COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano date le condizioni $f(1,0) = (3,1,1)$, $f(0,1) = (2,k,2)$ e $f(2,1) = (8,6,k)$.

2 (a) Per quali valori di k le condizioni date definiscono un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

$k = 4$

Motivazione:

I 2 vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$. Comunque siano assegnate le immagini dei vettori di una base di uno spazio vettoriale esiste un unico omomorfismo che soddisfa tali assegnazioni. In particolare esiste un unico omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le prime due condizioni. Se l'omomorfismo f così determinato soddisfa anche la terza condizione allora esiste un unico omomorfismo che soddisfa tutte e tre le condizioni, altrimenti non ne esiste nessuno. In altri termini il valore di $f(2,1)$ ottenuto per linearità da $f(1,0)$ e $f(0,1)$ deve coincidere con il valore di $f(2,1)$ assegnato dalla terza condizione.
Calcolando $f(2,1)$ utilizzando la linearità di f otteniamo

$$f(2,1) = 2 \cdot f(1,0) + 1 \cdot f(0,1) = 2 \cdot (3,1,1) + 1 \cdot (2,k,2) = (8, 2+k, 4).$$

Tale vettore coincide con $(8,6,k)$ se e solo se $k = 4$.

2 (b) Per quali valori di k le condizioni date definiscono un omomorfismo suriettivo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

Nessun valore

Motivazione:

Poiché la dimensione dello spazio di arrivo è maggiore della dimensione dello spazio di partenza non esiste alcun omomorfismo suriettivo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

2. Siano dati i punti A di coordinate $(1,2,0,1,1)$ e B di coordinate $(1,0,1,2,1)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + k = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

2

(a) Per quali valori di k il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π?

$-5 < k < -1$

Motivazione:

Il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π se e solo se A e B stanno in semispazi delimitati da π diversi.
I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+k > 0$ e $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+k < 0$. Sostituendo le coordinate di A in $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5+k$ otteniamo $1+2\cdot 2-0+1-1+k = k+5$. Sostituendo le coordinate di B otteniamo $1+2\cdot 0-1+2-1+k = k+1$.
Affinché i due punti stiano in semispazi opposti i valori $k+5$ e $k+1$ devono essere discordi. Poiché $k+5 > k+1$ ciò avviene quando $k+5 > 0$ e $k+1 < 0$, cioè per $-5 < k < -1$.

2

(b) Per quali valori di k la semiretta aperta di origine A e contenente B interseca l'iperpiano π?

$-5 < k$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + (1-1)t \\ x_2 = 2 + (0-2)t \\ x_3 = 0 + (1-0)t \\ x_4 = 1 + (2-1)t \\ x_5 = 1 + (1-1)t \end{cases}$$

I punti della semiretta di origine A e contenente B sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro t.
Intersecando la retta r con l'iperpiano π si ottiene l'equazione $1+2(2-2t)-t+(1+t)-1+k = 0$ cioè $-4t+5+k = 0$ la cui soluzione è $t = \frac{5+k}{4}$. Questo è un valore positivo se e solo se $k > -5$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $(2,1,0)$ e $(1,2,1)$ siano autovettori di autovalore -2 e $(1,1,1)$ appartenga al nucleo.

2	

(a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{(-4,-2,0), (-2,-4,-2)\}$

Motivazione:

Poiché la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $(2,1,0)$, $(1,2,1)$ e $(1,1,1)$ rispetto alla base canonica, ha determinante diverso da 0, tali vettori formano una base per $\mathbb{R}^3$. Le loro immagini, cioè $(-4,-2,0)$, $(-2,-4,-2)$ e $(0,0,0)$, generano dunque l'immagine di f. I primi due sono linearmente indipendenti e, dunque, formano una base per l'immagine di f.

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{w}_k := (1,1,k)$ appartiene all'immagine di f?

$k = \frac{1}{3}$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che l'immagine di f ha dimensione 2 ed è generata dai vettori $\mathbf{u} := (-4,-2,0)$ e $\mathbf{v} := (-2,-4,-2)$. Il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene all'immagine di f se e solo se è combinazione lineare di questi vettori: poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti, ciò è equivalente a dire che $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}_k$ sono linearmente dipendenti. La matrice $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$, le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}_k$ rispetto alla base canonica, ha determinante $12k - 4$ che si annulla per $k = \frac{1}{3}$.

