

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni:

2

- (a) Dati tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di uno spazio vettoriale V , allora, preso comunque un vettore $\mathbf{u} \in V$, si ha sempre che i vettori $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio. Prendiamo $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1$. Allora i vettori $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}$ sono uguali ai vettori $\mathbf{0}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$. Questi ultimi tre vettori sono linearmente dipendenti.

2

- (b) Dati tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v} := (a, b, c), \mathbf{v}' := (a', b', c'), \mathbf{v}'' := (a'', b'', c'')$ di \mathbb{R}^3 , allora, presi comunque $h \neq 0, h' \neq 0, h'' \neq 0$, anche i vettori $h\mathbf{v}, h'\mathbf{v}', h''\mathbf{v}''$ sono linearmente indipendenti.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Il fatto che i vettori $\mathbf{v} := (a, b, c), \mathbf{v}' := (a', b', c'), \mathbf{v}'' := (a'', b'', c'')$ siano linearmente indipendenti implica $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$. Ma allora, poiché $h \neq 0, h' \neq 0, h'' \neq 0$, si ha $\begin{vmatrix} ha & h'a' & h''a'' \\ hb & h'b' & h''b'' \\ hc & h'c' & h''c'' \end{vmatrix} = hh'h'' \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$. Da ciò segue che i vettori $h\mathbf{v}, h'\mathbf{v}', h''\mathbf{v}''$ sono linearmente indipendenti.

2. In \mathbb{R}^4 siano dati $A := (1, 1, -1, -1)$, $B := (2, 1, -3, -3)$, $C := (1, 2, 1, 1)$, $D := (2, 3, 1, 1)$.

- 2 (a) Determinare la dimensione dell'involuppo affine Σ generato da A, B, C, D .

$$\dim \Sigma = 2$$

Motivazione:

La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice M avente come colonne le coordinate dei vettori $B - A, C - A, D - A$. Abbiamo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Il minore di M formato dalle prime due righe e colonne è invertibile. Consideriamo allora i due suoi orlati. Sono uguali. Svolgendo i calcoli si nota che entrambi hanno determinante nullo. Quindi $\dim \Sigma = \text{rk } M = 2$.

- 2 (b) Determinare equazioni parametriche del sottospazio affine Σ' parallelo a Σ , della stessa dimensione di Σ e passante per $E := (1, 2, 1, 3)$.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = 2 + t_2 \\ x_3 = 1 - 2t_1 + 2t_2 \\ x_4 = 3 - 2t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

Motivazione:

Dalla risposta alla domanda precedente segue che Σ ha equazioni vettoriali $A + (B - A)t_1 + (C - A)t_2$. Σ' ha quindi equazioni vettoriali $E + (B - A)t_1 + (C - A)t_2$. Pertanto Σ' ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = 2 + t_2 \\ x_3 = 1 - 2t_1 + 2t_2 \\ x_4 = 3 - 2t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato, al variare del parametro reale k , il sistema Σ :

$$\Sigma : \begin{cases} x + (k+1)y + z = 3 \\ kx - y + 2z = 5 \\ 2x + ky + 3z = 8 \end{cases}$$

2

(a) Determinare per quali valori di k il sistema Σ ammette la soluzione $(1, 0, 2)$.

$$k = 1$$

Motivazione:

Sostituendo in Σ i valori $(1, 0, 2)$ a (x, y, z) rispettivamente, otteniamo $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ k + 4 = 5. \\ 2 + 6 = 8 \end{cases}$

Si ha quindi $k = 1$.

2

(b) Considerato il sistema omogeneo Σ' associato a Σ , determinare per quali valori di k lo spazio vettoriale delle soluzioni di Σ' ha dimensione uguale a 1.

$$k = 1 \text{ e } k = -\frac{3}{2}.$$

Motivazione:

$\dim \text{Sol}(\Sigma') = 3 - \text{rk}(A)$ dove A è la matrice associata a Σ' (e a Σ).

Abbiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k & -1 & 2 \\ 2 & k & 3 \end{pmatrix}$. Il minore di A formato dalla prima e dalla terza riga e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile. Quindi $\text{rk } A \geq 2$. Svolgendo i calcoli si osserva che $\det A = 0$ se e solo se $k = 1$ e $k = -\frac{3}{2}$.

