COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 (a) *Date comunque due matrici $A$ e $B$ di ordine $n$ si ha* $\operatorname{rk}(A+B) \geq \operatorname{rk} A$ , $\operatorname{rk}(A+B) \geq \operatorname{rk} B$.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio.
Sia $A$ una qualsiasi matrice invertibile di ordine 2 e sia $B = -A$. Si ha $A + B = 0$ e quindi $\operatorname{rk}(A+B) = 0$ mentre $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 2$.

2 (b) *Date comunque due matrici $A$ e $B$ di ordine $n$ si ha* $\operatorname{rk}(A \cdot B) \geq \operatorname{rk} A$ , $\operatorname{rk}(A \cdot B) \geq \operatorname{rk} B$.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Diamo un controesempio.
Siano $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1$ e, poiché $A \cdot B = 0$, si ha $\operatorname{rk}(A \cdot B) = 0$.

2. Siano dati $A := (1, 2, 5, 4)$, $B := (3, 5, 7, 9)$ , $C := (7, 11, 11, 19)$ di $\mathbb{R}^4$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine $\pi$ di $A, B, C$ e scrivere tutti i punti di $\pi$ usando il minimo di parametri possibile.

$\dim \pi = 1$ , $\pi = \{(1 + 2t, 2 + 3t, 5 + 2t, 4 + 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

La matrice: $M := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ avente come colonne le coordinate di $B - A, C - A$ ha rango uguale a 1 dal momento che $M \neq 0$ e la seconda colonna è multipla della prima colonna. Segue $\dim \pi = 1$. Abbiamo pertanto $\pi = A + t(B - A)$.
Quindi $\pi = \{(1 + 2t, 2 + 3t, 5 + 2t, 4 + 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $V$ generato da $A, B, C$ e scrivere tutti i punti di $V$ usando il minimo di parametri possibile.

$\dim V = 2$ , $V = \{(t + 3t', 2t + 5t', 5t + 7t', 4t + 9t') \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}\}$.

Motivazione:

Abbiamo $\dim V = \operatorname{rk} N$, dove $N$ è la matrice avente come colonne le coordinate di $A, B, C$
$N := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 11 \\ 5 & 7 & 11 \\ 4 & 9 & 19 \end{pmatrix}$
Sottraendo la prima colonna alla seconda e alla terza colonna di $N$, otteniamo la matrice $N'$ avente lo stesso rango di $N$.
$N' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 15 \end{pmatrix}$.
La seconda e la terza colonna di $N'$ coincidono con le due colonne di $M$. Sono quindi linearmente dipendenti. Quindi $\operatorname{rk} N' \leq 2$.
Il minore di $N'$ formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è invertibile, quindi $\dim V = \operatorname{rk} N = \operatorname{rk} N' = 2$.
I vettori $A$ e $B$ sono quindi linearmente indipendenti e $C$ è combinazione lineare di $A$ e $B$.
Segue che si ha $V = \{(t + 3t', 2t + 5t', 5t + 7t', 4t + 9t') \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $S(2;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 e sia $\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{w}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ una sua base. Data, al variare del parametro $k$, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & -2 & k-2 \end{pmatrix}$, sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow S(2,\mathbb{R})$ l'omomorfismo associato alla matrice $A$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ di $S(2,\mathbb{R})$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare tutti valori del parametro $k$ per i quali l'omomorfismo $f$ NON è un isomorfismo.

$k = 2$ , $k = 3$

Motivazione:

L'omomorfismo $f$ non è un isomorfismo per tutti valori di $k$ per i quali la matrice $A$ ha determinante nullo. Si ha $\det A = k^2 - 5k + 6$ che si annulla per $k = 2$ e $k = 3$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Posto $k = 2$, determinare una base del nucleo di $f$.

$\mathbf{v} := (2, 1, -1)$

Motivazione:

Determiniamo i vettori del nucleo risolvendo il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha il sistema $\begin{cases} a + 2c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a - 2b &= 0 \end{cases}$ che ha come soluzioni $(2b, b, -b)$ .
Una base del nucleo è quindi il vettore $\mathbf{v} := (2, 1, -1)$.

| 3 | |
|---|---|

(c) Posto $k = 2$ e data la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare $f^{-1}(B)$.

