COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente i vettori $\mathbf{u} := (1,2,3)$ e $\mathbf{v} := (1,1,2)$ come autovettori entrambi con autovalore uguale a 4 rispettivamente.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2 (a) *Il vettore* $\mathbf{w} := (3,6,9)$ *è un autovettore di* f.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Notiamo che $\mathbf{w} = 3\mathbf{u}$. Per ipotesi si ha $f(\mathbf{u}) = 4\mathbf{u}$ e quindi $f(\mathbf{w}) = f(3\mathbf{u}) = 3f(\mathbf{u}) = 3\cdot 4\mathbf{u} = 4\cdot 3\mathbf{u} = 4\mathbf{w}$. E quindi $\mathbf{w}$ è autovettore di f con autovalore 4.

2 (b) *Il vettore* $\mathbf{w}' := (2,3,5)$ *è autovettore di* f.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Notiamo che $\mathbf{w}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Per ipotesi si ha $f(\mathbf{u}) = 4\mathbf{u}$ e $f(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$ e quindi
$f(\mathbf{w}') = f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = 4\mathbf{u} + 4\mathbf{w} = 4(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 4\mathbf{w}'$. E quindi $\mathbf{w}'$ è autovettore di f con autovalore 4.

2. Dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (1,2,3,4), B := (3,5,7,9), C := (4, \frac{13}{2}, 9, \frac{23}{2})$ e $D := (1,1,1,1)$.

2	

(a) Il punto C appartiene al segmento di estremi A e B?

No.

Motivazione:

I punti del segmento di estremi A e B sono tutti e soli i punti di coordinate $\begin{cases} x_1 &= 1+2t \\ x_2 &= 2+3t \\ x_3 &= 3+4t \\ x_4 &= 4+5t \end{cases}$ con $0 \leq t \leq 1$.

Inserendo in queste equazioni le coordinate del punto C otteniamo il sistema:
$\begin{cases} 4 &= 1+2t \\ \frac{13}{2} &= 2+3t \\ 9 &= 3+4t \\ \frac{23}{2} &= 4+5t \end{cases}$, che ha come soluzione $t = \frac{3}{2}$. Il punto C appartiene quindi alla retta passante per A e B, ma, dal momento che $\frac{3}{2} > 1$, il punto C non appartiene al segmento di estremi A e B.

2	

(b) Determinare la dimensione dell'inviluppo convesso dei punti A, B e D e determinarne le sue equazioni parametriche.

La dimensione è uguale a 2. Le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x_1 &= 1+2t_1 \\ x_2 &= 2+3t_1-t_2 \\ x_3 &= 3+4t_1-2t_2 \\ x_4 &= 4+5t_1-3t_2 \end{cases}$$

Motivazione:

I vettori $B-A = (2,3,4,5)$ e $D-A = (0,-1,-2,-3)$ sono linearmente indipendenti e quindi l'inviluppo convesso ha dimensione 2.

La sua equazione vettoriale è $P = A+(B-A)t_1+(D-A)t_2$, da cui abbiamo le sue equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 &= 1+2t_1 \\ x_2 &= 2+3t_1-t_2 \\ x_3 &= 3+4t_1-2t_2 \\ x_4 &= 4+5t_1-3t_2 \end{cases}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2x - 3y + (k^2 + 2k)z = 4 - k^2\}$$

2	

(a) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

Per ogni k

Motivazione:

Il sottoinsieme E_k è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y e z, qualunque sia k. Sappiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è sempre un sottospazio affine.

2	

(b) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 2$ e $k = -2$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $4 - k^2 = 0$.
E quindi $k = 2$ e $k = -2$.

Scegliere uno dei valori di k determinati al punto b e utilizzarlo nel resto dell'esercizio

Valore di k scelto: $k = 2$

3	

(c) Determinare una base per un sottospazio F supplementare di E_k in $\mathbb{R}^3$.

