COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il punto $P := (8, 6)$ e la circonferenza $\gamma : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

2 (a) Determina l'equazione della circonferenza di centro P tangente esternamente a γ.

$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 20$

Motivazione:

Due circonferenze sono tangenti esternamente se e solo se la distanza tra i loro centri è uguale alla somma dei raggi. La circonferenza γ ha centro $C := (2, 3)$ e raggio $\sqrt{5}$.
La distanza tra P e C è $\sqrt{(8 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = 3\sqrt{5}$. La circonferenza cercata ha allora raggio $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ e ha, pertanto, equazione $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 20$.

2 (b) Determina l'equazione della circonferenza di centro P tale che i suoi punti di intersezione con γ sono gli estremi di un diametro di γ.

$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 50$

Motivazione:

Siano M e N i punti di intersezione tra γ e la circonferenza cercata. Date due circonferenze, i loro punti di intersezione (se esistono) sono simmetrici rispetto alla retta congiungente i due centri. In particolare la retta che congiunge i due punti di intersezione è ortogonale alla retta che congiunge i due centri.
Pertanto la retta d che congiunge M e N è ortogonale alla retta r che congiunge il centro C di γ con P. Poiché M e N devono essere estremi di un diametro il centro C di γ appartiene alla retta d. Ma allora il triangolo MCP è rettangolo in C. Il cateto MC è uguale al raggio della circonferenza γ, cioè $\sqrt{5}$, il cateto CP è uguale alla distanza di P da C calcolata al punto precedente, cioè $3\sqrt{5}$. Per il teorema di Pitagora, l'ipotenusa PM, cioè il raggio della circonferenza cercata, è allora uguale a $\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2} = 5\sqrt{2}$. La circonferenza cercata ha allora equazione $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 50$.

2. Siano dati i punti $A := (2, 1, 1, 3, 2)$ e $B := (2, 0, 1, 2, 3)$ e l'iperpiano $\pi : 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

2	

(a) Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 > 0$ e $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2$ otteniamo $3 \cdot 2 - 1 + 1 + 3 - 2 + 2 = 9$. Il risultato è positivo, dunque A appartiene al semispazio $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 > 0$. Sostituendo le coordinate di B in $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2$ otteniamo $3 \cdot 2 - 0 + 1 + 2 - 3 + 2 = 8$. Il risultato è positivo, dunque B appartiene al semispazio $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 > 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca l'iperpiano π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π.

2	

(b) La semiretta di origine A e contenente B interseca l'iperpiano π?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + (2-2)t \\ x_2 = 1 + (0-1)t \\ x_3 = 1 + (1-1)t \\ x_4 = 3 + (2-3)t \\ x_5 = 2 + (3-2)t \end{cases}$$

I punti della semiretta di origine A e contenente B sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro t.
Intersecando r con l'iperpiano π si ottiene l'equazione $3 \cdot 2 - (1-t) + 1 + (3-t) - (2+t) + 2 = 0$ cioè $9 - t = 0$ la cui soluzione è $t = 9$. Poiché questo è un valore positivo, l'intersezione tra r e s è un punto della semiretta di origine A e contenente B.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,1,2,0)$ e $\mathbf{v}_2 := (0,1,1,1)$ e sia $F_k := \{(x,y,z,w) \mid x-z=0, y+z+kw=0\}$ con k parametro reale.

2	

(a) Determina una base ortonormale per E.

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Motivazione:

Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ che, essendo indipendenti, formano una base di E.
Poniamo $\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$. Calcolando il prodotto scalare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= ((1,1,2,0) + \alpha(0,1,1,1)) \times (1,1,2,0) = \\ &= (1,1,2,0) \times (1,1,2,0) + \alpha(0,1,1,1) \times (1,1,2,0) = \\ &= 6 + 3\alpha.\end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha = -2$ si ha $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque una base ortogonale per E è data dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1,1,2,0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,1,2,0) - 2(0,1,1,1) = (1,-1,0,-2)$. Dividendo ciascuno di questi vettori per la propria norma troviamo una base ortonormale di E.