$f^{-1}(B) = \{(2b, b, 1 - b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Sappiamo che $f^{-1}(B) = \mathbf{v}_0 + \ker f$, dove $f(\mathbf{v}_0) = B$. Osserviamo che le coordinate di $B$ relativamente alla base scelta in $S(2,\mathbb{R})$ sono $(2, 1, 0)$. Osservando la matrice $A$ nel caso di $k = 2$, notiamo che la terza colonna di $A$ coincide con le coordinate di $B$ e quindi $f(0, 0, 1) = B$. Possiamo quindi scegliere $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 1)$. Dal momento che sappiamo che $\ker f = \{(2b, b, -b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, abbiamo
$f^{-1}(B) = \mathbf{v}_0 + \ker f = \{(0, 0, 1) + (2b, b, -b) = (2b, b, 1 - b) \mid b \in \mathbb{R}\}$.

4. Al variare del parametro reale $k$, si consideri l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$.

3

(a) Determinare, per ogni valore di $k$ , gli autovalori di $f$ e una base per ciascun autospazio di $f$.

$\lambda_1 = -1$; base di $E(-1)$: $\mathbf{v}_1 := (1, 0, -1)$ per ogni valore di $k$.
$\lambda_2 = 3$; base di $E(3)$: $\mathbf{v}_2 : (1, 0, 1)$ , $\mathbf{v}_3 := (0, 1, 0)$ se $k = 0$ ; $\mathbf{v}_2 : (1, 0, 1)$ se $k \neq 0$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di $A$ è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 2 & k & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(3-x) - 4(3-x)$, che si annulla per $x = -1$ e $x = 3$.
Per calcolare l'autospazio $E(-1)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A + I$, cioè

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x + ky + 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(t, 0, -t)$ con $t$ parametro reale. Una base di $E(-1)$ si ottiene ponendo $t = 1$.
Per calcolare l'autospazio $E(3)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 3I$, cioè

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x + ky - 2z = 0 \end{cases}$$

Per il calcolo delle soluzioni distinguiamo due casi:
1) se $k = 0$, le soluzioni sono $(t, t', t)$ con $t$ e $t$ parametri reali; una base di $E(3)$ si ottiene ponendo prima $t = 1$ e $t' = 0$ e poi $t = 0$ e $t' = 1$;
2) se $k \neq 0$, le soluzioni sono $(t, 0, t)$; una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $t = 1$.

2

(b) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali esiste una matrice diagonale $D$ e una matrice invertibile $M$ tali che $D = M^{-1}AM$ e, per ognuno di essi, determinare sia $D$ che $M$.

Esistono $D$ e $M$ se e solo se $k = 0$. In tal caso si ha:
$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2

(c) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali esiste una matrice diagonale $D$ e una matrice ortogonale $M$ tali che $D = M^{-1}AM$ e, per ognuno di essi, determinare sia $D$ che $M$.

Esistono $D$ e $M$ se e solo se $k = 0$. In tal caso si ha:
$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se la matrice è simmetrica. Pertanto $k = 0$. Abbiamo già determinato nella risposta precedente una base per ogni autospazio. Dobbiamo sostituire le basi dei due autospazi con basi ortonormali.
La base che abbiamo trovato in (b) di $E(-1)$ è ovviamente già ortogonale perché è formata da un solo vettore. Otteniamo una base ortonormale dividendo il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$ per la sua norma. Abbiamo quindi: $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Per $E(3)$ abbiamo trovato la base $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$. Abbiamo $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 0$. La base è quindi già ortogonale.
Dividendo i due vettori per la loro norma otteniamo la base ortonormale
$\mathbf{u}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine, siano dati i punti $A := (3, 4)$, $B = (7, 10)$, $C = (1, 2)$. Sia $r$ la retta passante per $A$ e $B$.

2 (a) Determinare la retta $r'$ simmetrica della retta $r$ rispetto a $C$.

$$r' : \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -6t \end{cases}$$

Motivazione:

La retta $r'$ passa per i punti $A_1$ e $B_1$ simmetrici dei punti $A$ e $B$ rispetto al punto $C$. Posto $A_1 := (x, y)$, imponendo che il punto medio di $A$ e $A_1$ sia $C$, otteniamo $\begin{cases} \frac{3+x}{2} = 1 \\ \frac{4+y}{2} = 2 \end{cases}$. Da cui segue $x = -1$ , $y = 0$ e quindi $A_1 = (-1, 0)$. Analogamente otteniamo $B_1 = (-5, -6)$. Quindi $r' : \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -6t \end{cases}$

2 (b) Dati i punti $A'$ e $B'$ simmetrici dei punti $A$ e $B$ rispetto a $C$, dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione: *il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma.*

L'affermazione è vera.