$(1, 0, 0)$

Motivazione:

Dal momento che E_k è definito dall'unica equazione $2x - 3y + 8z = 0$, E_k ha dimensione $3 - 1 = 2$. Un sottospazio F ad esso supplementare in $\mathbb{R}^3$ deve avere dimensione uguale a $3 - 2 = 1$. Dobbiamo quindi trovare un singolo vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ abbia intersezione con E_k ridotta al vettore nullo. Basta allora scegliere un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene a E_k. Se $\mathbf{v} := (x_1, y_1, z_1)$ deve essere $2x_1 - 3y_1 + 8z_1 \neq 0$. Si può scegliere, ad esempio, $x_1 = 1$, $y_1 = z_1 = 0$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(p(x)) := 2p(x) - 3p'(x)$ (si ricorda che la derivata del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ è $p'(x) = b + 2cx$).

2

(a) Determinare la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ (cioè la base formata da 1, x e x^2 in quest'ordine).

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Calcoliamo l'immagine tramite f dei vettori della base canonica e decomponiamo i vettori così ottenuti rispetto alla base canonica stessa. Si ha $f(1) = 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla prima colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(2, 0, 0)$. Si ha poi $f(x) = 2x - 3 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla seconda colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(-3, 2, 0)$. Infine $f(x^2) = 2x^2 - 3 \cdot 2x = 2x^2 - 6x = 0 \cdot 1 - 6 \cdot x + 2 \cdot x^2$: sulla terza colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(0, -6, 2)$.

3

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f.
Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
2	1

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 0 \\ 0 & 2-x & -6 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^3$, che si annulla se e solo $x = 2$.
Per trovare i polinomi del tipo $a + bx + cx^2$ che sono autovettori di f relativamente all'autovalore 2, risolviamo il sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b e c associato alla matrice $A - 2I$, cioè

$$\begin{cases} -3b = 0 \\ -6c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(a, 0, 0)$ con a parametro reale. Una base di $E(2)$ si ottiene ponendo $a = 1$ ed ottenendo così il polinomio 1.

2

(c) L'endomorfismo è diagonalizzabile? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

L'unico autospazio di f ha dimensione 1. La somma delle dimensioni degli autospazi di f è, dunque, minore della dimensione di $\mathbb{R}^3[x]$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (5, -9)$ e la circonferenza $\gamma : x^2 + (y-6)^2 = 50$. Siano r e s le rette passanti per P e tangenti a γ e siano R e S i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e γ.

| 2 | |

(a) Le rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$r : x + y + 4 = 0 \qquad s : 7x - y - 44 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La circonferenza γ ha centro $C := (0, 6)$ e raggio $5\sqrt{2}$. La generica retta passante per P ha equazione $a(x-5) + b(y+9) = 0$. Imponendo che la distanza di questa retta generica da C sia uguale al raggio di γ troviamo la condizione:

$$\frac{|a(0-5) + b(6+9)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5\sqrt{2}$$

equivalente a $a^2 + 6ab - 7b^2 = 0$ le cui soluzioni sono $a = b$ e $a = -7b$, da cui troviamo le equazioni cercate.

| 2 | |

(b) Detto C il centro di γ, i triangoli CPR e CPS hanno la stessa area. Calcolare l'area di uno dei due.

$\boxed{50}$

Motivazione:

Il triangolo CPR è rettangolo in R. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale alla distanza tra C e P, cioè $\sqrt{(5-0)^2 + (-9-6)^2} = \sqrt{250}$. Il cateto CR ha lunghezza uguale al raggio di γ, cioè $\sqrt{50}$. Per il teorema di Pitagora il cateto PR ha lunghezza

$$\sqrt{\left(\sqrt{250}\right)^2 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{200}.$$

L'area del triangolo è allora uguale a $\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{200}}{2} = 50$.

| 3 | |

(c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$3x + y - 6 = 0 \qquad x - 3y - 32 = 0$

Motivazione:

Il centro della circonferenza γ è equidistante dalle rette r e s. Una delle due bisettrici è, quindi, la congiungente il punto P con il centro della circonferenza. La sua equazione può allora scriversi come

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-6 \\ 5-0 & -9-6 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata e semplificata, dà l'equazione $3x + y - 6 = 0$. Poiché le due bisettrici sono ortogonali tra loro, consideriamo la generica retta ortogonale alla retta trovata $x - 3y + h = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $5 - 3(-9) + h = 0$ da cui otteniamo $h = -32$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (4, 5, 2)$ e la retta $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

3	

(a) Determinare la distanza tra il punto A e la retta r.