3	

(b) Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

$k \neq 1$

Motivazione:

La somma tra E e F_k è diretta se e solo la loro intersezione è ridotta al solo vettore nullo. Un generico vettore di E si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\alpha(1,1,2,0) + \beta(0,1,1,1) = (\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, \beta).$$

Poiché i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti si ottiene il vettore nullo solo per $\alpha = \beta = 0$. Imponendo che un generico vettore di E appartenga a F_k troviamo le condizioni $\alpha - (2\alpha + \beta) = 0$ e $(\alpha + \beta) + (2\alpha + \beta) + k\beta = 0$ vale a dire

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha + (k+2)\beta = 0 \end{cases}$$

La matrice di questo sistema in α e β è $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è $1-k$. Dunque per $k \neq 1$ il sistema è Crameriano e quindi ammette solo la soluzione banale e, dunque, $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$, mentre per $k = 1$ la matrice ha rango 1 e il sistema ammette soluzioni non banali e, dunque, $E \cap F_k \neq \{\mathbf{0}\}$.

2	

(c) Determina una base per un complemento G di E in $\mathbb{R}^4$.

$(1,-1,1,0)$, $(0,0,0,1)$

Motivazione:

Al punto b abbiamo già determinato dei complementi di E: per ogni $k \neq 1$, infatti, il sottospazio F_k è un complemento di E. Scegliamo ad esempio $k = 0$: risolvendo il sistema corrispondente troviamo che F_0 è formato dai vettori del tipo $(h, -h, h, l)$ al variare di h e l in $\mathbb{R}$. Scegliendo prima $h = 1$ e $l = 0$ e poi $h = 0$ e $l = 1$ troviamo una base per F_0.

4. Sia dato l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2k \\ 0 & k & 1-k \\ 0 & k & 1-k \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (4,1,1)$.

2 | (a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k?

$k = 2$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k se e solo se esiste λ tale che $f_k(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Moltiplicando la matrice A per il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2k \\ 0 & k & 1-k \\ 0 & k & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ottiene che $f(\mathbf{v}) = (2k, 1, 1)$. Dunque $\mathbf{v}$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che

$$(2k, 1, 1) = \lambda(4, 1, 1),$$

cioè $2k = 4\lambda$, $1 = \lambda$ e $1 = \lambda$. Ciò avviene se e solo se $\lambda = 1$ e $k = 2$.

2 | (b) Per quali valori di k l'immagine di f_k ha dimensione 2?

$k \neq 0$

Motivazione:

La dimensione dell'immagine di f_k è uguale al rango di una sua qualsiasi matrice rappresentativa, ad esempio A_k. Osserviamo che la prima colonna di A_k è nulla, dunque A_k ha rango al più 2. Il minore formato dalle prime 2 righe e ultime 2 colonne ha determinante uguale a $-2k^2$. Pertanto, per $k \neq 0$ la matrice A_k ha almeno un minore di ordine 2 invertibile ed ha, perciò, rango 2. Per $k = 0$, invece, anche la seconda colonna di A_k si annulla e A_k, avendo una sola colonna non nulla ha quindi rango 1.

3 | (c) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

$k = 0$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A_k è $\det(A_k - xI) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 2k \\ 0 & k-x & 1-k \\ 0 & k & 1-k-x \end{vmatrix} = x^2(1-x)$. Pertanto il polinomio caratteristico di A_k è totalmente riducibile e gli autovalori sono 0 di molteplicità 2 e 1 di molteplicità 1. Dobbiamo ora verificare per ciascun autovalore se la sua molteplicità coincide con la dimensione del relativo autospazio. Non è necessario far ciò per gli autovalori di molteplicità 1: per essi la dimensione dell'autospazio è automaticamente uguale alla molteplicità. Consideriamo allora l'autovalore 0. La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è uguale a:

$$3 - \operatorname{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk} A_k = \begin{cases} 3 - 2 = 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 3 - 1 = 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

Si noti che avevamo già calcolato il rango di A_k al punto precedente.
Dunque, per $k = 0$ la molteplicità di ciascun autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio e, pertanto, A_k è diagonalizzabile, mentre se $k \neq 0$ esiste un autovalore (cioè 0) la cui molteplicità non coincide con la dimensione del relativo autospazio e, pertanto, A_k non è diagonalizzabile.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (5, 2)$, $B := (7, 4)$ e la retta $r : x + 4y - 11 = 0$.