Segue che per k uguale a questi due valori si ha $\text{rk } A = 2$ e quindi $\dim \text{Sol}(\Sigma') = 1$. Per k diverso da questi due valori si ha $\text{rk } A = 3$ e quindi $\dim \text{Sol}(\Sigma') = 0$.

3

(c) Determinare per quali valori di k il sistema Σ ha soluzioni.

$$k \neq -\frac{3}{2}.$$

Motivazione:

Abbiamo già calcolato il rango della matrice A associata al sistema Σ . Abbiamo che per k diverso da 1 e da $-\frac{3}{2}$, si ha $\text{rk } A = 3$ e quindi il sistema ha una sola soluzione. Per $k = 1$, la matrice A' completa associata al sistema Σ è $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. La terza riga di A' è uguale alla somma della prima e della seconda riga di A' e quindi $\text{rk } A' = 2 = \text{rk } A$. Il sistema Σ ha quindi soluzioni.

Per $k = -\frac{3}{2}$ la matrice A' è uguale a $A' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Il suo minore formato dalla prima, terza e quarta colonna è invertibile. Quindi $\text{rk } A' = 3 \neq 2 = \text{rk } A$. Il sistema Σ non ha quindi soluzioni.

Riassumendo il sistema Σ ha soluzioni per $k \neq -\frac{3}{2}$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + (2a_0 + a_1 + 2a_2)x$.

2

(a) Determinare una base per l'immagine di f .

$$\mathbf{v}_1 = 1 + 2x, \mathbf{v}_2 = 2 + x$$

Motivazione:

Sia $\mathbf{e}_1 := 1, \mathbf{e}_2 := x, \mathbf{e}_3 := x^2$ la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

La matrice associata all'endomorfismo f relativamente ad essa è $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si ha chiaramente $\det A = 0$. Inoltre il minore di A formato dalle prime due righe e colonne è invertibile.

Segue $\text{rk } A = 2$ e che i vettori $\mathbf{v}_1 = 1 + 2x, \mathbf{v}_2 = 2 + x$ (le cui coordinate, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$, sono le prime due colonne di A) formano una base dell'immagine di f .

2

(b) Determinare una base del nucleo di f .

$$\mathbf{w} := 2x - x^2$$

Motivazione:

Abbiamo $\dim \ker f = 3 - \dim f(\mathbb{R}^3[x]) = 3 - 2 = 1$. Per determinare una base di $\ker f$, cerchiamo quindi un vettore non nullo appartenente a $\ker f$. Dal momento che nella matrice A la terza colonna è il doppio della seconda, abbiamo $f(\mathbf{e}_3) = 2f(\mathbf{e}_2)$.

Quindi $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = 2x - x^2$ è una base di $\ker f$.

3

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Nel caso in cui tali matrici non esistano, spiegare perché ciò avviene.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Abbiamo $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 4 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x((1-x)^2 - 4) = -x(x-3)(x+1)$.

Gli autovalori sono quindi 0, 3 e -1, ognuno di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) uguale a 1. L'endomorfismo f è quindi diagonalizzabile.

Cerchiamo una base per ogni autospazio.

Abbiamo già determinato in (b) una base per l'autospazio $E(0) = \ker f$ relativo all'autovalore 0.

Cerchiamo ora una base per l'autospazio relativo a 3. Risolvendo il sistema

$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 4 \\ 2 & 1-3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ otteniamo come soluzioni $a = k, b = k, c = 0$. Ponendo

$k = 1$ otteniamo che il vettore $1 + x$ è una base di $E(3)$.

Svolgendo calcoli analoghi si trova che il vettore $1 - x$ è una base di $E(-1)$.

Abbiamo pertanto $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (11, 13), B := (14, 17)$.

