COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano A e B due matrici quadrate. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo che è autovettore di A relativamente all'autovalore 2 ed è autovettore di B relativamente all'autovalore -5.

2 (a) Si consideri la matrice $A+B$.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $A+B$ relativamente all'autovalore $\boxed{-3}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $A+B$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{v}$ è autovettore di $A+B$ oppure no

Motivazione:

Sappiamo che $A\mathbf{v}=2\mathbf{v}$ e che $B\mathbf{v}=-5\mathbf{v}$. Dunque

$$(A+B)\mathbf{v}=A\mathbf{v}+B\mathbf{v}=2\mathbf{v}-5\mathbf{v}=-3\mathbf{v}.$$

2 (b) Si consideri la matrice $(A+B)^2$.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $(A+B)^2$ relativamente all'autovalore $\boxed{9}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $(A+B)^2$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{v}$ è autovettore di $(A+B)^2$ oppure no

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $(A+B)\mathbf{v}=-3\mathbf{v}$. Dunque

$$(A+B)^2\mathbf{v}=(A+B)(A+B)\mathbf{v}=(A+B)(-3\mathbf{v})=-3(A+B)\mathbf{v}=-3(-3\mathbf{v})=9\mathbf{v}.$$

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 1, 1)$, $B := (3, 2, 4)$ e il piano $\pi : x + y + 2z + 19 = 0$.

2	

(a) Il segmento di estremi A e B interseca il piano π?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I due semispazi delimitati dal piano π sono definiti dalle disequazioni $x + y + 2z + 19 > 0$ e $x + y + 2z + 19 < 0$.

Sostituendo le coordinate di A in $x+y+2z+19$ otteniamo $2+1+2\cdot 1+19 = 24$. Abbiamo un numero positivo, dunque A appartiene al semispazio di disequazione $x+y+2z+19 > 0$. Sostituendo le coordinate di B in $x+y+2z+19$ otteniamo $3+2+2\cdot 4+19 = 32$. Abbiamo un numero positivo, dunque B appartiene al semispazio di disequazione $x+y+2z+19 > 0$.

Il segmento di estremi A e B non interseca il piano π perché A e B stanno nello stesso semispazio delimitato da π.

2	

(b) La semiretta di origine A e contenente B interseca il piano π?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2 + (3 - 2)t \\ y = 1 + (2 - 1)t \\ z = 1 + (4 - 1)t \end{cases}$$

Il punto A si ottiene in corrispondenza del valore 0 del parametro t, mentre il punto B si ottiene in corrispondenza del valore 1 del parametro t: dunque i punti della semiretta di origine A e contenente B sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro t. Intersecando la retta r con il piano π otteniamo l'equazione $(2+t)+(1+t)+2(1+3t)+19 = 0$ la cui soluzione è $t = -3$. Poiché questo è un valore negativo, l'intersezione tra r e π non è un punto della semiretta di origine A e contenente B.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(x, y, z, w) := (x - y, y - z, z - w, w - x)$.

2

(a) Determina una base del nucleo di f.

$(1, 1, 1, 1)$

Motivazione:

Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - w = 0 \\ -x + w = 0 \end{cases}$$

si trova che il nucleo è formato dai vettori del tipo (t, t, t, t) al variare del parametro reale t. Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ troviamo che una base del nucleo di f è formata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$.

2

(b) Determina una base dell'immagine di f.

$(1, 0, 0, -1)$, $(-1, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 1, 0)$.

Motivazione:

Per il punto precedente il nucleo di f ha dimensione 1: pertanto l'immagine di f ha dimensione $4 - 1 = 3$. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il minore formato dalle prime 3 righe e 3 colonne è invertibile e, quindi, le prime 3 colonne di A sono linearmente indipendenti. I vettori le cui componenti rispetto alla base canonica sono dati da queste colonne, e cioè i vettori $(1, 0, 0, -1)$, $(-1, 1, 0, 0)$ e $(0, -1, 1, 0)$, formano dunque una base per l'immagine di f.

