COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano date le matrici $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare, se esiste, una matrice invertibile M, tale che $B = M^{-1}AM$.

$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
Il primo di essi è autovettore con autovalore 1, il secondo è autovettore con autovalore 2.
Scambiando tra loro i due vettori, abbiamo una nuova base $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2 := \mathbf{e}_1$.
La matrice associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è ovviamente la matrice B. Si ha quindi $B = M^{-1}AM$ dove $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

2 (b) Determinare, se esiste, una matrice invertibile N, tale che $C = N^{-1}AN$.

Non esiste una tale matrice N.

Motivazione:

Non esiste una tale matrice N perché la matrice A ha autovalori 1 e 2 mentre la matrice C ha autovalori 1 e 3. Matrici simili devono avere gli stessi autovalori.

2	

2. Siano dati $P_1 := (0, 1, 1, 0)$, $P_2 := (1, 0, 1, 0)$, $P_3 := (0, 0, 1, 1)$ e $P_4 := (1, 2, 4, 1)$.

(a) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da P_1, P_2, P_3. Determinare la dimensione di V e verificare se P_4 appartiene a V.

$\dim V = 3$ e P_4 appartiene a V.

Motivazione:

La matrice: $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate di P_1, P_2, P_3 ha rango uguale a 3 perché il minore formato dalle prime tre righe ha determinante diverso da 0. Pertanto $\dim V = 3$. La matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate di P_1, P_2, P_3, P_4 ha determinante uguale a 0 e quindi P_4 è combinazione lineare di P_1, P_2, P_3. Segue che P_4 appartiene a V.

2	

(b) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine E di P_1, P_2, P_3 e verificare se P_4 appartiene a E.

$\dim E = 2$ e P_4 non appartiene a E.

Motivazione:

La matrice: $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate di $P_2 - P_1, P_3 - P_1$ ha rango uguale a 2 perché il minore formato dalle prime due righe ha determinante diverso da 0. Pertanto $\dim E = 2$.

Sia F il sottospazio vettoriale avente come base $P_2 - P_1, P_3 - P_1$. Si ha $E = P_1 + F$. Quindi $P_4 \in E = P_1 + F$ se e solo se $P_4 - P_1 \in F$.

La matrice: $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

avente come colonne le coordinate di $P_2 - P_1, P_3 - P_1, P_4 - P_1$ ha rango uguale a 3 perché il minore formato dalle prime tre righe ha determinante diverso da 0. Pertanto P_4 non appartiene a E.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f(a, b, c, d) := (2b + d, a + 2c, a - 2b + kc - d)$.

2	

(a) Determinare il valore di k per cui l'immagine di f ha dimensione uguale a 2 e determinare, in corrispondenza di tale valore, una base per l'immagine.

$k = 2$. Base dell'immagine: $(0, 1, 1), (2, 0, -2)$.

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & k & -1 \end{pmatrix}$.

Si ha $\dim f(\mathbb{R}^4) = \mathrm{rk}(A)$. Il minore $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e i suoi orlati sono $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ con $\det A_1 = 0$ per ogni valore di k. Si ha poi $\det A_2 = 0$ se e solo se $k = 2$. Quindi $\dim f(\mathbb{R}^4) = 2$ se e solo se $k = 2$. Per tale valore di k si ha:
$f(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (2, 0, -2)$, $f(0, 0, 1, 0) = (0, 2, 2)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, -1)$. Una base per $f(\mathbb{R}^4)$ è quindi costituita dai vettori $(0, 1, 1)$ e $(2, 0, -2)$.

2	

(b) Utilizzando il valore di k di cui al punto (a), determinare una base per il nucleo di f.

$(-2, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -2)$

Motivazione:

Sappiamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rk}\, A$, da cui il nucleo ha dimensione 2. Osservando che $f(0, 0, 1, 0) - 2f(1, 0, 0, 0) = 0$ e che $f(0, 1, 0, 0) - 2f(0, 0, 0, 1) = 0$, si ha che una base per il nucleo è costituita dai vettori (0,0,1,0)-2(1,0,0,0) e (0,1,0,0)-2(0,0,0,1), che sono tra loro linearmente indipendenti.

3	

(c) Posto $k = 2$, determinare la matrice A' rappresentativa dell'omomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^3$.

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo:
$f(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1) = \mathbf{v}_2$, $f(0, 1, 0, 0) = (2, 0, -2) = 2\mathbf{v}_3$
$f(0, 0, 1, 0) = (0, 2, 2) = 2\mathbf{v}_2$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, -1) = \mathbf{v}_3$
da cui deriva la matrice A'.

4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice
$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

| 3 | |

(a) Determinare gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori distinti effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(3, 0, -1)$
10	$(1, 0, 3)$, $(0, 1, 0)$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 0 & 10-x & 0 \\ 3 & 0 & 9-x \end{vmatrix} = -x(x-10)^2$, che si annulla per 0 e 10.
Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} x + \quad 3z = 0 \\ 10y \quad = 0 \\ 3x + \quad 9z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(3h, 0, -h)$ con h parametro reale. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.
Per calcolare $E(10)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 10I$, cioè

$$\begin{cases} -9x + \quad 3z = 0 \\ 0 \quad = 0 \\ 3x \quad -z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, k, 3h)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(10)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

| 2 | |

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$

| 2 | |

(c) Determinare, se esiste, un'altra matrice ortogonale N tali che $D = N^{-1}AN$ (con D stessa matrice diagonale determinata al punto precedente).

