COGNOME........................ NOME........................ N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $S : AX = B$ un sistema di tre equazioni in quattro incognite.

2 (a) Se $\operatorname{rk} A = 3$, allora il sistema S ha sempre soluzioni? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.

☒ Sì. Ogni sistema di questo tipo ha almeno una soluzione.
☐ No. Alcuni sistemi non hanno alcuna soluzione.

Motivazione:

Sappiamo che un sistema S ha almeno una soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$, dove la matrice A' è ottenuta dalla matrice A aggiungendo ad essa la colonna B dei termini noti. Nel nostro caso si ha $\operatorname{rk} A = 3$. Da cui segue $3 = \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} A'$. Poiché la matrice A' ha tre righe e 5 colonne, si ha $\operatorname{rk} A' = 3$. Pertanto ogni sistema S di questo tipo ha almeno una soluzione.

Vedere i commenti.

2 (b) Se $\operatorname{rk} A \neq 3$, allora il sistema S non ha mai soluzioni? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.:

☐ Sì, non ci sono mai soluzioni
☒ No. Alcuni sistemi hanno almeno una soluzione.

Motivazione:

Come controesempio consideriamo il sistema $S : AX = B$ dove

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\operatorname{rk} A = 2 \neq 3$, eppure il sistema S ha come soluzioni $(1, 0, h, k)$ con h e k numeri reali qualsiasi.
Vedere i commenti.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $P_0 := (2,0,0,0)$, $P_1 := (1,1,0,0)$, $P_2 := (1,0,1,0)$, $P_3 := (1,0,0,1)$

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π contenente i quattro punti assegnati.

$\Pi: \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 = 0$

Motivazione:

La generica equazione di un iperpiano è del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 + a_4x_4 + b = 0$.
Imponendo il passaggio per i quattro punti otteniamo il sistema le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} a_1 = h \\ a_2 = h \\ a_3 = h \\ a_4 = h \\ b = -2h \end{cases}$$

Pertanto, ponendo $h = 1$, otteniamo l'equazione dell'iperpiano $\Pi \; : \; x_1+x_2+x_3+x_4-2 = 0$

2	

(b) Determinare equazioni parametriche della retta Σ passante per $A := (1,2,3,4)$ e ortogonale all'iperpiano Π.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 4 + t \end{cases}$$

Motivazione:

Un vettore ortogonale all'iperpiano Π è $(1,1,1,1)$.
Possiamo allora scrivere immediatamente le equazioni parametriche della retta Σ.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 4 + t \end{cases}$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica.

2	

(a) L'endomorfismo f è suriettivo? E' iniettivo?

Non è suriettivo. Non è iniettivo.

Motivazione:

La matrice A ha determinante nullo. Pertanto l'endomorfismo f è non suriettivo. Inoltre il rango della matrice A è uguale a 1, poiché la seconda colonna è il doppio della prima e la terza è nulla. Quindi si ha $\dim \ker f = 3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 3 - 1 = 2$ e quindi, essendo il nucleo non nullo, l'endomorfismo non è iniettivo.

2	

(b) Sia dato il vettore $\mathbf{v} = (5, k, 15)$. Per quali valori di k si ha che $f^{-1}(\mathbf{v})$ è non vuota?

Per $k = 10$

Motivazione:

Abbiamo visto in (a) che la seconda e terza colonna di A sono combinazioni lineari della prima. Segue che $f(\mathbb{R}^3)$ ha come base il vettore $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ e quindi $f^{-1}(\mathbf{v}) \neq \emptyset$ se e solo $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{w}$, cioè se e solo se $k = 10$.

3	

(c) Dato $\mathbf{u} = (3, 6, 9)$, determinare $f^{-1}(\mathbf{u})$.

$f^{-1}(\mathbf{u}) = \{(3, 0, 0) + a(2, -1, 0) + b(0, 0, 1) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{u}$, essendo multiplo di $(1, 2, 3)$, è dotato di controimmagine non vuota. Sappiamo che si ha $f^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' + \ker f$, con $f(\mathbf{u}') = u$. Dal momento che $\mathbf{u} = 3(1, 2, 3) = 3f((1, 0, 0))$, possiamo prendere $\mathbf{u}' = (3, 0, 0)$. Dobbiamo ora determinare una base di $\ker f$. Sappiamo che $\dim \ker f = 2$. Troviamo quindi due vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\ker f$. Dal momento che la seconda colonna della matrice A è il doppio della prima colonna, abbiamo: $f(2(1, 0, 0) - (0, 1, 0)) = (0, 0, 0)$. Quindi il vettore $(2, -1, 0)$ appartiene a $\ker f$. Un altro vettore del nucleo è il vettore $(0, 0, 1)$ dal momento che la terza colonna di A è nulla. I due vettori così trovati sono chiaramente linearmente indipendenti. Pertanto l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari coincide con $\ker f$. Abbiamo quindi:
$f^{-1}(\mathbf{u}) = (3, 0, 0) + \ker f = \{(3, 0, 0) + a(2, -1, 0) + b(0, 0, 1) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

4. Sia data la matrice $A_k := \begin{pmatrix} 4 & k & 1 \\ 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

| 3 | |

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile? 2

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è uguale al suo ordine (in questo caso a 3).
Poiché la matrice è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi della sua diagonale principale, cioè 4 e 2, qualunque sia k. La loro molteplicità algebrica è rispettivamente 1 e 2.
Dal momento che l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 1, la dimensione del suo autospazio è uguale a 1 qualunque sia k.
Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione dell' autospazio $E(2)$.