3	

(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Siano dati in $\mathbb{R}^5$ i sottospazi vettoriali $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ed $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 + x_5 = 0\}$.

3 (a) Determinare una base dell'intersezione $E \cap F$.

$\{(-1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, -2)\}$

Motivazione:

Determiniamo una base dell'intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Considerando x_3 e x_4 come parametri otteniamo che il sistema ha soluzioni del tipo $(-h, k, h, k, -2k)$ al variare di h e k in $\mathbb{R}$. Posto prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$ troviamo una base per $E \cap F$ formata dai vettori $(-1, 0, 1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 1, -2)$.

2 (b) Determinare una base ortonormale dell'intersezione $E \cap F$.

$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

Motivazione:

Abbiamo visto nella risposta precedente che i vettori $(-1, 0, 1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 1, -2)$ formano una base di $E \cap F$. Si verifica immediatamente che il prodotto scalare di questi due vettori è nullo. Per trovare una base ortonormale di $E \cap F$ è allora sufficiente considerare i vettori che si ottengono dividendo questi due per la propria norma: troviamo così i vettori $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

2 (c) Determinare una base per un sottospazio G supplementare di $E \cap F$ in F.

$\{(0, -1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo che $E \cap F$ ha dimensione 2. Il sottospazio F, essendo definito da 2 equazioni linearmente indipendenti, ha dimensione $5 - 2 = 3$. Pertanto i complementi di $E \cap F$ in F hanno dimensione $3 - 2 = 1$. Basta allora trovare un vettore $\mathbf{v}$ che appartiene a F ma non a $E \cap F$: in tal caso infatti, detto G il sottospazio generato da $\mathbf{v}$, si ha che l'intersezione di G con $E \cap F$ ha dimensione 0 (non può avere dimensione 1 perché altrimenti coinciderebbe con G e conterrebbe $\mathbf{v}$ che non appartiene $E \cap F$); inoltre la somma di G con $E \cap F$ ha dimensione $1 + 2 = 3$ e pertanto, essendo contenuta in F ed avendone la stessa dimensione, coincide con F.
Dobbiamo quindi trovare un vettore $\mathbf{v}$ che appartiene a F ma non a $E \cap F$, vale a dire un vettore che appartiene a F ma non a E. Risolvendo il sistema che definisce F, usando, per esempio, x_3, x_4 e x_5 come parametri, vediamo che il generico vettore di F è del tipo $(-h, -k - l, h, k, l)$ al variare di h, k e l in $\mathbb{R}$. Imponendo che l'equazione che definisce E non sia soddisfatta troviamo la condizione $-h - (-k - l) + h + k \neq 0$ cioè $2k + l \neq 0$. Scegliamo, ad esempio $h = 0$, $k = 0$ e $l = 1$ troviamo il vettore $(0, -1, 0, 0, 1)$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : 4x - 3y - 11 = 0$, $s : x - 2 = 0$ e $t : x - 2y - 9 = 0$.

2	

(a) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$b_1 : x + 3y + 1 = 0 \qquad b_2 : 3x - y - 7 = 0$

Motivazione:

Un punto generico $P := (x, y)$ appartiene a una delle due bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s se è equidistante da r e s. La distanza di P da r è $\frac{|4x-3y-11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4x-3y-11|}{5}$, mentre la distanza di P da s è uguale a $|x - 2|$. Abbiamo dunque $\frac{|4x-3y-11|}{5} = |x - 2|$, il che può avvenire se $\frac{4x-3y-11}{5} = x - 2$ o se $\frac{4x-3y-11}{5} = -(x - 2)$. Espandendo le due equazioni troviamo $x + 3y + 1 = 0$ e $9x - 3y - 21 = 0$ (la seconda equazione è equivalente a $3x - y - 7 = 0$).

2	

(b) Le circonferenze che hanno centro sulla retta t e sono tangenti sia a r che a s hanno equazioni cartesiane:

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9 \qquad (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$

Motivazione:

Affinché una circonferenza sia tangente sia a r che a s, il suo centro deve essere equidistante dalle rette r e s, in altri termini il suo centro deve appartenere a una delle due bisettrici trovate al punto precedente. Mettendo a sistema l'equazione di b_1 con l'equazione di t e risolvendo il sistema così ottenuto troviamo il punto $C_1 := (5, -2)$. Mettendo a sistema l'equazione di b_2 con l'equazione di t e risolvendo il sistema così ottenuto troviamo il punto $C_2 := (1, -4)$. Per determinare il raggio della circonferenza di centro C_1 calcoliamo la sua distanza da una delle due rette, ad esempio s: otteniamo $|5-2| = 3$. La prima circonferenza ha, dunque, equazione $(x-5)^2+(y+2)^2 = 9$. Analogamente calcoliamo la distanza di C_2 da s ottenendo $|1-2| = 1$: la seconda circonferenza ha, dunque, equazione $(x-1)^2+(y+4)^2 = 1$.

