COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano V e W spazi vettoriali tali che $\dim V = 3$ e $\dim W = 4$. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2	

(a) Ogni omomorfismo $f : V \longrightarrow W$ non è suriettivo.

Vero.

Motivazione:

Applicando la formula $\dim V = \dim f(V) + \dim \ker f$ si ha
$\dim f(V) \leq \dim V = 3 < 4 = \dim W$.
E quindi $f(V)$ non può coincidere con W.

2	

(b) Ogni omomorfismo $f : V \longrightarrow W$ è iniettivo.

Falso.

Motivazione:

Controesempio. Sia $f : V \longrightarrow W$ definito da $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
Si ha $V = \ker f$ e quindi l'omomorfismo f non è iniettivo.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1, 2, 3, 4)$, il punto B di coordinate $(3, 3, 1, 0)$. Sia r la retta passante per A e B.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano ortogonale alla retta r e passante per A.

$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 18 = 0$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(2, 1, -2, -4)$.
Un iperpiano ortogonale alla retta r ha equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + d = 0$ con $d \in \mathbb{R}$.
Imponendo il passaggio dell'iperpiano per A otteniamo $d = 18$.
L'iperpiano cercato ha quindi equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 18 = 0$.

2	

(b) Verificare se il punto C di coordinate $(1, 2, 1, 2)$ appartiene alla retta s parallela alla retta r e passante per il punto D di coordinate $(4, 3, 2, 1)$.

Il punto C non appartiene alla retta s.

Motivazione:

La retta s ha parametri direttori $(2, 1, -2, -4)$, uguali a quelli della retta r. Affinché il punto C appartenga alla retta s si deve avere $(4-1, 3-2, 2-1, 1-2) = (3, 1, 1, -1)$ proporzionale a $(2, 1, -2, -4)$. Poiché ciò non avviene, il punto C non appartiene alla retta s.

COGNOME......................NOME......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 3 e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

| 2 | |

(a) Determinare $f(1 + x + 2x^2)$.

$f(1 + x + 2x^2) = 10 + 8x + 10x^2$

Motivazione:

Poiché il vettore $1+x+2x^2$ ha coordinate $(1, 1, 2)$ relative alla base assegnata, le coordinate di $f(1+x+2x^2)$ sono date da $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$. Quindi $f(1+x+2x^2) = 10+8x+10x^2$.

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio.

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$\{x\}$
6	$\{1 + x + x^2\}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici 0 e 6. Per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0 \cdot I$:

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 4x + 2z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, h, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.
Per trovare una base di $E(6)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 6 \cdot I$:

$$\begin{cases} -4x + 4z = 0 \\ 4x - 6y + 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono (h, h, h) con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(6)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

| 2 | |

(c) Determinare tutti i vettori di $f^{-1}(2 + 4x + 2x^2)$.

$f^{-1}(2 + 4x + 2x^2) = \{1 + tx \mid t \in \mathbb{R}\}$

Motivazione:

Si ha $f^{-1}(2 + 4x + 2x^2) = \mathbf{u} + \ker f$ con $f(\mathbf{u}) = 2 + 4x + 2x^2$.
Le coordinate di $2 + 4x + 2x^2$ coincidono con la prima colonna della matrice A e quindi $f(1) = 2 + 4x + 2x^2$. Possiamo quindi prendere $\mathbf{u} = 1$.
Inoltre dalla risposta precedente segue $\ker f = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Quindi $f^{-1}(2 + 4x + 2x^2) = \{1 + tx \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Sia V il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$

2

(a) Determinare una base di un sottospazio vettoriale W che sia supplementare di V in E.

$\{\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1\}$

Motivazione:

Si deve avere $\dim W = 1$. Per determinare una base di W scegliamo un vettore $\mathbf{v}_4$ che sia linearmente indipendente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Prendiamo $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1$. Questo vettore soddisfa la condizione posta poiché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile.

3

(b) Determinare, se esiste, una base di un sottospazio vettoriale U di E tale che $\dim U = 2$ e $\dim(V \cap U) = 1$.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1\}$.

Motivazione:

Consideriamo due vettori non nulli, il primo in V e il secondo non in V. Questi due vettori formano ovviamente una base di uno spazio vettoriale U verificante le condizioni richieste. Consideriamo allora come base di U $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1\}$. Abbiamo già visto nella risposta alla domanda precedente che $\mathbf{v}_4 \notin V$.

2

(c) Determinare, se esiste, una base di un sottospazio vettoriale U' di E tale che $\dim U' = 3$ e $\dim(V \cap U') = 1$.

Non esiste.