3

(c) Esistono tre vettori distinti **u**, **v** e **w** che hanno la stessa immagine non nulla tramite f? Se sì, scrivere dei vettori siffatti (non è necessaria la motivazione), se no, spiegare perché non esistono.

☒ Tre vettori siffatti sono, ad esempio:	☐ Non esistono vettori siffatti. Infatti:
$(1, 0, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(0, -1, -1, -1)$	

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{u} := (0,1,1,-1)$ e $\mathbf{v} := (1,0,1,-1)$ e F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$.

2

(a) Determina una base per $E \cap F$.

$(2,2,4,-4)$

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{w}$ appartiene a $E \cap F$ se si può esprimere come combinazione lineare sia di $(0,1,1,-1)$ e $(1,0,1,-1)$ sia di $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$. Dunque:

$$\alpha(0,1,1,-1) + \beta(1,0,1,-1) = \gamma(2,2,3,0) + \delta(0,0,1,-4).$$

Questa relazione conduce al sistema $\begin{cases} \beta = 2\gamma \\ \alpha = 2\gamma \\ \alpha + \beta = 3\gamma + \delta \\ -\alpha - \beta = -4\delta \end{cases}$. Sostituendo ad α e β nella terza e quarta equazione le espressioni in termini di γ date dalla prima e seconda equazione otteniamo $\delta = \gamma$ e $-4\delta = -4\gamma$. Le equazioni così trovate sono ovviamente equivalenti, e possiamo così esprimere le soluzioni in termini di γ nel modo seguente $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2t, 2t, t, t)$ al variare del parametro reale t. Il generico vettore di $E \cap F$ si può allora scrivere come $t(2,2,3,0) + t(0,0,1,-4)$, vale a dire $(2t, 2t, 4t, -4t)$. Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ si trova un vettore che forma una base di $E \cap F$.

2

(b) Determina una base per $E + F$.

$(0,1,1,-1)$, $(1,0,1,-1)$, $(2,2,3,0)$

Motivazione:

Sia E che F sono generati da due vettori linearmente indipendenti e hanno quindi dimensione 2. Dal punto precedente sappiamo che $E \cap F$ ha dimensione 1. Per la formula di Grassmann, si ha allora $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3$. I vettori $(0,1,1,-1)$, $1,0,1,-1)$, $(2,2,3,0)$ e $(0,0,1,-4)$ generano $E + F$: dobbiamo quindi trovare 3 vettori linearmente indipendenti tra questi. I primi 2 sono linearmente indipendenti perché formano una base per E: il terzo vettore (che appartiene a F) non è combinazione lineare dei primi 2 perché, se così fosse, apparterrebbe anche a E e dovrebbe quindi essere multiplo di $(2,2,4,-4)$, vettore che genera $E \cap F$. Dunque i primi 3 vettori formano una base di $E + F$.

3

(c) Determina tutti i vettori di F ortogonali, rispetto al prodotto scalare standard, sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

$(2t, 2t, 2t, 4t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$

Motivazione:

I vettori di F si scrivono come $\gamma(2,2,3,0) + \delta(0,0,1,-4)$ cioè $(2\gamma, 2\gamma, 3\gamma + \delta, -4\delta)$. Ponendo uguale a 0 il prodotto scalare di questo vettore generico sia con $\mathbf{u}$ che con $\mathbf{v}$ otteniamo $2\gamma \cdot 0 + 2\gamma \cdot 1 + (3\gamma + \delta) \cdot 1 - 4\delta(-1) = 0$ e $2\gamma \cdot 1 + 2\gamma \cdot 0 + (3\gamma + \delta) \cdot 1 - 4\delta(-1) = 0$ vale a dire $5\gamma + 5\delta = 0$ e $5\gamma + 5\delta = 0$, le cui soluzioni sono $(\gamma, \delta) = (t, -t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Quindi i vettori cercati sono i vettori del tipo $(2t, 2t, 2t, 4t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo sia dato il triangolo di vertici $A := (4, 7)$, $B := (-6, 7)$ e $C := (6, 1)$.