$\sqrt{5}$

Motivazione:

La distanza $\mathrm{d}(A, r)$ è uguale alla distanza tra il punto A e il punto H di intersezione della retta r con il piano α passante per A e perpendicolare alla retta r.
Il piano α ha equazione $3(x-4) + 2(y-5) + z - 2 = 0$, cioè $3x + 2y + z - 24 = 0$.
Inserendo in questa equazione le coordinate del punto generico di r otteniamo:
$3(1+3t) + 2(2+2t) + 3 + t - 24 = 0$, cioè $14t - 14 = 0$, da cui $t = 1$. E quindi $H = (4, 4, 4)$.
Abbiamo allora $\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \sqrt{5}$.

2	

(b) Dato il punto $B := (1, 2, 4)$, determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per B e contenente la retta r.

$\pi : 2x - 3y + 4 = 0$

Motivazione:

Consideriamo i punti $P_0 := (1, 2, 3)$ e $P_1 := (4, 4, 4)$ di r, ottenuti ponendo t uguale a 0 e a 1, rispettivamente, nelle equazioni della retta r. Il piano π cercato è il piano passante per P_0, P_1 e B. Esso ha quindi equazione $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, da cui segue $\pi : 2x - 3y + 4 = 0$.

2	

(c) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π.

$\frac{3}{\sqrt{13}}$

Motivazione:

La distanza cercata è uguale a:

$$\mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{4 + 9 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ avente i vettori $\mathbf{u} := (1, 2, 3, 4)$ e $\mathbf{v} := (1, 1, 2, 2)$ come autovettori entrambi con autovalore uguale a 5.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2 (a) *Il vettore* $\mathbf{w} := (4, 8, 12, 16)$ *è un autovettore di* f.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Notiamo che $\mathbf{w} = 4\mathbf{u}$. Per ipotesi si ha $f(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}$ e quindi $f(\mathbf{w}) = f(4\mathbf{u}) = 4f(\mathbf{u}) = 4\cdot 5\mathbf{u} = 5 \cdot 4\mathbf{u} = 5\mathbf{w}$. E quindi $\mathbf{w}$ è autovettore di f con autovalore 5.

2 (b) *Il vettore* $\mathbf{w}' := (2, 3, 5, 6)$ *è autovettore di* f.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Notiamo che $\mathbf{w}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Per ipotesi si ha $f(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}$ e $f(\mathbf{v}) = 5\mathbf{v}$ e quindi
$f(\mathbf{w}') = f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = 5\mathbf{u} + 5\mathbf{w} = 5(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 5\mathbf{w}'$. E quindi $\mathbf{w}'$ è autovettore di f con autovalore 5.

2. Dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (4,3,2,1), B := (9,7,5,3), C := (\frac{23}{2}, 9, \frac{13}{2}, 4)$ e $D := (1,1,1,1)$.

2

(a) Il punto C appartiene al segmento di estremi A e B?

No.

Motivazione:

I punti del segmento di estremi A e B sono tutti e soli i punti di coordinate $\begin{cases} x_1 &= 4+5t \\ x_2 &= 3+4t \\ x_3 &= 2+3t \\ x_4 &= 1+2t \end{cases}$ con $0 \le t \le 1$.