$$\dim E(2) = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 2I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

Dunque $\dim E(4) + \dim E(2) = 3$ se e solo se $k = 2$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 2$

| 4 | |

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per calcolare $E(4)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A_2 - 4I$, cioè

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, 0, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(4)$ si ottiene, ad esempio, ponendo $h = 1$, ed è formata da $(1, 0, 0)$.
Per calcolare $E(2)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A_2 - 2I$, cioè

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\left(-h - \frac{1}{2}k, h, k\right)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(2)$ si ottiene, ad esempio, ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$, cioè è formata da $(-1, 1, 0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.
Riportiamo ora sulla diagonale della matrice D gli autovalori di A, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Riportiamo sulle colonne della matrice M le componenti degli autovettori determinati in un ordine coerente con quello con cui abbiamo posto gli autovalori sulla diagonale di D.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 1)$ e $B := (5, 3)$.

2	

(a) Determinare equazioni parametriche dell'asse s del segmento AB.

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} .$$

Motivazione:

L'asse s del segmento AB ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$. Infatti i termini noti sono dati dalle coordinate del punto medio M dei punti A e B (e quindi sono la media delle loro coordinate) mentre i parametri direttori sono dati date dalle coordinate di un vettore perpendicolare al vettore $(4, 2)$, parallelo alla retta passante per A e B, che è ottenuto considerando la differenza delle coordinate di A e B.

2	

(b) Determinare le coordinate di un punto C tale che il triangolo $\triangle ABC$ sia isoscele di base AB e di area uguale a 5.

$C = (2, 4)$

Motivazione:

Sappiamo che, se $\triangle ABC$ è isoscele di base AB, allora il punto C appartiene all'asse s del segmento AB che abbiamo già determinato in (a). Inoltre $\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$ e l'altezza h di $\triangle ABC$ deve essere uguale a $h = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{20}} = \sqrt{5}$. Dobbiamo quindi determinare i punti $P \in s$ tali che $\mathrm{d}(P, M) = \sqrt{5}$. Pertanto, prendendo un punto generico di s e imponendo che il quadrato della distanza di P da M sia uguale a 5, otteniamo $(-t)^2 + (2t)^2 = 5$. Da cui $t = \pm 1$. Prendendo $t = 1$ otteniamo $C = (2, 4)$.
Vedere i commenti.

3	

(c) Determinare le coordinate del punto C' simmetrico, rispetto al segmento AB, del punto C determinato in (b) e determinare il perimetro del quadrilatero $ACBC'$.

$C' = (4, 0)$ Perimetro $= 4\sqrt{10}$

Motivazione:

Il punto C' deve appartenere all'asse s del segmento AB e deve verificare la condizione $\mathrm{d}(C', M) = \mathrm{d}(C, M)$. Pertanto si ottiene ponendo $t = -1$ nell'equazione usata in (b) per determinare C. Quindi $C' = (4, 0)$.
Il quadrilatero $ACBC'$ per costruzione ha i quattro lati uguali e quindi il suo perimetro è uguale a $4\,\mathrm{d}(C, A) = 4\sqrt{(2-1)^2 + (1-4)^2} = 4\sqrt{10}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1,1,1)$ e $B := (2,3,3)$ del piano $\pi : 2x + 2y - 3z - 1 = 0$.

2	

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano π.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r deve essere perpendicolare al piano π e quindi i suoi parametri direttori sono proporzionali ai coefficienti delle variabili del piano π. La retta r, poiché deve passare per A, ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

3	

(b) Determinare un'equazione cartesiana di una sfera S di raggio uguale a $\sqrt{26}$, che passi per B e che intersechi il piano π in una circonferenza di centro A.

$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 26$

Motivazione:

Cerchiamo il centro C della sfera.
Tutte le sfere che intersecano il piano π in una circonferenza di centro A hanno il loro centro C nella retta r determinata nel punto (a). Di essa conosciamo le equazioni parametriche.
Dal momento che la sfera cercata ha raggio uguale a $\sqrt{26}$ e deve passare per B, abbiamo che il centro C della sfera deve verificare la condizione $\mathrm{d}(C,B) = \sqrt{26}$. Prendiamo quindi un punto generico della retta r e imponiamo che la sua distanza da B sia uguale a $\sqrt{26}$.
Abbiamo: $26 = \mathrm{d}(C,B)^2 = (-1+2t)^2 + (-2+2t)^2 + (-2-3t)^2$ Da cui otteniamo $t = \pm 1$.
Scegliendo $t = 1$ abbiamo $C = (3,3,-2)$.
La sfera S cercata ha quindi equazione $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 26$

Vedere i commenti.

2	

(c) Determinare un'equazione cartesiana del piano α tangente alla sfera S nel punto B.

$\alpha : \; x - 5z + 13 = 0$

Motivazione:

Il piano α passa per B ed è perpendicolare alla retta passante per il centro C della sfera e per B. Pertanto un vettore ad esso perpendicolare ha come coordinate la terna $(1,0,-5)$ data dalle differenze delle coordinate di C e A. Possiamo prendere questa terna come coefficienti delle variabili nell'equazione del piano α. Pertanto il piano α ha equazione $\alpha : \; 1 \cdot (x-2) + 0 \cdot (y-3) + (-5) \cdot (z-3) = 0$, e quindi $\alpha : \; x - 5z + 13 = 0$.

Vedere i commenti.