COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'iperpiano Σ di equazione $2x_1+x_2+4x_3+3x_4-11=0$ e il punto $A := (1,2,1,1)$.

2 (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano passante per il punto A e parallelo all'iperpiano Σ.

$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 11 = 0$

Motivazione:

Gli iperpiani paralleli all'iperpiano Σ hanno equazione del tipo $2x_1+x_2+4x_3+3x_4+k=0$.
Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo $k=-11$.
Osserviamo che otteniamo di nuovo l'iperpiano Σ. Ciò non ci sorprende perché effettivamente il punto A appartiene all'iperpiano Σ.

2 (b) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per il punto A e ortogonale all'iperpiano Σ.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\,t \\ x_2 = 2 + 1\,t \\ x_3 = 1 + 4\,t \\ x_4 = 1 + 3\,t \end{cases}$$

Motivazione:

Ogni retta passante per A ha equazione parametrica del tipo: $\begin{cases} x_1 = 1 + m_1\,t \\ x_2 = 2 + m_2\,t \\ x_3 = 1 + m_3\,t \\ x_4 = 1 + m_4\,t \end{cases}$

dove il vettore $\mathbf{v} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ è parallelo alla retta.
Dal momento che la retta deve essere ortogonale all'iperpiano Σ, il vettore $\mathbf{v}$ deve essere ortogonale all'iperpiano Σ. Ma noi sappiamo che il vettore avente come coordinate i coefficienti delle variabili nell'equazione dell'iperpiano è ortogonale all'iperpiano. Prendendo quindi $\mathbf{v} = (2,1,4,3)$ otteniamo la retta cercata.

2. Sia dato uno spazio vettoriale V e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due suoi vettori. Sia f un endomorfismo di V tale che $\mathbf{v}$ sia un autovettore di f rispetto all'autovalore 3 e $\mathbf{w}$ sia un autovettore di f rispetto all'autovalore 2.

2	

(a) Se $\dim V = 2$, allora f è un isomorfismo?

☒ Sì, sempre ☐ No, mai ☐ In alcuni casi sì, in altri no.

Motivazione:

Notiamo innanzitutto che, essendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ autovettori con autovalori diversi, sono linearmente indipendenti. Dal momento che $\dim V = 2$, essi formano una base di V. La matrice associata all'endomorfismo f, relativamente alla base $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, è

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\det(A) = 6 \neq 0$, l'endomorfismo f è un isomorfismo.

2	

(b) Se $\dim V = 3$, allora f è un isomorfismo?

☐ Sì, sempre ☐ No, mai ☒ In alcuni casi sì, in altri no.

Motivazione:

Diamo l'esempio di un endomorfismo f che è isomorfismo e di uno che non lo è.
Abbiamo visto nella risposta alla domanda precedente che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. Dal momento che $\dim V = 3$, possiamo determinare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ sia una base di V. Consideriamo quindi gli endomorfismi f e g associati, relativamente alla base $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$, rispettivamente alle seguenti matrici A e B:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\det A \neq 0$, l'endomorfismo f è un isomorfismo.
Dal momento che $\det B = 0$, l'endomorfismo g non è un isomorfismo.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Si consideri, al variare del parametro reale k, l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(a,b,c,d) = (ka + 2kb - kc + d, a + 2b - c + 2d, 2a + 4b - 2c + 3d, 4d)$$

| 2 | |

(a) Determinare per ogni k, una base di $f(\mathbb{R}^4)$.

$(k,1,2,0)$ $(1,2,3,4)$ per ogni valore di k.

Motivazione:

Le immagini tramite f dei vettori della base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sono $\mathbf{v}_1 = (k,1,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2k,2,4,0)$, $\mathbf{v}_3 = (-k,-1,-2,0)$, $v_4 = (1,2,3,4)$. Questi vettori generano $f(\mathbb{R}^4)$. La matrice associata a f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è: $A := \begin{pmatrix} k & 2k & -k & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1$. Inoltre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti (dal momento che il minore formato dalla prima e dalla quarta colonna e dalla terza e dalla quarta riga è invertibile) e quindi formano una base per $f(\mathbb{R}^4)$ per ogni valore di k.

| 2 | |

(b) Determinare, per ogni k, una base di $\ker f$.