Inserendo in queste equazioni le coordinate del punto C otteniamo il sistema:
$\begin{cases} \frac{23}{2} &= 4+5t \\ 9 &= 3+4t \\ \frac{13}{2} &= 2+3t \\ 4 &= 1+2t \end{cases}$, che ha come soluzione $t = \frac{3}{2}$. Il punto C appartiene quindi alla retta passante per A e B, ma, dal momento che $\frac{3}{2} > 1$, il punto C non appartiene al segmento di estremi A e B.

2

(b) Determinare la dimensione dell'inviluppo convesso dei punti A, B e D e determinarne le sue equazioni parametriche.

La dimensione è uguale a 2. Le equazioni parametriche sono:
$$\begin{cases} x_1 &= 4+5t_1-3t_2 \\ x_2 &= 3+4t_1-2t_2 \\ x_3 &= 2+3t_1-t_2 \\ x_4 &= 1+2t_1 \end{cases}$$

Motivazione:

I vettori $B-A = (5,4,3,2)$ e $D-A = (-3,-2,-1,0)$ sono linearmente indipendenti e quindi l'inviluppo convesso ha dimensione 2.
La sua equazione vettoriale è $P = A+(B-A)t_1+(D-A)t_2$, da cui abbiamo le sue equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 &= 4+5t_1-3t_2 \\ x_2 &= 3+4t_1-2t_2 \\ x_3 &= 2+3t_1-t_2 \\ x_4 &= 1+2t_1 \end{cases}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$:

$$E_k := \left\{(x, y, z) \mid (3k + k^2)x - 3y + z = 9 - k^2\right\}$$

2	

(a) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

Per ogni k

Motivazione:

Il sottoinsieme E_k è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y e z, qualunque sia k. Sappiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è sempre un sottospazio affine.

2	

(b) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 3$ e $k = -3$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $9 - k^2 = 0$.
E quindi $k = 3$ e $k = -3$.

Scegliere uno dei valori di k determinati al punto b e utilizzarlo nel resto dell'esercizio

Valore di k scelto: $k = 3$

3	

(c) Determinare una base per un sottospazio F supplementare di E_k in $\mathbb{R}^3$.

$(1, 0, 0)$

Motivazione:

Dal momento che E_k è definito dall'unica equazione $18x - 3y + z = 0$, E_k ha dimensione $3 - 1 = 2$. Un sottospazio F ad esso supplementare in $\mathbb{R}^3$ deve avere dimensione uguale a $3 - 2 = 1$. Dobbiamo quindi trovare un singolo vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ abbia intersezione con E_k ridotta al vettore nullo. Basta allora scegliere un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene a E_k. Se $\mathbf{v} := (x_1, y_1, z_1)$ deve essere $18x_1 - 3y_1 + z_1 \neq 0$. Si può scegliere, ad esempio, $x_1 = 1$, $y_1 = z_1 = 0$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(p(x)) := 3p(x) + 2p'(x)$ (si ricorda che la derivata del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ è $p'(x) = b + 2cx$).

2	

(a) Determinare la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ (cioè la base formata da 1, x e x^2 in quest'ordine).

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Calcoliamo l'immagine tramite f dei vettori della base canonica e decomponiamo i vettori così ottenuti rispetto alla base canonica stessa. Si ha $f(1) = 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla prima colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(3, 0, 0)$. Si ha poi $f(x) = 3x + 2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot x + 0 \cdot x^2$: sulla seconda colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(2, 3, 0)$. Infine $f(x^2) = 3x^2 + 2 \cdot 2x = 3x^2 + 4x = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x + 3 \cdot x^2$: sulla terza colonna della matrice scriviamo allora i coefficienti $(0, 4, 3)$.

3	

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f.
Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
3	1

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ 0 & 3-x & 4 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^3$, che si annulla se e solo $x = 3$.
Per trovare i polinomi del tipo $a + bx + cx^2$ che sono autovettori di f relativamente all'autovalore 3, risolviamo il sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b e c associato alla matrice $A - 3I$, cioè

$$\begin{cases} 2b = 0 \\ 4c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(a, 0, 0)$ con a parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $a = 1$ ed ottenendo così il polinomio 1.