$N := \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Le colonne di una matrice ortogonale che diagonalizza A si ottengono a partire da una base ortonormale di ciascun autospazio: basta quindi prendere, anche solo per uno degli autospazi, una base ortonormale differente. Ad esempio, nella base ortonormale di $E(10)$ utilizzata per scrivere M rimpiazziamo il vettore $(0, 1, 0)$ con il suo vettore opposto $(0, -1, 0)$ ottenendo un vettore che è anch'esso ortogonale all'altro vettore della base di $E(10)$ ed ha norma 1: modifichiamo poi di conseguenza la terza colonna della matrice ortogonale.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (3,7)$, $B = (1,3)$, $C = (7,3)$, $D = (7,5)$.

| 2 | |

(a) Determinare l'equazione della circonferenza γ avente come diametro BD e stabilire se i punti A e C appartengono a γ.

$\gamma : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$. I punti A e C appartengono a γ

Motivazione:

Il centro di γ è il punto medio dei punti B e D che è ovviamente $M := (4,4)$. Il raggio di γ è uguale $\sqrt{(1-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$. Pertanto γ ha equazione $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$. I punti A e C verificano tale equazione e quindi appartengono a γ.

| 2 | |

(b) Calcolare l'area del quadrilatero $ABCD$ (che non è intrecciato).

16

Motivazione:

Il quadrilatero $ABCD$, poiché non è intrecciato, è formato da due triangoli ABC e CDA. Entrambi i triangoli hanno come base il segmento AC con $\mathrm{d}(A,C) = 4\sqrt{2}$. La retta r passante per A e C ha equazione $x + y - 10 = 0$. Quindi $\mathrm{d}(B,r) = \frac{|1+3-10|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ e $\mathrm{d}(D,r) = \frac{|7+5-10|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Si ha pertanto Area$=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A,C)(\mathrm{d}(B,r) + \mathrm{d}(D,r)) = 16$.

| 3 | |

(c) Determinare le equazioni cartesiane delle rette tangenti a γ e parallele alla retta r passante per A e C.

$x + y - 8 - 2\sqrt{5} = 0$ e $x + y - 8 + 2\sqrt{5} = 0$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(4,-4)$ ovvero $(1,-1)$, la generica parallela a r ha equazione $x+y+k = 0$ (fascio). Le tangenti richieste sono le rette del fascio aventi distanza dal centro $M = (4,4)$ di γ uguale al raggio di γ che è uguale a $\sqrt{10}$. Deve risultare pertanto $\frac{|4+4+k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$ da cui $k = -8 \pm 2\sqrt{5}$. Le rette tangenti richieste hanno equazione $x + y - 8 - 2\sqrt{5} = 0$ e $x + y - 8 + 2\sqrt{5} = 0$.

6. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato il piano $\pi : x+y-2z+3 = 0$. Siano dati il punto $A := (-3, 2, 1)$ appartenente a π e il punto $B := (5, 4, 0)$.

2	

(a) Determinare la proiezione H del punto B sul piano π.

$H = (3, 2, 4)$

Motivazione:

La retta ortogonale a π passante per B ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 5+t \\ y = 4+t \\ z = \ \ -2t \end{cases}$

Sostituendo nell'equazione di π si ottiene il valore di t per determinare le coordinate del punto H: $(5+t)+(4+t)-2(-2t)+3 = 0$. Questa equazione ha soluzione $t = -2$ da cui le coordinate di H.

2	

(b) Determinare il raggio r e il centro C della circonferenza intersezione del piano π con la sfera di centro B passante per A.

$C = H = (3, 2, 4)$, $r = 3\sqrt{5}$

Motivazione:

Il centro della circonferenza è il punto H precedentemente determinato.
Il raggio r della circonferenza è uguale alla distanza del punto A dal punto H:
$r = \sqrt{(3+3)^2 + (2-2)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{5}$.

3	

(c) Considerati i punti A' e B' simmetrici rispettivamente di A e B rispetto a H, determinare l'area del quadrilatero $ABA'B'$.

$12\sqrt{30}$

Motivazione:

L'area del quadrilatero $ABA'B'$ è uguale all'area del triangolo ABB' sommata all'area del triangolo $BA'B'$. Poiché H è proiezione di B, la retta passante per B e H è ortogonale alla retta passante per A e H. Segue area$(ABB') = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(BB')\,\mathrm{d}(A, H) = \frac{1}{2}2\,\mathrm{d}(B, H)r$. Essendo $\mathrm{d}(B, H) = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{6}$, si ha area$(ABB') = 2\sqrt{6}\ 3\sqrt{5} = 6\sqrt{30}$. Essendo il triangolo $BA'B'$ e il triangolo ABB' simmetrici, l'area dei due triangoli è uguale. Pertanto l'area del quadrilatero $ABA'B'$ è il doppio dell'area del triangolo ABB'.