2 (b) Sia σ il piano parallelo a π e passante per P. La sfera T che ha il centro su π e che è tangente in P a σ ha equazione:

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 12$

Motivazione:

Il piano tangente a una sfera in un suo punto è ortogonale al raggio passante per tale punto. Dunque il centro D della sfera cercata T appartiene alla retta n ortogonale a σ e passante per P. Poiché σ è parallelo a π, la retta n è la retta ortogonale a π passante per P, cioè è la retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

Il centro D appartiene a questa retta e al piano π: in altri termini è la proiezione ortogonale di C su π. Intersecando n e π troviamo l'equazione $(2+t)+(3+t)-(1-t)-10 = 0$, vale a dire $3t - 6 = 0$ la cui soluzione, $t = 2$, sostituita nelle equazioni parametriche della retta n fornisce le coordinate $(4, 5, -1)$ del centro D della sfera T. La sfera T ha raggio uguale alla distanza tra D e C: poiché D è la proiezione ortogonale di C su π tale distanza è uguale alla distanza di C da π, che avevamo calcolato al punto precedente ed è uguale a $\sqrt{12}$. Dunque la sfera T ha equazione $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 12$.

Vedere il file dei commenti.

3 (c) Determina il raggio della circonferenza γ intersezione di S e T:

3

Motivazione:

Le due sfere hanno lo stesso raggio e sono quindi l'una simmetrica dell'altra rispetto al piano asse dei loro centri, vale a dire il piano passante per il punto medio M di C e D e ortogonale alla retta passante per C e D. La circonferenza γ giace dunque su questo piano e ha centro M. Se ora prendiamo un qualsiasi punto A di γ, il triangolo ACM è rettangolo in M. L'ipotenusa CA ha lunghezza uguale al raggio della sfera S, cioè $\sqrt{12}$, il cateto CM ha lunghezza uguale alla metà della distanza di C da D, cioè $\sqrt{3}$. Per il teorema di Pitagora il cateto MA (che ha lunghezza uguale al raggio di γ) ha allora lunghezza uguale a $\sqrt{\sqrt{12}^2 - \sqrt{3}^2} = 3$.

Vedere il file dei commenti.