COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale:
$V := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$

2 (a) Determinare una base di V.

$\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli del sistema che definisce V si ottiene che i vettori di V sono: $(-t_1, -t_2, t_1, t_2)$. E quindi una base di V è data da $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$.

2 (b) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard. Dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione:
Se $\mathbf{w}$ è un vettore perpendicolare a tutti i vettori della base di V scelta in (a), allora $\mathbf{w}$ è perpendicolare a tutti i vettori di V.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Per ipotesi abbiamo $\mathbf{w} \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{w} \times \mathbf{v}_2 = 0$.
I vettori di V sono $\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ al variare di a e b in $\mathbb{R}$.
Quindi $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = a(\mathbf{w} \times \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{w} \times \mathbf{v}_2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : x - 2y + z = 0$. Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base ortonormale dello spazio tale che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sia una base di π.

2	

(a) Si consideri l'endomorfismo f dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio la sua proiezione ortogonale sul piano π. Determinare la matrice F associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per determinare la matrice F determiniamo le immagini dei vettori della base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Dal momento che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ appartengono a π, si ha $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$.
Dal momento che la base scelta è ortonormale, il vettore $\mathbf{v}_3$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e quindi è ortogonale al piano π. Abbiamo allora $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$. Segue $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2	

(b) Si consideri l'endomorfismo g dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio il suo simmetrico rispetto al piano π. Determinare la matrice G associata a g relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per determinare la matrice G determiniamo le immagini dei vettori della base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Dal momento che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ appartengono a π, si ha $g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$.
Dal momento che la base scelta è ortonormale, il vettore $\mathbf{v}_3$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e quindi è ortogonale al piano π. Abbiamo allora $g(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_3$. Segue $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si consideri il sottospazio vettoriale V dello spazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$V := \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$$

2 (a) Determinare una base di V.

$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Data una generica matrice $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{R})$ si ha $A \in V$ se e solo se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, da cui segue $a = d = 0, c = t, d = -t$, con $t \in \mathbb{R}$. Ponendo $t = 1$ abbiamo una base di V.

3 (b) Determinare $V \cap S(2,\mathbb{R})$ (ricordiamo che $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche).

$V \cap S(2,\mathbb{R}) = \{\mathbf{0}\}$

Motivazione:

Abbiamo visto in (a) che le matrici di V sono matrici del tipo $M := \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Affinché M sia simmetrica si deve avere $t = -t$ da cui $t = 0$. Quindi $V \cap S(2,\mathbb{R}) = \{\mathbf{0}\}$.

2 (c) Determinare tutte le matrici appartenenti al sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a V e passante per $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Vedere motivazione.

Motivazione:

La risposta dipende da quale definizione vogliamo adottare per il parallelismo tra sottospazi affini e quindi anche tra un sottospazio affine e un sottospazio vettoriale, essendo quest'ultimo un particolare sottospazio affine.
Se consideriamo la definizione di parallelismo ristretta al caso in cui i due sottospazi abbiano la stessa dimensione, allora ovviamente non esiste un sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a V, perché $\dim V = 1$.
Se invece consideriamo la definizione più generale di parallelismo valida anche nel caso in cui i sottospazi affini abbiano anche dimensione diversa (vedere il capitolo 40 delle note del corso), allora il sottospazio affine cercato deve essere dato da $C + W$ dove W è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 contenente V. Possiamo allora prendere, per esempio, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & t' \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \right\}$. E quindi abbiamo le matrici
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 3-t & 4+t' \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$.

4. Sia $\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonica dello spazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$. Sia f l'endomorfismo di $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da $f(B) = 2\,{}^tB$.

2	

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Dal momento che si ha $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1, f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_3, f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2, f(\mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_4$, si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ , \ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice A, essendo simmetrica, è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A ha come radici $x = 2$, con molteplicità 3, e $x = -2$, con molteplicità 1. Quindi $\dim E(2) = 3$ e $\dim E(-2) = 1$. Abbiamo visto dalla risposta (a) che i vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_4$ sono autovettori con autovalore 2. Inoltre il vettore $\mathbf{v}_1 := \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore con autovalore 2. Infatti, $f(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{v}_1$. I vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_1$, essendo linearmente indipendenti, formano una base di $E(2)$. Cerchiamo ora una base di $E(-2)$. Il vettore $\mathbf{v}_2 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, poiché $f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{v}_2$, è una base di $E(-2)$. Da tutto ciò segue che i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ costituiscono una base di autovettori e quindi otteniamo le matrici D e M indicate sopra.

