COGNOME ........................................ NOME ........................................

N. MATRICOLA ................

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{v}_1 := (2, 0, 1)$ sia autovettore di $f$ rispetto all'autovalore 3 e $\mathbf{v}_2 := (0, 3, 2)$ e $\mathbf{v}_3 := (-1, 1, 0)$ siano autovettori di $f$ rispetto all'autovalore $-2$.

| 2 | |

(a) Il vettore $\mathbf{w} := 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è autovettore di $f$?

☐ Sì, rispetto all'autovalore ☐ ☒ No
☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se $\mathbf{w}$ è un autovettore o no

Motivazione:

Calcoliamo esplicitamente il vettore $\mathbf{w}$ e la sua immagine tramite $f$. Si ha

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2(2, 0, 1) + (0, 3, 2) = (4, 3, 4)$$

e

$$f(\mathbf{w}) = f(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 2f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = 2 \cdot 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 = 6(2, 0, 1) - 2(0, 3, 2) = (12, -6, 2)$$

Poiché $f(\mathbf{w})$ non è multiplo di $\mathbf{w}$, il vettore $\mathbf{w}$ non è autovettore di $f$.

| 2 | |

(b) Il vettore $\mathbf{u} := 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ è autovettore di $f$?

☒ Sì, rispetto all'autovalore $\boxed{-2}$ ☐ No
☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se $\mathbf{u}$ è un autovettore o no

Motivazione:

I vettori $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ appartengono entrambi all'autospazio relativo all'autovalore $-2$. Il vettore $\mathbf{u}$ è loro combinazione lineare e quindi appartiene anch'esso all'autospazio relativo all'autovalore $-2$.

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo sia dato il punto $A := (0, -1)$.

2 (a) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette passanti per $A$ e che delimitano insieme agli assi coordinati un triangolo di area uguale a 5.

$x - 10y - 10 = 0$ e $x + 10y + 10 = 0$

Motivazione:

I triangoli cercati hanno un vertice nell'origine $O := (0, 0)$ del sistema di riferimento, un vertice in $A$ e l'altro vertice in un punto $B := (k, 0)$ dell'asse delle $x$. Tale triangolo è rettangolo in $O$: possiamo considerare i due lati $OA$ e $OB$ come base e altezza del triangolo. La distanza di $O$ da $A$ è uguale a 1, mentre la distanza di $O$ da $B$ è uguale a $|k|$. L'area del triangolo $OAB$ è allora uguale a $\frac{1\cdot|k|}{2} = \frac{|k|}{2}$. Imponendo che tale valore sia uguale a 5 troviamo che i due valori possibili di $k$ sono 10 e $-10$. Pertanto abbiamo i punti $B_1 = (10, 0)$ e $B_2 = (-10, 0)$. La retta passante per il punto $A$ e il punto $B_1$ ha equazione $\begin{vmatrix} x-0 & y-(-1) \\ 10-0 & 0-(-1) \end{vmatrix} = 0$ vale a dire $x - 10y - 10 = 0$. La retta passante per il punto $A$ e il punto $B_2$ ha equazione $\begin{vmatrix} x-0 & y-(-1) \\ -10-0 & 0-(-1) \end{vmatrix} = 0$ vale a dire $x + 10y + 10 = 0$.

2 (b) **Scegliere una delle rette determinate al punto a (se ce n'è più di uno)**

Equazione della retta scelta: $x - 10y - 10 = 0$

Detta $r$ la retta scelta, si determini l'equazione cartesiana della retta $s$ simmetrica di $r$ rispetto all'asse delle $y$.

$x + 10y + 10 = 0$

Motivazione:

Per determinare la simmetrica rispetto all'asse delle $y$ basta prendere due punti distinti di $r$, trovarne i simmetrici rispetto all'asse delle $y$ e considerare la retta passante per i due punti così determinati.
Possiamo allora considerare i due punti $A$ e $B_1$. Poiché $A$ appartiene all'asse delle $y$ il suo simmetrico rispetto all'asse delle $y$ è $A$ stesso, mentre il simmetrico di $B_1$ rispetto all'asse delle $y$ è ovviamente il punto $B_2$. Pertanto la retta $s$ è la retta che passa per $A$ e $B_2$, la cui equazione abbiamo già determinato al punto precedente ed è $x + 6y - 6 = 0$.

COGNOME ...................................... NOME ......................................

N. MATRICOLA ...............

3. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da: $f(x,y,z) := (2x+2y+z, 3x+y-z, -2x+2y+4z)$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare una base dell'immagine di $f$.

