COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 (a) Se $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ è invertibile allora $2A$ è invertibile.

Vera.

Motivazione:

Per ipotesi $\det A \neq 0$ e quindi $\det(2A) = 2^n \det A \neq 0$.

2 (b) Se $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ è diagonalizzabile allora anche $2A$ è diagonalizzabile.

Vera.

Motivazione:

Se A è diagonalizzabile allora esistono una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.
Da ciò segue $M^{-1}BM = M^{-1}(2A)M = 2(M^{-1}AM) = 2D$. Essendo D diagonale, anche $2D$ è diagonale e quindi B è diagonalizzabile.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto P_0 di coordinate $(2,2,2,2)$, il punto P_1 di coordinate $(3,2,2,2)$, il punto P_2 di coordinate $(4,2,3,2)$, il punto P_3 di coordinate $(5,2,3,4)$. Sia Σ l'inviluppo affine dei punti P_0, P_1, P_2, P_3.

2	

(a) Determinare la dimensione di Σ. Determinare delle equazioni parametriche di Σ.

$$\dim \Sigma = 3, \quad \Sigma : \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + 2t_2 + 3t_3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 + t_2 + t_3 \\ x_4 = 2 + 2t_3 \end{cases} \quad \text{con } t_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3$$

Motivazione:

La matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$ è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice M ha rango uguale a 3 poiché il minore formato dalla prima, terza e quarta riga ha determinante uguale a $2 \neq 0$. E quindi $\dim \Sigma = \operatorname{rk} M = 3$.
Una sua equazione vettoriale è $P_0 + t_1(P_1 - P_0) + t_2(P_2 - P_0) + t_3(P_3 - P_0)$ e quindi Σ ha equazioni parametriche:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + 2t_2 + 3t_3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 + t_2 + t_3 \\ x_4 = 2 + 2t_3 \end{cases} \quad \text{con } t_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3$$

2	

(b) Determinare una disequazione verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti del semispazio aperto di $\mathbb{R}^4$ delimitato da Σ e contenente il punto A di coordinate $(2,3,4,5)$.

$x_2 - 2 > 0$

Motivazione:

Il sottospazio affine Σ è un iperpiano perché ha dimensione $3 = \dim \mathbb{R}^4 - 1$. E quindi Σ è dotato di equazione cartesiana.
Dalle equazioni parametriche di Σ desumiamo che tutti i suoi punti hanno la seconda coordinata uguale a 2 e quindi un'equazione cartesiana di Σ è $x_2 - 2 = 0$. I due semispazi delimitati da Σ sono caratterizzati dalle disequazioni $x_2 - 2 > 0$ e $x_2 - 2 < 0$. Il punto A chiaramente verifica la prima disequazione e quindi $\Sigma : x_2 - 2 > 0$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 2)$ appartiene all'immagine di f? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

L'immagine di f è generata da $f(\mathbf{e}_1) = (1, -2, 1)$, $f(\mathbf{e}_2) = (-2, 4, -2)$, $f(\mathbf{e}_3) = (1, -2, 1)$, dove i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ formano la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dal momento che $f(\mathbf{e}_2) = -2f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3)$, l'immagine di f ha come base $\{(1, -2, 1)\}$. E quindi il vettore $(1, 1, 2)$, non essendo linearmente dipendente da $(1, -2, 1)$, non appartiene all'immagine di f.

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$
6	$\{(1, -2, 1)\}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = x^2(6 - x)$, che si annulla per $x = 0$ e $x = 6$.
Per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0 \cdot I$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(2h - k, h, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.
Per trovare una base di $E(6)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 6 \cdot I$:

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, -2h, h)$ con h parametro reale. Una base di $E(6)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

| 2 | |

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Sia f l'endomorfismo di V tale che $f(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, con $k \in \mathbb{R}$.

2 (a) Determinare tutti i valori di k per i quali l'endomorfismo f è suriettivo.

$k \neq 2$

Motivazione:

L'endomorfismo è suriettivo se e solo se la matrice A associata a f relativamente alla base assegnata di V ha determinante non nullo. Si ha $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Essa ha determinante non nullo se e solo se $k \neq 2$.

