COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^5$ siano dati i punti $A := (1, 2, 1, 0, 0)$, $B := (2, 2, -1, 0, 1)$ e $C_k := (3, k + 1, -3, 0, k + 1)$ e l'iperpiano $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 2 = 0$.

2 (a) Per quali valori di k i punti A, B e C_k sono allineati?

$k = 1$

Motivazione:

I tre punti A, B e C_k sono allineati se e solo se i due vettori $B - A = (1, 0, -2, 0, 1)$ e $C_k - A = (2, k - 1, -4, 0, k + 1)$ sono linearmente dipendenti, cioè se e solo se sono uno multiplo dell'altro. Si vede immediatamente che ciò si verifica se e solo se $k = 1$.

Vedere il file dei commenti.

2 (b) Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano Π?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati da Π sono definiti dalle disequazioni $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+2 > 0$ e $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 2 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+2$ otteniamo $1+2\cdot2-1+0-0+2 = 6$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 2 > 0$. Sostituendo le coordinate di B in $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+2$ otteniamo $2+2\cdot2-(-1)+0-1+2 = 8$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 2 > 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca l'iperpiano Π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da Π.

2. Sia f un omomorfismo da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1) = (1,2)$ e $f(1,0,1) = (2,-1)$.

2	

(a) I dati assegnati sono sufficienti per determinare $f(1,2,3)$?

☒ Sì, $f(1,2,3) = \boxed{(4,3)}$ ☐ No, non sono sufficienti

Motivazione:

I vettori $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,2,3)$ sono linearmente dipendenti: infatti la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante 0. Esprimiamo il vettore $(1,2,3)$ come combinazione lineare di $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$:

$$\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) = (1,2,3)$$

cioè

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Pertanto $(1,2,3) = 2(0,1,1) + (1,0,1)$, da cui, per la linearità di f, ricaviamo:

$$f(1,2,3) = 2f(0,1,1) + f(1,0,1) = 2(1,2) + (2,-1) = (4,3).$$

2	

(b) I dati assegnati sono sufficienti per determinare $f(1,1,0)$?

☐ Sì, $f(1,1,0) = \boxed{(\quad,\quad)}$ ☒ No, non sono sufficienti

Motivazione:

I vettori $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ sono linearmente indipendenti: infatti la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante 2. Assegnando dunque arbitrariamente un valore a $f(1,1,0)$ si ottiene un unico omomorfismo che soddisfa le condizioni assegnate: ciò significa che non è possibile determinare univocamente $f(1,1,0)$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Si consideri il sistema di equazioni nelle incognite x, y, z e w $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y + z + w = k-1 \\ 3x + 3z + kw = 0 \end{cases}$ dove k è un parametro reale.

2 | (a) Determina i valori di k per cui il sistema ha esattamente una soluzione.

Nessun valore

Motivazione:

Un sistema ha un'unica soluzione se e solo se il rango della matrice del sistema e il rango della matrice completa del sistema sono entrambi uguali al numero delle incognite. La matrice dl sistema ha 3 righe, quindi il suo rango è al massimo 3 e non esiste alcun valore di k per cui sia uguale al numero delle incognite, cioè 4.

Vedere il file dei commenti.

2 | (b) Determina i valori di k per cui $(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 1)$ è soluzione del sistema.

Nessun valore

Motivazione:

Sostituendo i valori assegnati nel sistema otteniamo $\begin{cases} 1 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 \\ 1 + 1 + 2 + 1 = k - 1 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + k \cdot 1 = 0 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} 1 = 1 \\ 5 = k - 1 \\ 9 + k = 0 \end{cases}$.

Non c'è alcun valore di k per cui tutte le equazioni sono soddisfatte.

Vedere il file dei commenti.

3 | (c) Determina i valori di k per cui il sistema è risolubile.

$k \neq 2$

Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.
La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & k \end{pmatrix}$. Il minore B formato dalle prime 2 righe e 2 colonne è invertibile. I suoi orlati sono $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & k \end{pmatrix}$ che hanno determinante rispettivamente 0 e $3k - 6$. L'unico valore per cui entrambi questi determinanti sono nulli è $k = 2$. Dunque la matrice A ha rango 2 se $k = 2$ e rango 3 altrimenti. Poiché la matrice completa del sistema ha rango maggiore uguale del rango di A, per $k \neq 2$ la matrice completa del sistema ha necessariamente rango uguale a 3 dato che ha 3 righe e, quindi, il suo rango è al massimo 3. Per $k \neq 2$ il sistema è allora risolubile. Per $k = 2$ la matrice completa del sistema è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. L'unico orlato di B che non è anche minore di A è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo determinante è -9, quindi la matrice completa del sistema ha rango 3. Per $k = 2$ il sistema non è, dunque, risolubile.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di f.

$(4, 0, 0, 2)$, $(0, 1, 2, 0)$

Motivazione:

Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti perché non sono una multipla dell'altra. La terza colonna è 2 volte la seconda e la quarta è $\frac{1}{2}$ volte la prima. Dunque le prime due colonne di A formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle colonne. La matrice A ha, pertanto, rango 2 e i vettori la cui decomposizione rispetto alla base canonica corrisponde alle prime due colonne di A formano una base per l'immagine di f.

Vedere il file dei commenti.

2

(b) Determina una base del nucleo di f.

$(0, -2, 1, 0)$, $(1, 0, 0, -2)$

Motivazione:

Per determinare il nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$\begin{cases} 4x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$. Dal punto precedente sappiamo che la matrice A di questo sistema ha rango 2 e che quindi è sufficiente considerare due equazioni linearmente indipendenti. Possiamo prendere, ad esempio, le prime due e ottenere il sistema equivalente $\begin{cases} 4x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$. Trattando x_1 e x_3 come parametri vediamo che le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(k, -2h, h, -2k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo i vettori $(0, -2, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, -2)$.

