COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia data la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare, se esiste, una matrice $M \in GL(2, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Dal momento che la matrice A è triangolare superiore, i suoi autovalori sono 1 e 2. Un autovettore con autovalore 1 è chiaramente $\mathbf{v}_1 := (1, 0)$. Gli autovettori (a, b) con autovalore 2 devono verificare la condizione $(A - 2I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Svolgendo i calcoli si ottiene $a = k, b = k$. Scegliendo un qualsiasi $k \neq 0$, abbiamo una base dell'autospazio relativo a 2. Ponendo $k = 1$ otteniamo il vettore $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. La matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, essendo la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di autovettori, è una delle matrici cercate.

2 (b) Determinare, se esiste, una matrice $M \in GL(2, \mathbb{R})$ tale che $\det M = 5$ e $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

$M := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Nella risposta alla domanda precedente abbiamo visto che per ogni valore di $k \neq 0$ il vettore (k, k) è una base dell'autospazio. Prendendo allora $k = 5$, abbiamo la matrice M di determinante uguale a 5.

2. Siano dati, al variare del parametro reale k, i punti $O := (0,0,0,0)$, $A := (1,1,1,k)$, $B := (1,1,1,0)$ e $C := (1,1,0,0)$ di $\mathbb{R}^4$.

2

(a) Determinare, per ogni valore di k, la dimensione dell'inviluppo affine Π dei punti O, A, B e C.

Se $k \neq 0$ si ha $\dim \Pi = 3$; se $k = 0$ si ha $\dim \Pi = 2$.

Motivazione:

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate dei vettori $A - O$, $B - O$ e $C - O$. Sappiamo che si ha: $\dim \Pi = \operatorname{rk} A$. Se $k \neq 0$ si ha $\operatorname{rk} A = 3$ dal momento che il minore formato dalle ultime 3 righe ha determinante diverso da 0. Se $k = 0$ si ha $\operatorname{rk} A = 2$ dal momento che la seconda e la terza riga sono linearmente indipendenti mentre la prima riga è uguale alla seconda e la quarta è nulla.

2

(b) Posto $k = 1$, determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π che passa per i punti O, A, B, C e specificare se Π è un sottospazio vettoriale.

$$\Pi : \; x_1 - x_2 = 0$$

L'iperpiano Π è un sottospazio vettoriale.

Motivazione:

Sappiamo che per $k = 1$ l'inviluppo convesso ha dimensione uguale a 3 e pertanto è un iperpiano. Cerchiamone un 'equazione cartesiana considerando l'equazione generica $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b = 0$ e imponiamo il passaggio per i punti O, A, B, C. Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} b &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + b &= 0 \\ a_1 + a_2 + b &= 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a_1 = h$, $a_2 = -h$, $a_3 = a_4 = b = 0$.
Posto $h = 1$, otteniamo un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π: $x_1 - x_2 = 0$.
L'iperpiano Π è un sottospazio vettoriale dal momento che contiene il vettore nullo.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Dato uno spazio vettoriale V avente come base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, sia $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^4[x]$ l'omomorfismo tale che $f(\mathbf{v}_1) = 2 - x - x^2$, $f(\mathbf{v}_2) = 1 + x + x^2 + 3x^3$, $f(\mathbf{v}_3) = 3 + 3x^3$.

2

(a) Determinare una base di $f(V)$.

$f(\mathbf{v}_1) = 2 - x - x^2, f(\mathbf{v}_2) = 1 + x + x^2 + 3x^3$

Motivazione:

La matrice rappresentativa rispetto alle base assegnata di V e alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$ è $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Le prime due colonne sono linearmente indipendenti. La terza colonna è somma delle prime due. Segue che l'immagine ha come base i vettori corrispondenti alle prime due colonne.

2

(b) Determinare una base di $\ker f$.

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim V = \dim \ker f + \dim f(V)$. Dal momento che si ha $\dim V = 3$ e $\dim f(V) = 2$, si ha $\dim \ker f = 1$. Per determinare una base di $\ker f$ cerchiamo un vettore non nullo appartenente a $\ker f$.
Abbiamo visto che la terza colonna è somma delle prime due, quindi:
$\mathbf{0} = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) - f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$.
Da ciò segue che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ è una base di $\ker f$.

3

(c) Determinare una base di un sottospazio V' supplementare di $\ker f$ in V.

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

Abbiamo visto che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ forma una base di $\ker f$. Si ottiene una base di un supplementare di $\ker f$ prendendo due vettori $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ in modo tale che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ sia una base di V. I vettori $\mathbf{v}'_1 := \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 := \mathbf{v}_2$ verificano questa condizione poiché la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avente come colonne le loro coordinate relative alla base assegnata in V ha determinante diverso da 0.