$(2,3,-2)$ $\quad$ $(2,1,2)$

Motivazione:

Le immagini tramite $f$ dei vettori della base canonica sono $(2,3,-2)$, $(2,1,2)$, $(1,-1,4)$: questi vettori generano l'immagine di $f$. La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica è allora

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La dimensione dell'immagine di $f$ è uguale al rango di $A$. La matrice $A$ ha determinante nullo e, quindi, ha rango minore di 3. Il minore di $A$ formato dalle prime 2 righe e dalle prime 2 colonne è invertibile e, quindi, la matrice $A$ ha rango 2 e le prime 2 colonne sono linearmente indipendenti. Pertanto $(2,3,-2)$ e $(2,1,2)$ formano una base per l'immagine di $f$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Determinare una base del nucleo di $f$.

$(3,-5,4)$

Motivazione:

Un vettore $(x,y,z)$ appartiene al nucleo se e solo se

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ -2x+2y+4z=0 \end{cases}$$

Occorre dunque risolvere il sistema omogeneo di matrice $A$. Dal punto precedente sappiamo già che questa matrice ha rango 2 e che le prime due righe di $A$ sono linearmente indipendenti. Il sistema è quindi equivalente a quello formato a quello delle prime 2 equazioni. Risolvendolo troviamo che le sue soluzioni sono i vettori del tipo $(3h,-5h,4h)$ al variare di $h$ in $\mathbb{R}$. Scegliendo, ad esempio, $h=1$ troviamo una base per il nucleo di $f$.

| 3 | |
|---|---|

(c) Determinare la controimmagine del vettore $(2,3,-2)$.

$\{(1+3h,-5h,4h) \mid h \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Dal punto a sappiamo che il vettore $(2,3,-2)$ è immagine di $(1,0,0)$ e dunque $(1,0,0)$ appartiene alla controimmagine di $(2,3,-2)$. La controimmagine di $(2,3,-2)$ è allora formata da tutti e soli i vettori che si possono ottenere come somma di $(1,0,0)$ e di un vettore del nucleo di $f$. Al punto b abbiamo calcolato il nucleo di $f$. Dunque la controimmagine di $(2,3,-2)$ è formata da tutti e soli i vettori del tipo $(1,0,0)+(3h,-5h,4h)$ al variare di $h$ in $\mathbb{R}$.

4. Si consideri il sistema di equazioni $\begin{cases} 3x + 3y + 2z + \phantom{2}w = 2k \\ 4x + 5y + 3z + \phantom{2}w = 1 \\ 5x + 4y + 3z + 2w = k \end{cases}$ dove $k$ è un parametro reale.

| 3 | |

(a) Determinare i valori di $k$ per cui il sistema ha una sola soluzione.

Nessun valore

Motivazione:

La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamone il rango. Il minore $B$ formato dalle prime 2 righe e dalle prime 2 colonne di $A$ ha determinante non nullo. Gli orlati di $B$ sono le matrici $C_1 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Entrambi questi minori hanno determinante nullo. Dunque la matrice $A$ ha rango 2. Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema risolubile ha un'unica soluzione se e solo se il rango della matrice del sistema è uguale al numero delle incognite. Poiché il nostro sistema ha 3 incognite e matrice di rango inferiore a 3 non può avere esattamente una soluzione per nessun valore di $k$.

| 3 | |

(b) Determinare i valori di $k$ per cui il sistema ha infinite soluzioni.

$k = \frac{1}{5}$

Motivazione:

Dal punto a sappiamo che la matrice del sistema $A$ ha rango 2. Calcoliamo ora il rango della matrice completa del sistema $A' := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 2k \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & k \end{pmatrix}$. Il minore $B$ ha tre orlati in $A'$: al punto a abbiamo già visto che due di essi hanno determinante nullo, l'altro è $C := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2k \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & k \end{pmatrix}$ il cui determinante è $3 - 15k$. Questo determinante si annulla per $k = \frac{1}{5}$, e, dunque, il rango della matrice completa del sistema è 3 per $k \neq \frac{1}{5}$ ed è 2 per $k = \frac{1}{5}$. Per il teorema di Rouché-Capelli un sistema è risolubile se e solo se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango. Dunque per $k \neq \frac{1}{5}$ il sistema non è risolubile, mentre per $k = \frac{1}{5}$ il sistema è risolubile: poiché in quest'ultimo caso il rango della matrice è minore del numero delle incognite il sistema ammette infinite soluzioni.

| 1 | |

(c) Determinare i valori di $k$ per cui il sistema non ha soluzioni.

