COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Verificare l'esattezza o meno delle seguenti affermazioni:

2	

(a) Se una matrice A di ordine 3 è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ allora $A = B$.

☒ L'affermazione è vera. ☐ L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Se A è simile a B, allora esiste $M \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $A = M^{-1}BM$.
Abbiamo $B = 5I$, dove I è la matrice identica di ordine 3, e quindi:
$A = M^{-1}5IM = 5M^{-1}IM = 5M^{-1}M = 5I = B$.

2	

(b) Esiste una sola matrice A' di ordine 3 avente l'autospazio $E(4)$ relativo all'autovalore 4 di dimensione uguale a 3.

☒ L'affermazione è vera. ☐ L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Dall'ipotesi segue che $\mathrm{rk}(A' - 4I) = 3 - 3 = 0$ e quindi $A' - 4I = 0$, da cui segue $A' = 4I$.
E quindi la matrice $4I$ è l'unica matrice avente la proprietà richiesta.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^5$ il punto P di coordinate $(2,-1,0,-1,2)$, il punto R di coordinate $(1,3,1,2,-1)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3+t \\ x_3 = 1 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ x_4 = 2+t \\ x_5 = -1-t \end{cases}$$

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π ortogonale alla retta r e passante per il punto P.

$\Pi : x_2 + x_4 - x_5 + 4 = 0.$

Motivazione:

Il vettore direttore di r: $(0,1,0,1,-1)$ è ortogonale al piano, quindi basta porre

$$0(x_1-2)+1(x_2+1)+0(x_3-0)+1(x_4+1)-1(x_5-2)=0.$$

Nota. In alternativa, si sarebbe potuto risolvere l'esercizio considerando il fascio di iperpiani ortogonali alla retta r: $0x_1+1x_2+0x_3+1x_4-1x_5+k=0$, con $k \in \mathbb{R}$ e determinando poi k imponendo il passaggio per il punto P.

2	

(b) Trovare i punti Q della retta r tali che il segmento QR abbia lunghezza $\sqrt{3}$ e intersechi Π.

Non esistono tali punti.

Motivazione:

La distanza tra il punto generico della retta r e il punto R è data da $\sqrt{(1-1)^2+(3+t-3)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2+(-1-t+1)^2} = \sqrt{3t^2}$.
Quindi $\sqrt{3t^2}=\sqrt{3}$, da cui $t=\pm 1$. Si ottengono quindi i punti Q_1 e Q_2 di coordinate rispettivamente $(1,4,1,3,-2)$ e $(1,2,1,1,0)$. Sostituendo le coordinate dei punti R, Q_1, Q_2 nell'equazione cartesiana di Π si osserva che i punti R, Q_1, Q_2 sono tutti nello stesso semispazio rispetto a Π. Quindi né il segmento RQ_1 né il segmento RQ_2 intersecano Π.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} kx + 2ky = k \\ 3kx + 6ky = 3k \\ 2kx - y = k + 1 \end{cases}$$

2	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che la coppia $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ è una soluzione di Σ.

Per $k = -1$.

Motivazione:

Sostituendo $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ in Σ si ottiene $\Sigma : \begin{cases} k = k \\ 3k = 3k \\ -\frac{2}{3}k - \frac{2}{3} = k + 1 \end{cases}$ da cui $k = -1$.

3	

(b) Determinare il numero di soluzioni di Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Se $k = 0$, il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.
Se $k = -\frac{1}{4}$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k \neq 0$ e $k \neq -\frac{1}{4}$, il sistema ha un'unica soluzione.

Motivazione:

La matrice completa del sistema è $A' = \begin{pmatrix} k & 2k & k \\ 3k & 6k & 3k \\ 2k & -1 & k+1 \end{pmatrix}$ e sia A la matrice dei coefficienti del sistema. Se $k = 0$ si ha che $\operatorname{rk}(A) = 1 = \operatorname{rk}(A')$ e quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Se $k \neq 0$, usando l'algoritmo di Gauss si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} k & 2k & k \\ 0 & -1-4k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da cui si deduce che se $k = -\frac{1}{4}$, allora $\operatorname{rk}(A) = 1 < 2 = \operatorname{rk}(A')$ e quindi il sistema non ha soluzioni; se invece $k \neq 0$ e $k \neq -\frac{1}{4}$, allora $\operatorname{rk}(A) = 2 = \operatorname{rk}(A')$ e il sistema ha un'unica soluzione.

2	

(c) Posto $k = 0$, trovare tutte le soluzioni del sistema Σ.

$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Motivazione:

Sostituendo $k = 0$ il sistema diventa:

$$\Sigma : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$$

Da cui segue la soluzione.

4. Si consideri l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & k \end{pmatrix}$.

2	

(a) Calcolare $\dim \ker f$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Se $k = 4$, allora $\dim \ker f = 2$.
Se $k \neq 4$, allora $\dim \ker f = 1$.

Motivazione:

Con l'algoritmo di eliminazione di Gauss per righe si ottiene la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Se $k = 4$, allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = 1$ e quindi $\dim \ker f = 3 - 1 = 2$. Se $k \neq 4$, allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = 2$ e quindi $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$.

3	

(b) Posto $k = 1$, determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f. Dire inoltre se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva (cioè biunivoca).

Una base del nucleo è $\{(-1, 1, 0)\}$. Una base dell'immagine è $\{(1, 1, -2), (-2, -2, 1)\}$. Inoltre f non è né iniettiva, né suriettiva, né biiettiva.