Motivazione:

Applicando la formula di Grassmann $\dim V + \dim U' = \dim(V + U') + \dim(V \cap U')$ si dovrebbe avere $3 + 3 = \dim(V + U') + 1$. E quindi si dovrebbe avere $\dim(V + U') = 5$.
Ma ciò non è possibile poiché $V + U'$ è un sottospazio di E, deve avere dimensione minore o uguale a 4.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(0,-3)$ e il punto B di coordinate $(1,-2)$.

| 2 | |

(a) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e O, dove O è l'origine del sistema di riferimento.

Area $= \frac{3}{2}$

Motivazione:

Per calcolare l'area consideriamo come base del triangolo il segmento OA. Dal momento che il punti O e A appartengono all'asse delle ordinate, l'altezza del triangolo relativa alla base scelta è uguale alla distanza di B dall'asse s delle ordinate. E quindi l'area è uguale a $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(O,A)\,\mathrm{d}(B,s) = \frac{1}{2}|-3|\cdot|1| = \frac{3}{2}$.

| 2 | |

(b) Calcolare le coordinate del punto H proiezione ortogonale del punto A sulla retta r passante per O e parallela al vettore $\mathbf{v} = (1,2)$.

$H = (-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5})$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(1,2)$ e quindi una retta perpendicolare a r ha equazioni cartesiane $x+2y+k=0$ con $k \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo $k=6$. E quindi la retta r' passante per A perpendicolare alla retta r ha equazione $x+2y+6=0$. Il punto generico P della retta r ha coordinate $(t, 2t)$. Imponendo l'appartenenza di P alla retta r' otteniamo $t+4t+6=0$ e quindi $t=-\frac{6}{5}$ da cui $H = (-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5})$.

| 3 | |

(c) Scrivere le equazioni cartesiane delle circonferenze passanti per i punti A e B e di raggio $\sqrt{5}$.

$(x+1)^2 + (y+1)^2 - 5 = 0$ e $(x-2)^2 + (y+4)^2 - 5 = 0$

Motivazione:

Le circonferenze cercate devono avere il centro appartenente all'asse a del segmento AB e avente distanza uguale a $\sqrt{5}$ da A (e quindi da B).
Il punto medio del segmento AB è $M = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, un vettore parallelo al segmento AB è $\mathbf{v} = (1,1)$ e un vettore ad esso ortogonale è $\mathbf{w} = (-1,1)$. Le equazioni parametriche dell'asse a sono $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - t \\ y = -\frac{5}{2} + t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$. La distanza del generico punto dell'asse a, dal punto A è
$\sqrt{(\frac{1}{2} - t - 0)^2 + (-\frac{5}{2} + t + 3)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2t^2}$. Imponendo che questa distanza sia uguale a $\sqrt{5}$ e sviluppando si ha $\frac{1}{2} + 2t^2 = 5$, da cui $t = \pm\frac{3}{2}$. E quindi le coordinate dei centri delle circonferenze sono $(-1,-1)$ e $(2,-4)$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i punti A di coordinate $(2, 0, 1)$, B di coordinate $(0, -1, 1)$ e C di coordinate $(1, 2, -1)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per i tre punti.

$\pi : 2x - 4y - 5z + 1 = 0.$

Motivazione:

L'equazione del piano si ottiene considerando: $\det \begin{pmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0.$

3

(b) Verificare che il triangolo proiezione del triangolo ABC sul piano xy è rettangolo e calcolarne l'area.

Il triangolo è rettangolo in A', proiezione di A sul piano xy, ed ha area uguale a $\frac{5}{2}$.

Motivazione:

Le proiezioni dei punti A, B e C sul piano xy, sono rispettivamente il punto A' di coordinate $(2, 0, 0)$, il punto B' di coordinate $(0, -1, 0)$ e il punto C' di coordinate $(1, 2, 0)$.
I vettori paralleli rispettivamente ai segmenti $A'B'$ e $A'C'$ sono $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 0)$.
Si ha $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0$. Il triangolo $A'B'C'$ è quindi rettangolo in A'.
Si ha $\mathrm{d}(A', B') = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-1))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{5}$ e
$\mathrm{d}(A', C') = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{5}$.
E quindi l'area del triangolo $A'B'C'$ è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

2

(c) Determinare un'equazione cartesiana del piano asse del segmento AB.

$4x + 2y - 3 = 0$

Motivazione:

Il punto medio M di AB ha coordinate $(1, -\frac{1}{2}, 1)$ e un vettore parallelo al segmento AB è $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$. I piani perpendicolari al segmento AB hanno equazione cartesiana $2x+y+d = 0$ con $d \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per M si ha $2 - \frac{1}{2} + d = 0$, da cui $d = -\frac{3}{2}$ e l'equazione del piano $4x + 2y - 3 = 0$.