3	

(c) Il poligono che ha come vertici i centri delle circonferenze trovate al punto precedente e l'intersezione A delle rette r e s ha area:

5

Al punto precedente abbiamo trovato due circonferenze: dunque il poligono è un triangolo, di vertici C_1, C_2 e A. Poiché il punto A, intersezione delle rette r e s, è, ovviamente, anche intersezione delle bisettrici b_1 e b_2 abbiamo che il lato AC_1 giace sulla bisettrice b_1 e il lato AC_2 giace sulla bisettrice b_2. Dal momento che le bisettrici degli angoli formati da due rette sono ortogonali fra loro, il triangolo AC_1C_2 è rettangolo in A. Il cateto AC_1 ha lunghezza uguale alla distanza di C_1 da b_2, cioè $\frac{|3\cdot5-(-2)-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}$. Il cateto AC_2 ha lunghezza uguale alla distanza di C_2 da b_1, cioè $\frac{|1+3\cdot(-4)+1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{10}$. Dunque il triangolo ha area uguale a $\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2} = 5$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x - y + z - 7 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2	

(a) Determinare il punto P distante $2\sqrt{3}$ dal piano π, appartenente alla retta r e al semispazio delimitato da π contenente l'origine del sistema di riferimento.

$P = (0, 0, 1)$

Motivazione:

Il generico punto $(1 + t, -1 - t, 5 + 4t)$ di r dista

$$\frac{|(1 + t) - (-1 - t) + (5 + 4t) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|6t|}{\sqrt{3}}.$$

Uguagliando questa quantità a $2\sqrt{3}$ otteniamo la condizione $|6t| = 6$ le cui soluzioni $t = -1$ e $t = 1$ corrispondono rispettivamente ai punti $(0, 0, 1)$ e $(2, -2, 9)$ che stanno su semispazi opposti rispetto a π. Poiché $0 - 0 + 0 - 7 = -7 < 0$, il semispazio contenente l'origine ha disequazione $x - y + z - 7 < 0$. Dal momento che $0 - 0 + 1 - 7 = -6 < 0$, il punto cercato è $(0, 0, 1)$.

2	

(b) Determinare il simmetrico H del punto P rispetto al piano π.

$H = (4, -4, 5)$

Motivazione:

La retta n passante per P e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = \phantom{1+{}} t \\ y = {}-t \\ z = 1 + t \end{cases}.$

Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$t - (-t) + (1 + t) - 7 = 0,$$

ovvero $3t - 6 = 0$, la cui soluzione è $t = 2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate della proiezione ortogonale $K := (2, -2, 3)$ di P su π. Il punto $H := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è il punto tale che K sia punto medio tra P e H. Deve cioè essere: $\left(\frac{\bar{x}+0}{2}, \frac{\bar{y}+0}{2}, \frac{\bar{z}+1}{2}\right) = (2, -2, 3)$ da cui otteniamo $H = (4, -4, 5)$.

3	

(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ contenente r e ortogonale al piano π.

$x + y = 0$

Motivazione:

Per imporre che il piano contenga la retta r, basta imporre che contenga due suoi punti distinti. Possiamo prendere due punti corrispondenti a valori arbitrari del parametro t oppure prendere i due punti trovati al punto a: $(0, 0, 1)$ e $(2, -2, 9)$. Il piano cercato dovendo essere ortogonale al piano π, deve contenere la retta passante per P e ortogonale a π, cioè la retta n determinata al punto precedente. Un punto di questa retta distinto da P è, ad esempio, il punto $H = (4, -4, 5)$, trovato al punto precedente. Abbiamo così trovato tre punti appartenenti al piano cercato. Utilizziamo la forma determinantale per trovare l'equazione di tale piano: $\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 2 - 0 & -2 - 0 & 9 - 1 \\ 4 - 0 & -4 - 0 & 5 - 1 \end{vmatrix} = 0$ vale a dire $x + y = 0$.