3

(a) Determinare almeno una coppia di punti C e D in modo tale $ABCD$ sia un quadrato.

$$C = (18, 14), D = (15, 10).$$

Motivazione:

Il vertice D deve appartenere alla retta s passante per A e perpendicolare alla retta r passante per A e B . Poiché i parametri direttori della retta r sono $(14 - 11, 17 - 13) = (3, 4)$, i parametri direttori di s sono $(4, -3)$. Le equazioni parametriche di s sono quindi $\begin{cases} x = 11 + 4t \\ y = 13 - 3t \end{cases}$. Il punto D deve essere un punto di s tale che $d(D, A) = d(A, B)$. Abbiamo $d(A, B) = \sqrt{(14 - 11)^2 + (17 - 13)^2} = 5$. Prendiamo allora un punto generico di s e imponiamo che la sua distanza da A sia uguale a 5. Abbiamo: $(11 + 4t - 11)^2 + (13 - 3t - 13)^2 = 25$. Da cui segue $t = \pm 1$. Scelto $t = 1$, otteniamo $D = (15, 10)$. Il punto C è il simmetrico di A rispetto al punto medio M di B e D . Abbiamo $M = (\frac{29}{2}, \frac{27}{2})$ e quindi $C = (18, 14)$. Se avessimo scelto $t = -1$ avremmo ottenuto un'altra coppia di punti C e D . Esistono quindi due quadrati di lato AB .

2

(b) Determinare l'equazione della circonferenza \mathcal{C} circoscritta al quadrato $ABCD$.

$$(x - \frac{29}{2})^2 + (y - \frac{27}{2})^2 = \frac{25}{2}$$

Motivazione:

La circonferenza \mathcal{C} ha il centro coincidente con il centro M del quadrato $ABCD$. Dal momento che la lunghezza dei lati del quadrato è uguale a 5, il raggio della circonferenza \mathcal{C} è uguale a $5\frac{\sqrt{2}}{2}$. E quindi l'equazione della circonferenza \mathcal{C} è $(x - \frac{29}{2})^2 + (y - \frac{27}{2})^2 = \frac{25}{2}$.

2

(c) Determinare l'area della porzione di piano data dai punti che sono interni alla circonferenza \mathcal{C} e esterni al quadrato $ABCD$.

$$\frac{25}{2}\pi - 25$$

Motivazione:

Abbiamo visto che il quadrato del raggio della circonferenza \mathcal{C} è uguale a $\frac{25}{2}$ e quindi l'area della porzione di piano data dai punti interni alla circonferenza \mathcal{C} è uguale a $\frac{25}{2}\pi$. A questa dobbiamo sottrarre l'area del quadrato $ABCD$ che è uguale a 25 poiché la lunghezza dei lati del quadrato è uguale a 5. Otteniamo quindi $\frac{25}{2}\pi - 25$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $C := (1, 2, -1)$ e il piano α di equazione $x + 2y - z - 9 = 0$.

- 2 (a) Determinare un'equazione della sfera Σ di centro C , passante per l'origine O del sistema di riferimento.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$$

Motivazione:

La sfera di centro C e raggio r ha equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = r^2$.
Dal momento che la sfera cercata deve passare per O , il suo raggio r deve essere uguale alla distanza di C da O . Abbiamo quindi $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.
La sfera Σ ha perciò equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$.

- 2 (b) Determinare un'equazione del piano π tangente alla sfera Σ nel punto P , simmetrico di O rispetto al centro di Σ .

$$x + 2y - z - 12 = 0$$

Motivazione:

Si ha chiaramente $P = (2, 4, -2)$ e quindi il generico piano passante per P ha equazione $a(x - 2) + b(y - 4) + c(z + 2) = 0$, dove il vettore (a, b, c) è perpendicolare al piano.
Il piano π , deve essere perpendicolare alla retta s passante per C e P .
I parametri direttori di s sono $(2 - 1, 4 - 2, -2 + 1) = (1, 2, -1)$ e quindi possiamo porre $a = 1, b = 2, c = -1$.
Il piano π ha pertanto equazione $1(x - 2) + 2(y - 4) - (z + 2) = 0$, da cui $\pi : x + 2y - z - 12 = 0$.

- 3 (c) Determinare il raggio della circonferenza γ intersezione della sfera Σ con il piano α .

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Motivazione:

Chiamato r' il raggio della circonferenza γ , per il teorema di Pitagora abbiamo $r'^2 = r^2 - d(\alpha, C)^2$, dove r è il raggio della sfera Σ . Abbiamo

$$d(\alpha, C) = \frac{|1 + 4 + 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Da ciò segue: $r'^2 = 6 - \frac{9}{6} = \frac{9}{2}$ e quindi $r' = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.