2 (b) Posto $k = 1$, determinare il nucleo di f.

$\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Motivazione:

Sappiamo che per $k \neq 2$ l'endomorfismo è suriettivo e quindi per $k = 1$ si ha $\dim f(V) = \dim V$. Dalla formula $\dim V = \dim f(V) + \dim \ker f$ segue $\dim \ker f = 0$ da cui $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

3 (c) Posto $k = 2$, determinare $f^{-1}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

$f^{-1}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \{t\mathbf{e}_1 + (1-t)\mathbf{e}_3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Dal momento che $f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, si ha $f^{-1}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 + \ker f$.
Osserviamo che per $k = 2$ la matrice A ha rango uguale a 2 e quindi $\dim \ker f = 1$. Poiché $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3)$ si ha che $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ è una base di $\ker f$. E quindi $f^{-1}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 + \{t(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(1, 2)$ e C di coordinate $(3, 4)$.

| 2 | |

(a) Determinare i punti B e D in modo tale che il quadrilatero Q avente come vertici ordinati A, B, C e D sia un quadrato avente i lati paralleli agli assi coordinati.

Il punto B ha coordinate $(3, 2)$ e D ha coordinate $(1, 4)$.

Motivazione:

Il punto B è l'intersezione delle rette $y = 2$ e $x = 3$ e quindi B ha coordinate $(3, 2)$.
Il punto D è l'intersezione delle rette $x = 1$ e $y = 4$ e quindi D ha coordinate $(1, 4)$.

| 3 | |

(b) Determinare un'equazione della circonferenza inscritta nel quadrato Q.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1 = 0$

Motivazione:

Il centro K della circonferenza è il punto medio del segmento AC ed ha quindi coordinate $(2, 3)$.
Il raggio r della circonferenza è la distanza del punto K da uno dei quattro lati del quadrato. Si ha $r = 1$.
L'equazione della circonferenza cercata è $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1 = 0$.

| 2 | |

(c) Determinare un'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto medio del segmento AC e che delimita un cerchio avente come area la metà dell'area del quadrato Q.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 2/\pi = 0$

Motivazione:

Il centro della circonferenza cercata è il punto K di coordinate $(2, 3)$.
Il quadrato Q ha lato uguale a 2 e, quindi, area uguale a 4.
Dalla relazione $\pi r^2 = 2$ si ricava $r^2 = 2/\pi$.
L'equazione della circonferenza è $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 2/\pi = 0$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia data la sfera Σ di centro il punto K di coordinate $(1, 0, 1)$ e tangente al piano π di equazione $x - 2y + z + 1 = 0$.

| 2 | |

(a) Determinare il punto T di tangenza della sfera Σ con il piano π.

Il punto T ha coordinate $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

Motivazione:

Il punto T di tangenza è l'intersezione della retta r ortogonale al piano π e passante per K con il piano π stesso. Il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$ è ortogonale a π. Si ha: $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
Sostituendo nell'equazione di π si ottiene il valore di t da cui ricavare le coordinate del punto T: $(1 + t) - 2(-2t) + (1 + t) + 1 = 0$ e quindi $t = -\frac{1}{2}$. Il punto T ha quindi coordinate $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

| 2 | |

(b) Determinare il raggio di Σ.

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Motivazione:

Il raggio R della sfera è la distanza del punto K dal piano π e quindi $R = \frac{|1-2\cdot 0+1+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

| 3 | |

(c) Determinare i piani α e β paralleli a π che intersecano Σ in circonferenze di raggio uguale alla metà del raggio di Σ.

$\alpha : x - 2y + z - 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} = 0, \beta : x - 2y + z - 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 0$

Motivazione:

I piani α e β hanno distanza d dal centro K e il valore di d si ottiene utilizzando il teorema di Pitagora: $d = \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, con R raggio della sfera Σ. E quindi $d = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.
Un generico piano parallelo a π ha equazione $x - 2y + z + k = 0$.
Imponiamo che la distanza di questo piano da K sia uguale a d:
$\frac{|1-2\cdot 0+1+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.
Svolgendo i calcoli si ottiene $k = -2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
Si ha: $\alpha : x - 2y + z - 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} = 0, \beta : x - 2y + z - 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 0$.