Motivazione:

Se $k = 1$ si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Con l'algoritmo di Gauss si ottiene la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2. Quindi $\dim \mathrm{im} f = 2$ e $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. La prima e l'ultima colonna di A sono vettori linearmente indipendenti che generano l'immagine di f e quindi formano una base per l'immagine. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad A' si ottiene

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = 1$ si ottiene una base del nucleo.

Dal momento che il nucleo non è formato dal solo vettore nullo, l'endomorfismo non è iniettivo.
Dal momento che l'immagine ha dimensione uguale a $2 < 3$, l'endomorfismo non è suriettivo e quindi non è neanche biiettivo.

2	

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Motivazione:

Poiché la matrice A è simmetrica per ogni $k \in \mathbb{R}$, allora f è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta r di equazione $x-y+3=0$ e il punto P di coordinate $(3,2)$.

2

(a) Scrivere un'equazione cartesiana della retta s passante per P e ortogonale a r.

$s: x+y-5=0$

Motivazione:

Un vettore parallelo alla retta r è $\mathbf{v} := (1,1)$. La retta s, ortogonale a r e passante per P, ha equazione cartesiana $1(x-3)+1(y-2)=0$ e quindi $s: x+y-5=0$.

2

(b) Scrivere un'equazione cartesiana della circonferenza di centro P e tangente alla retta r.

$(x-3)^2+(y-2)^2=8$

Motivazione:

La distanza del punto P dalla retta r è il raggio della circonferenza ed è uguale a:

$$\frac{|3-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

La circonferenza ha quindi equazione: $(x-3)^2+(y-2)^2=8$.

3

(c) Determinare le coordinate di due punti A e B di r, tali che il triangolo ABP sia isoscele di base AB e abbia area uguale a 12.

$A=(4,7)$ e $B=(-2,1)$.

Motivazione:

I punti A e B devono essere punti della retta r simmetrici rispetto al punto H di intersezione tra la retta r e la retta s. Svolgendo i calcoli si ottiene $H=(1,4)$.
Inoltre l'area del triangolo ABP è uguale a $\frac{1}{2}2\,\mathrm{d}(A,H)\,\mathrm{d}(P,H)$. Dalla risposta alla domanda precedente abbiamo $\mathrm{d}(P,H)=2\sqrt{2}$. Imponendo che l'area del triangolo ABP sia uguale a 12 otteniamo che si deve avere $\mathrm{d}(A,H)=\mathrm{d}(B,H)=3\sqrt{2}$. Cerchiamo quindi i punti della retta r aventi tale distanza da H. Il punto generico R di r ha coordinate $(t,t+3)$. Si ha $\mathrm{d}(R,H)=\sqrt{2}|t-1|$. Imponendo che tale distanza sia uguale a $3\sqrt{2}$ otteniamo $|t-1|=3$ da cui $t=4$ e $t=-2$. Sostituendo questi due valori di t nelle coordinate del punto generico di r otteniamo i punti A e B cercati. Quindi $A=(4,7)$ e $B=(-2,1)$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti A di coordinate $(-1, 2, 2)$, B di coordinate $(0, 0, 1)$ e C di coordinate $(3, -3, 1)$.

2	

(a) Scrivere le coordinate del centro K della circonferenza passante per A, B e C.

$K = (4, 1, 6)$

Motivazione:

Il punto medio M del segmento AB ha coordinate $M = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. La retta passante per A e B ha parametri direttori $(1, -2, -1)$ e quindi il piano asse del segmento AB (cioè il piano passante per il punto medio di AB e perpendicolare alla retta passante per A e B) ha equazione $1(x + \frac{1}{2}) - 2(y - 1) - 1(z - \frac{3}{2}) = 0$ e quindi $x - 2y - z + 4 = 0$. In modo analogo si vede che il piano asse del segmento AC ha equazione $4x - 5y - z - 5 = 0$. Il piano passante per A, B e C ha equazione $x + y - z + 1 = 0$. Il punto K è il punto di intersezione di questi tre piani. Risolvendo il sistema dato dalle equazioni dei tre piani si ottiene $K = (4, 1, 6)$.

3	

(b) Calcolare l'area del triangolo ABC.

Area= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Motivazione:

L'area del triangolo ABC è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, B)\,\mathrm{d}(C, H)$ dove H è la proiezione ortogonale di C sulla retta r passante per A e B.
Si ha $\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{6}$. Il punto H è dato dall'intersezione della retta r con il piano π passante per C e perpendicolare alla retta r.
Sappiamo dalla risposta di (a) che i parametri direttori della retta r sono $(1, -2, -1)$ e quindi il piano π ha equazione $1(x - 3) - 2(y + 3) - 1(z - 1) = 0$, cioè $x - 2y - z - 8 = 0$ La retta r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Cerchiamo il valore di t per cui il punto appartiene al piano π. Si ha $-1 + t - 2(2 - 2t) - 1(2 - t) - 8 = 0$ e quindi $t = \frac{15}{6}$. Segue $H = (\frac{3}{2}, -3, -\frac{1}{2})$ e quindi $\mathrm{d}(C, H) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Abbiamo pertanto che l'area del triangolo ABC è uguale a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2	

(c) Scrivere l'equazione della sfera di centro A e tangente al piano xy.

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$

Motivazione:

Il raggio della sfera è uguale alla distanza del suo centro A dal piano xy che ha equazione $z = 0$. Tale distanza è $\frac{|2|}{\sqrt{1}} = 2$. La sfera ha quindi equazione $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 4$.