Vedere il file dei commenti.

3

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

Vedere il file dei commenti.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (4, 1)$ e la circonferenza $\gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$. Siano r e s le rette passanti per P e tangenti a γ e siano R e S i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e γ.

2	

(a) Le rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$r : x + y - 5 = 0 \qquad s : x - 7y + 3 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La circonferenza γ ha centro $C := (1, 2)$ e raggio $\sqrt{2}$. La generica retta passante per P ha equazione $a(x-4) + b(y-1) = 0$. Imponendo che la distanza di questa retta generica da C sia uguale al raggio di γ troviamo la condizione:

$$\frac{|a(1-4) + b(2-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

equivalente a $7a^2 - 6ab - b^2 = 0$ le cui soluzioni sono $b = a$ e $b = -7a$, da cui troviamo le equazioni cercate.

Vedere il file dei commenti.

2	

(b) Detto C il centro di γ, il quadrilatero $CRPS$ ha area:

4

Motivazione:

Il quadrilatero $CRPS$ è formato dai due triangoli CRP e CPS, entrambi rettangoli (in R e S rispettivamente). L'ipotenusa CP di entrambi è uguale alla distanza di C da P, cioè $\sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$. I due triangoli hanno un cateto di lunghezza uguale al raggio $\sqrt{2}$ della circonferenza γ (rispettivamente CR e CS). Per il teorema di Pitagora l'altro cateto è uguale a $\sqrt{\sqrt{10}^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{8}$. Ciascuno dei due triangoli ha allora area uguale a $\frac{\sqrt{2}\sqrt{8}}{2} = 2$. L'area complessiva del quadrilatero $CRPS$ è allora uguale a $2 + 2 = 4$.

Vedere il file dei commenti.

3	

(c) La distanza tra i punti R e S è uguale a:

$\frac{4}{5}\sqrt{10}$

Motivazione:

La circonferenza γ è simmetrica rispetto alla retta n passante per P e C. Dunque le rette r e s sono simmetriche rispetto a tale retta come punti i punti R e S. Dunque il punto medio M di R e S appartiene a n e la corda RS è ortogonale a n. In altri termini RM è l'altezza del triangolo CRP rispetto al lato CP. Poiché conosciamo dal punto precedente che l'area del triangolo CRP è uguale a 2 e il lato CP è lungo $\sqrt{10}$ otteniamo che l'altezza relativa a tale lato è $\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$. La distanza di R da S è uguale al doppio di tale altezza, cioè $\frac{4}{5}\sqrt{10}$.

Vedere il file dei commenti.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (1, 0, 1)$ e i piani $\pi : x - y + 2z - 6 = 0$ e $\sigma : x + z - 3 = 0$.

2	

(a) La retta r passante per P e parallela sia al piano π che al piano σ ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r deve essere contenuta nel piano parallelo a π e passante per P. Il fascio di piani paralleli a π ha equazione $x - y + 2z + k = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $1 - 0 + 2 \cdot 1 + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -3$. La retta r è, dunque, contenuta nel piano di equazione $x - y + 2z - 3 = 0$.
Analogamente la retta r deve essere contenuta nel piano parallelo a σ e passante per P. Il fascio di piani paralleli a σ ha equazione $x + z + h = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione $1 + 1 + h = 0$, da cui ricaviamo $h = -2$. La retta r è, dunque, contenuta nel piano di equazione $x + z - 2 = 0$.
Abbiamo quindi trovato le equazioni di due piani distinti e contenenti la retta r: mettendo a sistema tali equazioni troviamo le equazioni cartesiane di r.
Vedere il file dei commenti.

2	

(b) La proiezione ortogonale di r su π ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta cercata è l'intersezione tra il piano π e il piano contenente r e ortogonale a π. Per determinare tale piano, consideriamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x - y + 2z - 3) + \mu(x + z - 2) = 0$$

vale a dire

$$(\lambda + \mu)x - \lambda y + (2\lambda + \mu)z - 3\lambda - 2\mu = 0.$$

Imponendo l'ortogonalità con π troviamo la condizione $(\lambda+\mu)\cdot 1+(-\lambda)\cdot(-1)+(2\lambda+\mu)\cdot(-2) = 0$ vale a dire $-2\lambda - \mu = 0$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = -1$ e $\mu = 2$, troviamo l'equazione del piano cercato: $x + y - 1 = 0$. Intersecando questo piano con il piano π troviamo le equazioni della retta cercata. *Vedere il file dei commenti.*

3	

(c) La distanza tra la retta r e la retta s intersezione di π e σ è:

$\sqrt{2}$

Motivazione:

Le rette r e s sono parallele. Per calcolare la loro distanza possiamo allora prendere un piano ortogonale a entrambe e calcolare la distanza tra i punti intersezione di tale piano con le due rette. Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di r troviamo che la retta r ha parametri direttori $(1, -1, -1)$. Il generico piano ortogonale sia a r che a s ha equazione del tipo $x - y - z + k = 0$. Possiamo prendere uno qualsiasi di questi piani: ad esempio possiamo scegliere il piano τ passante per il punto P di r. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $1 - 0 - 1 + k = 0$ da cui ricaviamo $k = 0$. Intersecando ora il piano τ di equazione $x - y + z = 0$ con la retta s otteniamo il sistema $\begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ la cui soluzione ci dà il punto $R := (1, -1, 2)$. La distanza tra le rette r e s è allora uguale alla distanza tra P e R, cioè $\sqrt{(1-1)^2 + (0-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$.
Vedere il file dei commenti.