Motivazione:

I punti $A'$ e $B'$ coincidono con i punti $A_1$ e $B_1$ ottenuti nella risposta precedente.
La retta $r$ passante per $A$ e $B$ ha parametri direttori $(3 - 7, 4 - 10) = (-4, -6)$.
La retta $r'$ passante per $A'$ e $B'$ ha parametri direttori $(-4, -6)$.
Poiché i parametri direttori sono linearmente dipendenti, le due rette sono parallele.
La retta $r$ passante per $A'$ e $B$ ha parametri direttori $(-1 - 7, 0 - 10) = (-8, -10)$.
La retta $r'$ passante per $A$ e $B'$ ha parametri direttori $(3 + 5, 4 + 6) = (8, 10)$.
Poiché i parametri direttori sono linearmente dipendenti, le due rette sono parallele.
E quindi il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma.

3 (c) Dato il punto $P := (-3, -3)$, determinare i punti $Q$ e $Q'$ tali che i quadrilateri $ABPQ$ e $ABQ'P$ siano parallelogrammi. Verificare se i punti $P, Q$ e $Q'$ sono allineati.

$Q = (-7, -9)$, $Q' = (1, 3)$. I tre punti sono allineati.

Motivazione:

Il quadrilatero $ABPQ$ è un parallelogramma se e solo se il punto $Q$ è simmetrico di $B$ rispetto al punto medio $M$ di $AP$. Si ha $M = (0, \frac{1}{2})$ e $Q = (-7, -9)$.
Analogamente il quadrilatero $ABQ'P$ è un parallelogramma si ottiene $Q' = (1, 3)$.
Poiché risulta $\begin{vmatrix} -7+3 & 1+3 \\ -9+3 & 3+3 \end{vmatrix} = 0$, i tre punti sono allineati.

6. Sia fissato nello spazio tridimensionale un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le rette
$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 4-t \end{cases}.$$

| 2 | |

(a) Determinare due piani $\pi$ e $\pi'$ che siano paralleli e tali che $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

$\pi : x + 2y + 3z - 3 = 0 \qquad \pi' : x + 2y + 3z - 17 = 0$

Motivazione:

La retta $r$ ha parametri direttori $(1, 1, -1)$.
La retta $r'$ ha parametri direttori $(-1, 2, -1)$.
Consideriamo il punto $A := (1, 1, 0) \in r$. Il piano $\pi$ passante per $A$ e parallelo alle rette $r$ e $r'$ ha equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Cioè $x + 2y + 3z - 3 = 0$.
Consideriamo il punto $A' := (1, 2, 4) \in r'$. Il piano $\pi'$ passante per $A'$ e parallelo alle rette $r$ e $r'$ ha equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Cioè $x + 2y + 3z - 17 = 0$.

| 3 | |

(b) Determinare la retta $s$ perpendicolare e incidente le rette $r$ e $r'$.

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1+3t \end{cases}$$

Motivazione:

Il punto generico della retta $r$ è $P := (1 + t, 1 + t, -t)$.
Il punto generico della retta $r'$ è $P' := (1 - t', 2 + 2t', 4 - t')$.
La retta passante per $P$ e $P'$ ha parametri direttori $(-t - t', 1 - t + 2t', 4 + t - t')$.
Imponendo l'ortogonalità della retta passante per $P$ e $P'$ con la retta $r$ e la retta $r'$ otteniamo il sistema: $\begin{cases} -3t + 2t' - 3 = 0 \\ -2t + 6t' - 2 = 0 \end{cases}$ che ha come soluzioni $t = -1, t' = 0$.
Pertanto i punti di intersezione della retta $s$ cercata con le rette $r$ e $r'$ sono rispettivamente $R := (0, 0, 1)$ e $R' := (1, 2, 4)$. La retta passante per essi è quindi la retta $s$ cercata. Ha equazioni: $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

| 2 | |

(c) Calcolare la distanza tra le rette $r$ e $r'$.

$\sqrt{14}$

Motivazione:

Abbiamo $\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(R, R') = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$.