4	

4. Sia $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_4$.

   (a) Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

   $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$

   Motivazione:

   La matrice rappresentativa di f relativa alla base canonica è: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Dal momento che la matrice A è simmetrica, sappiamo che esiste una base di autovettori e quindi la dimensione di ogni autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore corrispondente.
   Svolgendo i calcoli si ottiene che le radici del polinomio caratteristico sono 0 con molteplicità 2, 4 con molteplicità 1 e 5 con molteplicità 1.
   Per determinare una base dell'autospazio $E(0)$ cerchiamo due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo.
   Dal momento che $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3)$, abbiamo $f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \in \ker f = E(0)$.
   Dal momento che $2f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_4)$, abbiamo $2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$ e quindi $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 \in E(0)$.
   Essendo $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$ linearmente indipendenti abbiamo trovato una base di $E(0)$.

   Per l'autovalore 4 abbiamo che le soluzioni di $(A - 4I) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono $a_1 = a_4 = 0$, $a_2 = a_3 = k$ e quindi una base per $E(4)$ è $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
   Operando in modo analogo si ottiene che una base di $E(5)$ è $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$.
   Abbiamo quindi che $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

3	

   (b) Determinare una base di R^4 formata da autovettori di f che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

   $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4)$

   Motivazione:

   Dobbiamo ortonormalizzare la base ottenuta precedentemente. Per far ciò cerchiamo una base ortonormale per ogni autospazio.
   Poiché i vettori della base scelta di $E(0)$ sono tra loro ortogonali, dobbiamo solo dividere questi vettori per la loro norma. Pertanto $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4)$ è una base ortonormale di $E(0)$.
   Dividendo infine i vettori della base $E(4)$ e della base di $E(5)$ per le loro norme otteniamo una base ortonormale per ognuno dei due autospazi.
   Segue che i vettori $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4)$ formano una base del tipo cercato.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano date la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ e la retta r di equazione $x - 2y + 21 = 0$.

2 (a) Verificare se l'origine O del sistema di riferimento è interno alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Il punto O è esterno alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Motivazione:

La circonferenza $\mathcal{C}$ ha centro in $C := (2, -1)$ e raggio uguale a 2.
La distanza di O da C è uguale a $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Questo valore è maggiore del raggio della circonferenza, per cui il punto O è esterno ad essa.

2 (b) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele alla retta r e tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$.

$s_1 : x - 2y - 4 + 2\sqrt{5} = 0 \quad , \quad s_2 : x - 2y - 4 - 2\sqrt{5} = 0,$

Motivazione:

Consideriamo il fascio delle rette parallele a r. Si ha $r_k :\ x - 2y + k = 0$.
Poiché una retta è tangente ad una circonferenza se la sua distanza dal suo centro è uguale al raggio, cerchiamo tra le rette r_k quelle aventi distanza da C uguale a 2:
$\mathrm{d}(r_k, C) = \frac{|2-2(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2.$
Le soluzioni di questa equazione sono $k = -4 + 2\sqrt{5}$ e $k = -4 - 2\sqrt{5}$.

3 (c) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele alla retta r che intersecano la circonferenza $\mathcal{C}$ in due punti che sono vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$.

$s'_1 : x - 2y - 4 + \sqrt{10} = 0 \quad , \quad s'_2 : x - 2y - 4 - \sqrt{10} = 0$

Motivazione:

Le rette cercate devono avere distanza dal centro C della circonferenza uguale a $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, cerchiamo tra le rette r_k quelle aventi distanza da C uguale a $\sqrt{2}$:
$\mathrm{d}(r_k, C) = \frac{|2-2(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{2}.$
Le soluzioni di questa equazione sono $k = -4 + \sqrt{10}$ e $k = -4 - \sqrt{10}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il piano $\pi : 2x - y + z - 2 = 0$, il punto $A := (2, 1, -1) \in \pi$ e il punto $B := (0, 1, -3) \notin \pi$.

3 | |

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r proiezione ortogonale sul piano π della retta passante per A e B.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 &= 0 \\ x + y - z - 4 &= 0 \end{cases}$$

Motivazione:

Cerchiamo la proiezione ortogonale C sul piano π del punto B.
La retta r', ortogonale al piano π e passante per B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= -3 + t \end{cases}.$$

Le coordinate del punto di intersezione di r' con π si ottengono dalla soluzione dell'equazione $2(2t) - (1 - t) + (-3 + t) - 2 = 0$. Si ha $t = 1$ e quindi $C = (2, 0, -2)$. La retta cercata è intersezione del piano π con il piano passante per A, B e C. Svolgendo i calcoli si vede che quest'ultimo ha equazione $x + y - z - 4 = 0$.

2 | |

(b) Calcolare la lunghezza del segmento proiezione ortogonale sul piano π del segmento di estremi A e B.

$\sqrt{2}$

Motivazione:

Il segmento cercato è il segmento di estremi A e C, la cui lunghezza è uguale a:
$\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (0-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}$.

2 | |

(c) Calcolare l'area del triangolo ABC, dove C è la proiezione ortogonale su π di B.

$\sqrt{3}$

Motivazione:

L'area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, C)\,\mathrm{d}(B, C)$.
Sappiamo che si ha $\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{2}$.
Abbiamo poi $\mathrm{d}(B, C) = \sqrt{(0-2)^2 + (1-0)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{6}$.
E quindi l'area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{3}$.