3	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale $D' \neq D$ e una matrice invertibile N tali che $D' = N^{-1}AN$

$$D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Considerando come base di autovettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_1$ otteniamo le matrici D' e N indicate sopra.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 5)$, $C := (-1, 2)$ e $C' = (5, 2)$. Siano poi date la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per A e la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro C' e passante per A.

3	

(a) Determinare l'area del quadrilatero $ACA'C'$, dove A' è il punto distinto da A di intersezione della circonferenza $\mathcal{C}$ e della circonferenza $\mathcal{C}'$.

Area = 18

Motivazione:

Il punto $A' \neq A$ di intersezione delle circonferenze C e C' è il simmetrico del punto A rispetto alla retta r passante per i centri C e C' delle due circonferenze. E quindi l'area del quadrilatero $ACA'C'$ è uguale al doppio dell'area del triangolo ACC'. Quest'ultima è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(C, C')\,\mathrm{d}(A, r)) = \frac{1}{2}6 \cdot 3 = 9$. L'area del quadrilatero $ACA'C'$ è quindi uguale a 18.

2	

(b) Determinare un' equazione cartesiana della retta s passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ e un' equazione cartesiana della retta s' passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}'$.

$s : 2x + 3y - 17 = 0$, $s' : -4x + 3y - 11 = 0$

Motivazione:

La retta s deve passare per A e essere perpendicolare alla retta passante per A e C. Quest'ultima ha parametri direttori $(1 + 1, 5 - 2) = (2, 3)$ e quindi la retta s ha equazione $2(x - 1) + 3(y - 5) = 0$, da cui $s : 2x + 3y - 17 = 0$.
Analogamente la retta s' deve passare per A e essere perpendicolare alla retta passante per A e C'. Quest'ultima ha parametri direttori $(1 - 5, 5 - 2) = (-4, 3)$ e quindi la retta s ha equazione $-4(x - 1) + 3(y - 5) = 0$, da cui $s' : -4x + 3y - 11 = 0$.

2	

(c) Determinare i coseni degli angoli formati dalle rette s e s'.

$\cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$.

Motivazione:

I quattro angoli sono a due a due uguali e sono supplementari a coppie. Quindi i loro coseni sono uno l'opposto dell'altro. Ne calcoliamo uno. Abbiamo: $\cos\alpha = \frac{2(-4)+3\cdot 3}{5\sqrt{13}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$.
L'altro è $\cos\beta = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$ e i punti $A := (1, -1, 1)$ e $B := (2, 3, -4)$, entrambi appartenenti al piano π. Sia r_1 la retta passante per A e B.

3	

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r_2 passante per A, perpendicolare alla retta r_1 e contenuta nel piano π.

$$r_2 : \begin{cases} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + 4y - 5z + 8 &= 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r_2 è l'intersezione del piano π e del piano π' passante per A e perpendicolare alla retta r_1. Quest'ultima ha parametri direttori $(2 - 1, 3 + 1, -4 - 1) = (1, 4, -5)$. Il piano π' ha quindi equazione $x - 1 + 4(y + 1) - 5(z - 1) = 0$, da cui $\pi' : x + 4y - 5z + 8 = 0$.
Pertanto $r_2 : \begin{cases} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + 4y - 5z + 8 &= 0 \end{cases}$

2	

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta r_3 passante per A e perpendicolare sia alla retta r_1 che alla retta r_2.

$$r_3 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + t \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r_3 che cerchiamo è perpendicolare alle rette r_1 e r_2. Queste due rette sono contenute nel piano π e passano per A. Pertanto la retta r_3 è perpendicolare al piano π. Poiché r_3 passa per A ha equazioni parametriche $\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z &= 1 + t \end{cases}$

3	

(c) Determinare il volume della piramide di vertice D e base ABC, dove C è un punto della retta r_2 avente distanza da A uguale a 5 e D è un punto della retta r_3 avente distanza da A uguale a 2.
(Ricordiamo che il volume di una piramide è uguale all'area della base per l'altezza diviso 3.)

Volume $= \frac{5\sqrt{42}}{3}$

Motivazione:

La base ABC della piramide è un triangolo rettangolo in A e quindi la sua area è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, C)\,\mathrm{d}(A, B) = \frac{1}{2}5\sqrt{42}$. Dal momento che la retta r_3 è perpendicolare al piano π, l'altezza della piramide è uguale a $\mathrm{d}(C, A) = 2$. Quindi il volume della piramide è uguale a $\frac{1}{3}\frac{1}{2}5\sqrt{42} \cdot 2 = \frac{5\sqrt{42}}{3}$.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale:
$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

2 (a) Determinare una base di W.

$\mathbf{w}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0, 1)$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli del sistema che definisce W si ottiene che i vettori di W sono: $(-t_1, t_2, t_1, t_2)$. E quindi una base di W è data da $\mathbf{w}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0, 1)$.