2	

(a) Determina un punto C sulla retta r in modo che la mediana passante per C del triangolo ABC sia parallela all'asse x.

$C := (-1, 3)$

Motivazione:

La mediana passante per C del triangolo ABC è la retta passante per C e per il punto medio M tra A e B. Tale punto M ha coordinate $\left(\frac{5+7}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (6, 3)$. La retta passante per tale punto e parallela all'asse x ha equazione $y - 3 = 0$. Il punto C appartiene a tale retta e alla retta r. Intersecando queste due rette troviamo che C ha coordinate $(-1, 3)$.

2	

(b) Determina un punto D sulla retta r in modo che la mediana passante per A del triangolo ABD sia parallela all'asse y.

$D := (3, 2)$

Motivazione:

La retta passante per A e parallela all'asse y ha equazione $x - 5 = 0$. Affinché questa sia la mediana passante per A del triangolo ABD, è necessario e sufficiente che il punto medio tra D e B giaccia su questa retta. Se $D := (\bar{x}, \bar{y})$, il punto medio tra D e B è $\left(\frac{\bar{x}+7}{2}, \frac{\bar{y}+4}{2}\right)$. Tale punto appartiene alla retta di equazione $x - 5 = 0$ se e solo se $\frac{\bar{x}+7}{2} - 5 = 0$ cioè se e solo se $\bar{x} = 3$. Dunque il punto D ha coordinate $(3, \bar{y})$. Imponendo che tale punto appartenga alla retta r troviamo la condizione $3 + 4\bar{y} - 11 = 0$ da cui otteniamo $\bar{y} = 2$.

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C (dove C è il punto determinato alla domanda a) è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - 8y + 25 > 0 \\ x + 6y - 17 > 0 \\ x - y - 3 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0$ e il punto $A := (1, 2, 1)$.

| 2 | |

(a) Trovare il punto B appartenente all'asse delle x e tale che la retta passante per A e B sia parallela al piano π.

$B := (-1, 0, 0)$

Motivazione:

La retta passante per A e B è parallela a π se e solo se è contenuta in un piano parallelo a π. Determiniamo allora il piano σ parallelo a π e passante per A. Il punto B cercato deve appartenere a σ e sarà quindi l'intersezione tra σ e l'asse delle x.
Consideriamo il fascio di piani paralleli a π:

$$x - 2y + 2z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per A troviamo $1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + k = 0$, da cui ricaviamo $k = 1$. Il piano σ ha allora equazione $x - 2y + 2z + 1 = 0$.
Intersecando σ con l'asse delle x (che è descritto dal sistema formato dalle equazioni $y = 0$ e $z = 0$) troviamo il punto B.

| 2 | |

(b) Trovare il punto C appartenente all'asse delle x, tale che A e C siano equidistanti da π e giacciano su semispazi opposti delimitati da π.

$C := (-7, 0, 0)$

Motivazione:

Il generico punto dell'asse x ha coordinate del tipo $(h, 0, 0)$. Imponendo che tale punto e il punto A siano equidistanti da π troviamo la condizione:

$$\frac{|h - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

vale a dire $|h+4| = 3$ le cui soluzioni sono $h = -1$ e $h = -7$. La prima soluzione corrisponde al punto B determinato al punto precedente: poiché la retta passante per A e B è parallela a π, i punti A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π. Il punto cercato corrisponde allora all'altra soluzione ed è quindi $(-7, 0, 0)$.

| 3 | |

(c) Determinare l'intersezione tra il piano π e la retta passante per A e C (dove C è il punto determinato alla domanda b)).

$\left(-3, 1, \frac{1}{2}\right)$

Motivazione:

Un ben noto risultato di geometria euclidea dello spazio afferma che, dati due punti equidistanti da un piano e situati su semispazi opposti rispetto a esso, il loro punto medio giace sul piano stesso ed è, quindi, l'intersezione tra la retta passante per i due punti e il piano.
Il punto cercato è allora il punto medio di A e C, cioè $M := \left(\frac{1+(-7)}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(-3, 1, \frac{1}{2}\right)$.