$(2,-1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ per ogni valore di k.

Motivazione:

Dal punto (a) sappiamo che si ha $\dim f(R^4) = 2$. Da $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ segue $\dim \ker f = 2$. Cerchiamo pertanto due vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\ker f$. Abbiamo visto nel punto (a) che $f(\mathbf{e}_2) = v_2 = 2v_1 = 2f(\mathbf{e}_1)$. Da ciò segue $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = (2,-1,0,0) \in \ker f$.

Analogamente da $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1$ segue $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = (1,0,1,0) \in \ker f$. Questi ultimi due vettori sono linearmente indipendenti perché $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ e quindi formano una base di $\ker f$ per ogni valore di k.

| 3 | |

(c) Determinare tutti i valori di k per i quali si ha $\ker f \oplus f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4$.

$k \neq 0$

Motivazione:

Consideriamo la matrice B avente come colonne le coordinate dei vettori delle basi di $\ker f$ e di $f(R^4)$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\det B = -4k$, per $k \neq 0$ si ha $\ker f \oplus f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4$.

4. Sia data, al variare del parametro reale k, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

| 3 | |

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile? $k = 4$

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è uguale al suo ordine (in questo caso a 4).
Poiché la matrice è sempre triangolare, qualunque sia k gli autovalori di A sono gli elementi della sua diagonale principale, cioè 1 0, 3. La loro molteplicità algebrica è rispettivamente 2, 1 e 1.
Dal momento che gli autovalori 0 e 3 hanno molteplicità algebrica 1, la dimensione dei loro autospazi è uguale a 1 qualunque sia k.
Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione dell' autospazio $E(1)$.

$$\dim E(1) = 4 - \operatorname{rk}(A - I) = 4 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k-4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 4 \\ 1 & \text{se } k \neq 4 \end{cases}$$

Dunque $\dim E(1) + \dim E(0) + \dim E(3) = 4$ se e solo se $k = 4$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 4$

| 4 | |

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Per calcolare $E(1)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - I$, cioè

$$\begin{cases} 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(t_1, t_2, t_1 + 2t_2, -\frac{1}{2}t_1 - t_2)$ con t_1 e t_2 parametri reali. Una base di $E(2)$ si ottiene, ad esempio, ponendo prima $t_1 = 2$ e $t_2 = 0$ e poi $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, cioè è formata da $(2, 0, 2, -1)$ e $(0, 1, 2, -1)$.
Dobbiamo determinare basi per gli altri due autospazi. Osservando la matrice si nota che il vettore $(0, 0, 1, 0)$ è una base di $E(0)$ e che il vettore $(0, 0, 0, 1)$ è una base per $E(3)$.
Riportiamo ora sulla diagonale della matrice D gli autovalori di A, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Riportiamo sulle colonne della matrice M le componenti degli autovettori determinati in un ordine coerente con quello con cui abbiamo posto gli autovalori sulla diagonale di D.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A := (3, 2)$ e la retta r di equazione cartesiana $x + 2y - 12 = 0$.

2	

(a) Determinare il punto C simmetrico di A rispetto alla retta r.

$\boxed{C = (5, 6)}$

Motivazione:

Determiniamo innanzitutto la proiezione H del punto A sulla retta r.
La retta s passante per A e perpendicolare a r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \ \ 3 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Si ha $H = r \cap s$ e quindi, inserendo le coordinate del punto generico di s nell'equazione di r, otteniamo: $3 + t + 4 + 4t - 12 = 0$: pertanto $t = 1$. Abbiamo quindi $H = (4, 4)$.
Il punto $C := (x, y)$ deve essere tale che il punto H è il punto medio dei punti A e C. Quindi

$$\begin{cases} 4 = \frac{1}{2}(x + 3) \\ 4 = \frac{1}{2}(y + 2) \end{cases}$$

Otteniamo perciò $x = 5$ e $y = 6$.