$k \neq \frac{1}{5}$

Motivazione:

Si veda il punto precedente.

COGNOME ..................................... NOME .....................................

N. MATRICOLA ...............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto $C := (9, 2)$ e la retta $l : 3x - y - 5 = 0$. Sia $\gamma$ la circonferenza di centro $C$ che interseca la retta $l$ in due punti $A$ e $B$ distanti tra loro $2\sqrt{10}$.

| 2 | |
|---|---|

(a) La circonferenza $\gamma$ ha raggio:

$\boxed{r = 5\sqrt{2}}$

Motivazione:

La proiezione $H$ di $C$ su $l$ è il punto medio di $A$ e $B$. Il triangolo $CAH$ è allora un triangolo rettangolo in $H$ il cui lato $AH$ è lungo la metà di $AB$, cioè $\sqrt{10}$, e il cui lato $CH$ ha lunghezza uguale alla distanza di $C$ da $l$. Applicando la formula della distanza tra un punto e una retta si trova che il lato $CH$ ha lunghezza $\frac{|3 \cdot 9 - 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{10}$.

Poichè il lato $AC$ ha lunghezza uguale al raggio $r$ di $\gamma$ applicando il teorema di Pitagora troviamo $r = \sqrt{\sqrt{10}^2 + (2\sqrt{10})^2} = 5\sqrt{2}$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Il triangolo $ABC$ ha area:

$\boxed{A(ABC) = 20}$

Motivazione:

L'altezza relativa al lato $AB$ (che è lungo $2\sqrt{10}$) è uguale alla distanza tra il punto $C$ e la retta $r$. Dal punto precedente sappiamo che tale distanza è $2\sqrt{10}$. L'area del triangolo è allora $\frac{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 20$.

| 3 | |
|---|---|

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$ è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 > 0 \\ x + y - 11 < 0 \\ x - 7y + 5 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 5x + y + 2z + 1 = 0 \\ -5x - y + z = 0 \end{cases}$

| 2 | |
|---|---|

(a) Le rette $r$ e $s$ sono parallele?

☐ sì ☒ no

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di $r$ possiamo determinare le equazioni parametriche di $r$ : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3t \\ z = 4t \end{cases}$ Dunque r ha parametri direttori $(5, 3, 4)$.
Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di $s$ possiamo determinare le equazioni parametriche di $s$ : $\begin{cases} x = -\frac{4}{15} + t \\ y = 1 - 5t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Dunque r ha parametri direttori $(1, -5, 0)$.
Poiché i parametri direttori di $r$ e $s$ non sono proporzionali le due rette non sono parallele.

| 3 | |
|---|---|

(b) Il piano $\pi$ contenente $r$ e parallelo a $s$ ha equazione cartesiana:

$5x + y - 7z - 10 = 0$

Motivazione:

Consideriamo il fascio di piani passanti per $r$:

$$\lambda(x - 3y + z - 2) + \mu(2x - 2y - z - 4) = 0,$$

che possiamo riscrivere come $(\lambda+2\mu)x+(-3\lambda-2\mu)y+(\lambda-\mu)z+(-2\lambda-4\mu) = 0$. Imponendo il parallelismo di questo piano con il vettore $(1, -5, 0)$ che dà la direzione di $s$ troviamo la condizione $1(\lambda + 2\mu) - 5(-3\lambda - 2\mu) + 0(\lambda - \mu) = 0$, vale a dire $16\lambda + 12\mu = 0$. Prendendo, ad esempio $\lambda = 3$ e $\mu = -4$ troviamo l'equazione del piano $\pi$.

| 2 | |
|---|---|

(c) Le rette $r$ e $s$ sono incidenti?

☐ sì ☒ no

Motivazione:

Se $r$ e $s$ fossero incidenti il piano $\pi$ determinato al punto precedente dovrebbe contenere $s$: infatti il piano $\pi$ conterrebbe un punto di $s$ (la sua intersezione con $r$) e inoltre è parallelo a $s$.
Poiché $\pi$ è parallelo a $s$ per verificare se $\pi$ contiene $s$ è sufficiente verificare se contiene un suo punto arbitrario, ad esempio $\left(-\frac{4}{15}, 1, -\frac{1}{3}\right)$. Poiché $5\left(-\frac{4}{15}\right) + 1 - 7\left(-\frac{1}{3}\right) - 10 \neq 0$ si ha che la retta $s$ non è contenuta nel piano $\pi$, e, quindi, $r$ ed $s$ non sono incidenti.