2	

(c) L'endomorfismo è diagonalizzabile? ☐ Sì ☒ No
Motivazione:

L'unico autospazio di f ha dimensione 1. La somma delle dimensioni degli autospazi di f è, dunque, minore della dimensione di $\mathbb{R}^3[x]$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (-10, 5)$ e la circonferenza $\gamma : (x-5)^2 + y^2 = 50$. Siano r e s le rette passanti per P e tangenti a γ e siano R e S i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e γ.

2	

(a) Le rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$r : x + y + 5 = 0 \qquad s : x - 7y + 45 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La circonferenza γ ha centro $C := (5, 0)$ e raggio $5\sqrt{2}$. La generica retta passante per P ha equazione $a(x + 10) + b(y - 5) = 0$. Imponendo che la distanza di questa retta generica da C sia uguale al raggio di γ troviamo la condizione:

$$\frac{|a(5+10) + b(0-5)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5\sqrt{2}$$

equivalente a $7a^2 - 6ab - b^2 = 0$ le cui soluzioni sono $b = a$ e $b = -7a$, da cui troviamo le equazioni cercate.

2	

(b) Detto C il centro di γ, i triangoli CPR e CPS hanno la stessa area. Calcolare l'area di uno dei due.

$\boxed{50}$

Motivazione:

Il triangolo CPR è rettangolo in R. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale alla distanza tra C e P, cioè $\sqrt{(-10-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{250}$. Il cateto CR ha lunghezza uguale al raggio di γ, cioè $\sqrt{50}$. Per il teorema di Pitagora il cateto PR ha lunghezza

$$\sqrt{\left(\sqrt{250}\right)^2 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{200}.$$

L'area del triangolo è allora uguale a $\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{200}}{2} = 50$.

3	

(c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$x + 3y - 5 = 0 \qquad 3x - y + 35 = 0$

Motivazione:

Il centro della circonferenza γ è equidistante dalle rette r e s. Una delle due bisettrici è, quindi, la congiungente il punto P con il centro della circonferenza. La sua equazione può allora scriversi come

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-0 \\ -10-5 & 5-0 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata e semplificata, dà l'equazione $x - 3y - 5 = 0$. Poiché le due bisettrici sono ortogonali tra loro, consideriamo la generica retta ortogonale alla retta trovata $3x-y+h = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $3(-10) - 5 + h = 0$ da cui otteniamo $h = 35$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2, 5, 4)$ e la retta $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

3	

(a) Determinare la distanza tra il punto A e la retta r.

$\sqrt{5}$

Motivazione:

La distanza $\mathrm{d}(A, r)$ è uguale alla distanza tra il punto A e il punto H di intersezione della retta r con il piano α passante per A e perpendicolare alla retta r.
Il piano α ha equazione $x - 2 + 2(y - 5) + 3(z - 4) = 0$, cioè $x + 2y + 3z - 24 = 0$.
Inserendo in questa equazione le coordinate del punto generico di r otteniamo:
$3 + t + 2(2 + 2t) + 3(1 + 3t) - 24 = 0$, cioè $14t - 14 = 0$, da cui $t = 1$. E quindi $H = (4, 4, 4)$.
Abbiamo allora $\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(A, H) = \sqrt{5}$.

2	

(b) Dato il punto $B := (4, 2, 1)$, determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per B e contenente la retta r.

$\pi : -3y + 2z + 4 = 0$

Motivazione:

Consideriamo i punti $P_0 := (3, 2, 1)$ e $P_1 := (4, 4, 4)$ di r, ottenuti ponendo t uguale a 0 e a 1, rispettivamente, nelle equazioni della retta r. Il piano π cercato è il piano passante per P_0, P_1 e B. Esso ha quindi equazione $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, da cui segue $\pi : -3y+2z+4 = 0$.

2	

(c) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π.

$\frac{3}{\sqrt{13}}$

Motivazione:

La distanza cercata è uguale a:

$$\mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|0 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4|}{\sqrt{0 + 9 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$