2	

(b) Determinare i punti B e D in modo tale che $ABCD$ sia un quadrato avente come diagonale il segmento AC.

$\boxed{B = (6, 3) \text{ e } D = (2, 5)}$

Motivazione:

Le diagonali di un quadrato sono tra loro perpendicolari e si intersecano nel loro punto medio e quindi B e D devono appartenere all' asse del segmento AC, che è la retta r. Inoltre i vertici del quadrato sono equidistanti dal punto di intersezione H delle diagonali. La distanza di A e C da H è uguale a $\sqrt{5}$. Quindi i punti B e D devono appartenere, oltre che alla retta r, anche alla circonferenza di centro H e raggio uguale a $\sqrt{5}$. Ne segue che le loro coordinate devono essere soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottengono le coordinate di B e D.

3	

(c) Determinare i punti E e F in modo tale che $AECF$ sia un rombo di area uguale a 20 e avente come diagonale il segmento AC.

$\boxed{E = (8, 2) \text{ e } F = (0, 6)}$

Le diagonali di un rombo sono tra loro perpendicolari e si intersecano nel loro punto medio e quindi E e F devono appartenere alla retta r. Inoltre l'area del rombo cercato è uguale a $4\frac{1}{2}\, \mathrm{d}(A, H)\, \mathrm{d}(F, H)$. Poiché $\mathrm{d}(A, H) = \sqrt{5}$ e l'area deve essere uguale a 20, si ottiene: $\mathrm{d}(F, H) = 2\sqrt{5}$. Ne segue che le coordinate di E e F devono essere soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 20 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottengono le coordinate di E e F.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati $A := (1, 2, 3)$ e $B := (3, 8, 5)$.

2 (a) Determinare l'equazione cartesiana della sfera S avente come diametro il segmento AB.

$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 11$

Motivazione:

La sfera S ha centro nel punto medio M di AB e raggio r uguale alla metà della distanza tra A e B. Pertanto $M = (\frac{1}{2}(1+3), \frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(3+5) = (2, 5, 4)$ e
$r = \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (8-2)^2 + (5-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{44}$.
La sfera S ha quindi equazione $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 11$.

2 (b) Determinare il piano π tangente alla sfera S in A.

$\pi : x + 3y + z - 10 = 0$

Motivazione:

Il piano π deve essere perpendicolare alla retta passante per A e B. Quest'ultima ha parametri direttori $(3-1, 8-2, 5-3) = (2, 6, 2)$. Il piano π ha quindi equazione $2(x-1) + 6(y-2) + 2(z-3) = 0$. Quindi $\pi : x + 3y + z - 10 = 0$

3 (c) Determinare la sfera S' tangente in A alla sfera S, avente volume uguale a $\frac{1}{8}$ del volume della sfera S e appartenente al semispazio Σ delimitato da π contenente il punto B.

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$

Motivazione:

Poiché le sfere S e S' devono essere tangenti in A, la retta passante per il centro M' della sfera S' e per il punto A deve coincidere con la retta passante per il centro M della sfera S e per il punto A. Quest'ultima coincide con la retta passante per A e B. Ne segue che il centro M' della sfera S' deve appartenere alla retta passante per A e B.
Dal momento che il volume di una sfera di raggio r è uguale a $\frac{4}{3}\pi r^3$ e dal momento che la sfera S' deve avere volume uguale a $\frac{1}{8}$ del volume della sfera S, segue che la sfera S' deve avere raggio uguale alla metà del raggio della sfera S e quindi la sua distanza da A deve essere uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(M, A)$.
Inoltre, dal momento che la sfera S' deve essere contenuta nel semispazio Σ delimitato dal piano π contenente B, si ha che il centro M' della sfera S' deve appartenere a Σ.
Abbiamo quindi che il punto M' deve verificare le seguenti tre condizioni

i. M' appartiene al segmento AB
ii. $\mathrm{d}(M', A) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(M, A)$
iii. M' appartiene a Σ

Segue che il punto M' è il punto medio di A e M, quindi $M' = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2})$. Inoltre il raggio della sfera S' è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{11}$. La sfera S' ha pertanto equazione:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$