2	

(a) Determina l'intersezione delle altezze del triangolo ABC: $(6, 11)$

Motivazione:

Basta ovviamente intersecare due delle altezze. La retta passante per A e B è parallela all'asse delle x. La generica retta ortogonale al lato AB ha allora equazione cartesiana $x + c = 0$. Imponendo il passaggio per il punto C troviamo quindi che l'altezza relativa al lato AB ha equazione $x - 6 = 0$. La retta passante per A e C ha parametri direttori $(6 - 4, 1 - 7) = (2, -6)$ o, equivalentemente, $(1, -3)$. La generica retta ortogonale al lato AC ha allora equazione cartesiana $x - 3y + c = 0$. Imponendo il passaggio per B troviamo la condizione $-6 - 3 \cdot 7 + c = 0$ da cui otteniamo $c = 27$. L'altezza relativa al lato AC ha allora equazione $x - 3y + 27 = 0$. Mettendo a sistema le equazioni delle due altezze trovate, determiniamo il punto $(6, 11)$.

2	

(b) Determina l'intersezione degli assi dei lati del triangolo ABC: $(-1, 2)$

Motivazione:

Basta ovviamente intersecare due degli assi. Dal punto precedente sappiamo già che la generica retta ortogonale al lato AB ha equazione cartesiana $x + c = 0$. Il punto medio di A e B è $\left(\frac{4-6}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = (-1, 7)$. Imponendo il passaggio per questo punto troviamo quindi che l'asse del lato AB ha equazione $x + 1 = 0$. Dal punto precedente sappiamo già che la generica retta ortogonale al lato AC ha equazione cartesiana $x - 3y + c = 0$. Il punto medio di A e C è $\left(\frac{4+6}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = (5, 4)$. Imponendo il passaggio per questo punto troviamo quindi la condizione $5 - 3 \cdot 4 + c = 0$ da cui otteniamo $c = 7$. L'asse del lato AC ha allora equazione $x - 3y + 7 = 0$. Mettendo a sistema le equazioni dei due assi trovati, determiniamo il punto $(-1, 2)$.

3	

(c) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti A, B e C:

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 50$

Motivazione:

Il centro della circonferenza passante per i punti A, B e C è l'intersezione degli assi trovati al punto precedente, cioè il punto $(-1, 2)$. Per determinare il raggio della circonferenza basta calcolare la distanza tra il centro e uno qualunque dei vertici del triangolo, ad esempio A. Si trova così $\sqrt{(4 - (-1))^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$. La circonferenza ha allora equazione cartesiana $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 50$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (3, 2, 1)$ e la retta
$$r : \begin{cases} x - 2y \qquad + 8 = 0 \\ \qquad y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

2 (a) Il piano π contenente r e passante per il punto A ha equazione:

$4x - y + 7z - 17 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x - 2y + 8) + \mu(y + z - 7) = 0$.
Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione: $\lambda(3 - 2 \cdot 2 + 8) + \mu(2 + 1 - 7) = 0$, vale a dire $7\lambda - 4\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 4$ e $\mu = 7$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2 (b) Il piano σ ortogonale a r e passante per il punto A ha equazione:

$2x + y - z - 7 = 0$

Motivazione:

La retta r è ortogonale ai vettori $(1, -2, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Dunque, se (m, n, p) sono parametri direttori di r, si ha $m - 2n = 0$ e $n + p = 0$. Si può scegliere allora $(2, 1, -1)$ come parametri direttori di r. Un generico piano ortogonale a r ha allora equazione del tipo $2x + y - z + d = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione $2 \cdot 3 + 2 - 1 + d = 0$ da cui otteniamo $d = -7$.

3 (c) La distanza tra il punto A e la retta r è:

$\sqrt{11}$

Motivazione:

La distanza tra A e r è uguale alla distanza tra A e la sua proiezione H su r. Il punto H è l'intersezione di r con σ. Dunque H si trova risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} x - 2y \qquad + 8 = 0 \\ \qquad y + z - 7 = 0 \\ 2x + y - z - 7 = 0 \end{cases}$$
Risolvendo questo sistema troviamo $(2, 5, 2)$. La distanza tra A e H è $\sqrt{(3-2)^2 + (2-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{11}$.