2 (b) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard. Dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione:
Se $\mathbf{v}$ è un vettore perpendicolare a tutti i vettori della base di W scelta in (a), allora $\mathbf{v}$ è perpendicolare a tutti i vettori di W.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Per ipotesi abbiamo $\mathbf{v} \times \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{w}_2 = 0$.
I vettori di W sono $\mathbf{w} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$ al variare di a e b in $\mathbb{R}$.
Quindi $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) = a(\mathbf{v} \times \mathbf{w}_1) + b(\mathbf{v} \times \mathbf{w}_2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\alpha : -2x + y + z = 0$. Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base ortonormale dello spazio tale che $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sia una base di α.

2	

(a) Si consideri l'endomorfismo g dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio la sua proiezione ortogonale sul piano α. Determinare la matrice G associata a g relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per determinare la matrice G determiniamo le immagini dei vettori della base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Dal momento che i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ appartengono a α, si ha $g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $g(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$.
Dal momento che la base scelta è ortonormale, il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e quindi è ortogonale al piano α. Abbiamo allora $g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Segue $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2	

(b) Si consideri l'endomorfismo f dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio il suo simmetrico rispetto al piano α. Determinare la matrice F associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per determinare la matrice F determiniamo le immagini dei vettori della base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Dal momento che i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ appartengono a α, si ha $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$.
Dal momento che la base scelta è ortonormale, il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e quindi è ortogonale al piano α. Abbiamo allora $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1$. Segue $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si consideri il sottospazio vettoriale W dello spazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$W := \{B \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid B = -{}^tB\}$$

2	

(a) Determinare una base di W.

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Motivazione:

Data una generica matrice $B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{R})$ si ha $B \in W$ se e solo se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, da cui segue $a = d = 0, c = t, d = -t$, con $t \in \mathbb{R}$. Ponendo $t = 1$ abbiamo una base di W.

3	

(b) Determinare $W \cap S(2,\mathbb{R})$, dove $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche.

$W \cap S = \{\mathbf{0}\}$

Motivazione:

Abbiamo visto in (a) che le matrici di W sono matrici del tipo $M := \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Affinché M sia simmetrica si deve avere $t = -t$ da cui $t = 0$. Quindi $W \cap S = \{\mathbf{0}\}$.

2	

(c) Determinare tutte le matrici appartenenti al sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a W e passante per $D := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vedere la motivazione.

Motivazione:

La risposta dipende da quale definizione vogliamo adottare per il parallelismo tra sottospazi affini e quindi anche tra un sottospazio affine e un sottospazio vettoriale, essendo quest'ultimo un particolare sottospazio affine.
Se consideriamo la definizione di parallelismo ristretta al caso in cui i due sottospazi abbiano la stessa dimensione, allora ovviamente non esiste un sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a W, perché $\dim W = 1$.
Se invece consideriamo la definizione più generale di parallelismo valida anche nel caso in cui i sottospazi affini abbiano anche dimensione diversa (vedere il capitolo 40 delle note del corso), allora il sottospazio affine cercato deve essere dato da $D + V$ dove V è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 contenente W. Possiamo allora prendere, per esempio, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & t' \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \right\}$. E quindi abbiamo le matrici
$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3+t \\ 2-t & 1+t' \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$.

4. Sia f l'endomorfismo di $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da $f(A) = 3\, {}^tA$.

2	

(a) Determinare la matrice B associata a f relativamente alla base canonica $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $M(2,2,\mathbb{R})$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Dal momento che si ha $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_3, f(\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_4) = 3\mathbf{v}_4$, si ha:
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale B' e una matrice invertibile M tali che $B' = M^{-1}BM$.

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

La matrice B, essendo simmetrica, è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di B ha come radici $x = 3$, con molteplicità 3, e $x = -3$, con molteplicità 1. Quindi $\dim E(3) = 3$ e $\dim E(-3) = 1$. Abbiamo visto dalla risposta (a) che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_4$ sono autovettori con autovalore 3. Inoltre il vettore $\mathbf{e}_1 := \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ è autovettore con autovalore 3. Infatti, $f(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{v}_3+3\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{e}_1$. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_1$, essendo linearmente indipendenti, formano una base di $E(3)$. Cerchiamo ora una base di $E(-3)$. Il vettore $\mathbf{e}_2 := \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, poiché $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = 3\mathbf{v}_3 - 3\mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_2$, è una base di $E(-3)$. Da tutto ciò segue che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ costituiscono una base di autovettori e quindi otteniamo le matrici B' e M indicate sopra.

3	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale $B'' \neq B'$ e una matrice invertibile N tali che $B'' = N^{-1}BN$

$$B'' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Considerando come base di autovettori $\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_1$ otteniamo le matrici B'' e N indicate sopra.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (10, 2)$, $C := (4, -2)$ e $C' = (4, 10)$. Siano poi date la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per A e la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro C' e passante per A.

3	

(a) Determinare l'area del quadrilatero $ACA'C'$, dove A' è il punto distinto da A di intersezione della circonferenza $\mathcal{C}$ e della circonferenza $\mathcal{C}'$.

Area = 72

Motivazione:

Il punto $A' \neq A$ di intersezione delle circonferenze C e C' è il simmetrico del punto A rispetto alla retta r passante per i centri C e C' delle due circonferenze. E quindi l'area del quadrilatero $ACA'C'$ è uguale al doppio dell'area del triangolo ACC'. Quest'ultima è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(C, C')\,\mathrm{d}(A, r)) = \frac{1}{2}12 \cdot 6 = 36$. L'area del quadrilatero $ACA'C'$ è quindi uguale a 72.

2	

(b) Determinare un' equazione cartesiana della retta s passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ e un' equazione cartesiana della retta s' passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}'$.

$s : 3x + 2y - 34 = 0$, $s' : 3x - 4y - 22 = 0$

Motivazione:

La retta s deve passare per A e essere perpendicolare alla retta passante per A e C. Quest'ultima ha parametri direttori $(10 - 4, 2 + 2) = (6, 4)$ e quindi la retta s ha equazione $6(x - 10) + 4(y - 2) = 0$, da cui $s : 3x + 2y - 34 = 0$.
Analogamente la retta s' deve passare per A e essere perpendicolare alla retta passante per A e C'. Quest'ultima ha parametri direttori $(10 - 4, 2 - 10) = (6, -8)$ e quindi la retta s ha equazione $6(x - 10) - 8(y - 2) = 0$, da cui $s' : 3x - 4y - 22 = 0$.

2	

(c) Determinare i coseni degli angoli formati dalle rette s e s'.

$\cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$.

Motivazione:

I quattro angoli sono a due a due uguali e sono supplementari a coppie. Quindi i loro coseni sono uno l'opposto dell'altro. Ne calcoliamo uno. Abbiamo: $\cos\alpha = \frac{3 \cdot 3 + 2(-4)}{5\sqrt{13}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$.
L'altro è $\cos\beta = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : 2x + y + z = 0$ e i punti $A := (1, -1, -1)$ e $B := (2, 1, -5)$, entrambi appartenenti al piano π. Sia r_1 la retta passante per A e B.

3	

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r_2 passante per A, perpendicolare alla retta r_1 e contenuta nel piano π.

$$r_2 : \begin{cases} 2x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - 4z - 3 & = & 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r_2 è l'intersezione del piano π e del piano π' passante per A e perpendicolare alla retta r_1. Quest'ultima ha parametri direttori $(2 - 1, 1 + 1, -5 + 1) = (1, 2, -4)$. Il piano π' ha quindi equazione $x - 1 + 2(y + 1) - 4(z + 1) = 0$, da cui $\pi' : x + 2y - 4z - 3 = 0$.
Pertanto $r_2 : \begin{cases} 2x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - 4z - 3 & = & 0 \end{cases}$.

2	

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta r_3 passante per A e perpendicolare sia alla retta r_1 che alla retta r_2.

$$r_3 : \begin{cases} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -1 + t \\ z & = & -1 + t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Motivazione:

La retta r_3 che cerchiamo è perpendicolare alle rette r_1 e r_2. Queste due rette sono contenute nel piano π e passano per A. Pertanto la retta r_3 è perpendicolare al piano π. Poiché r_3 passa per A ha equazioni parametriche $\begin{cases} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -1 + t \\ z & = & -1 + t \end{cases}$.

3	

(c) Determinare il volume della piramide di vertice D e base ABC, dove C è un punto della retta r_2 avente distanza da A uguale a 5 e D è un punto della retta r_3 avente distanza da A uguale a 2.
(Ricordiamo che il volume di una piramide è uguale all'area della base per l'altezza diviso 3.)

Volume $= \frac{5\sqrt{21}}{3}$

Motivazione:

La base ABC della piramide è un triangolo rettangolo in A e quindi la sua area è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, C)\,\mathrm{d}(A, B) = \frac{1}{2} 5\sqrt{21}$. Dal momento che la retta r_3 è perpendicolare al piano π, l'altezza della piramide è uguale a $\mathrm{d}(C, A) = 2$. Quindi il volume della piramide è uguale a $\frac{1}{3}\frac{1}{2} 5\sqrt{21} \cdot 2 = \frac{5\sqrt{21}}{3}$.