COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni riguardanti matrici di $GL(n,\mathbb{R})$, cioè matrici invertibili di ordine di n a coefficienti reali.

| 2 | |

(a) Se A è simile a B, allora A^{-1} è simile a B^{-1}.

Vero.

Motivazione:

Sia A simile a B. Allora esiste $M \in GL(n,\mathbb{R})$ tale che $A = M^{-1}BM$. Vogliamo dimostrare che esiste una matrice $N \in GL(n,R)$ tale che $A^{-1} = N^{-1}B^{-1}N$.
Da $A = M^{-1}BM$, passando alle matrici inverse, abbiamo:
$A^{-1} = (M^{-1}BM)^{-1} = M^{-1}B^{-1}M$. E quindi la matrice N cercata è la matrice M.

| 2 | |

(b) Ogni matrice $A \in GL(n,\mathbb{R})$ è simile alla matrice A^{-1}.

Falso.

Motivazione:

Controesempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
La matrice A ha ovviamente autovalori uguali a 2 e 3.
La matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ha ovviamente autovalori uguali a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. e quindi le matrici A e A^{-1}, avendo autovalori differenti, non sono simili.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1,2,3,4)$, il punto B di coordinate $(1,2,3,0)$, il punto C di coordinate $(1,2,0,0)$ e il punto D di coordinate $(3,6,6,4)$.

2

(a) Determinare la dimensione del più piccolo sottospazio vettoriale V contenente i punti A, B, C e D.

$\dim V = 3$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim V = \operatorname{rk} M$ dove $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice avente come colonne le coordinate dei punti A, B, C e D.
Poiché la quarta colonna è uguale alla somma delle prime tre, si ha $\operatorname{rk} M < 4$.
Inoltre la matrice ottenuta da M eliminandone la prima riga e la quarta colonna ha determinante non nullo. Quindi $\operatorname{rk} M = 3$. Pertanto $\dim V = 3$.

2

(b) Determinare la dimensione del più piccolo sottospazio affine Σ contenente i punti A, B, C e D.

$\dim \Sigma = 3$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim \Sigma = \operatorname{rk} N$ dove $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice avente come colonne le coordinate rispettivamente dei vettori B,C,D a cui sono sottratte le coordinate del vettore A.
La matrice ottenuta da N eliminandone la prima riga ha determinante non nullo. Quindi $\operatorname{rk} N = 3$. Pertanto $\dim \Sigma = 3$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 3 e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a+bx+cx^2) = a+2c+(2a+c)x+(a+2c)x^2$.

2	

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Abbiamo $f(1) = 1+2x+x^2$, $f(x) = 0$, $f(x^2) = 2+x+2x^2$.
Quindi $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3	

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$\{x\}$
3	$\{1+x+x^2\}$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A ha come radici 0 e 3.
Per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0 \cdot I$:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, h, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo $h = 1$.
Per trovare una base di $E(3)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 3 \cdot I$:

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono (h, h, h) con h parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

2	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Le matrici D e M non esistono.

Motivazione:

Poiché l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2 e l'autospazio $E(0)$ ha dimensione uguale a 1, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile. Pertanto le matrici D e M non esistono.

4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:
sottospazio V avente come base $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 0)\}$
sottospazio W definito da $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

2	

(a) Determinare una base di W.

$\{\mathbf{w}_1 = (-1, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_3 = (-1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Le soluzioni dell'equazione che definisce W sono $(-h_1 - h_2 - h_3, h_1, h_2, h_3) \mid h_i \in \mathbb{R}$ e quindi una sua base è data $\{\mathbf{w}_1 = (-1, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_3 = (-1, 0, 0, 1)\}$.

2	

(b) Determinare una base di $V + W$.

Base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Motivazione:

Dal momento che $\dim W = 3$, abbiamo $\dim(V + W) = 3$ oppure $\dim(V + W) = 4$.
Si ha $\dim\ (V + W) = 3$ se e solo se $V \subset W$.
Abbiamo $\mathbf{v}_1 \in W$ ma $\mathbf{v}_2 \notin W$. Quindi $\dim(V + W) = 4$. Ma allora $V + W = \mathbb{R}^4$ e quindi una sua base è la base canonica.

3	

(c) Determinare una base di $V \cap W$.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1)\}$

Motivazione:

Applicando la formula di Grassmann abbiamo:
$\dim\ (V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim\ (V + W) = 2 + 3 - 4 = 1$. Abbiamo visto nella risposta precedente che $\mathbf{v}_1 \in W$. Possiamo quindi prendere $\mathbf{v}_1$ come base di $V \cap W$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(2,3)$ e i vettori $\mathbf{v}_1 = (2,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,1)$.

2

(a) Considerata la retta r parallela al vettore $\mathbf{v}_1$ e passante per il punto A, determinare le coordinate del punto in cui r interseca l'asse delle ascisse.

$K = (8,0)$

Motivazione:

La retta r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.
La retta r interseca l'asse delle ascisse in un punto di ordinata nulla, quindi, si ha $t = 3$. Per questo valore di t si ottiene $x = 8$. Il punto in cui la retta r interseca l'asse delle ascisse ha pertanto coordinate $(8,0)$.

2

(b) Considerati i punti A_1 e A_2 simmetrici di A rispettivamente all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate, calcolare l'area del triangolo AA_1A_2.

12

Motivazione:

Il triangolo è rettangolo in A e i suoi cateti sono uguali al doppio della distanza di A dai due assi coordinati: $\mathrm{d}(A, A_1) = 2 \cdot 3 = 6, \mathrm{d}(A, A_2) = 2 \cdot 2 = 4$.
L'area del triangolo è uguale al semiprodotto delle lunghezze dei cateti e quindi è uguale a $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

3

(c) Considerata la retta s passante per A e parallela a $\mathbf{v}_2$, determinare le coordinate di tutti i punti di s che hanno distanza da A uguale a 2.

$(2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$ e $(2-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$

Motivazione:

La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, che rappresentano anche le coordinate di un suo punto P generico.
Si ha: $\mathrm{d}(P, A) = \sqrt{((2+t)-2)^2 + ((3+t)-3)^2} = 2$. Sviluppando si ottiene $|t|\sqrt{2} = 2$, da cui $t = \pm\sqrt{2}$.
Le coordinate dei punti richiesti sono quindi: $(2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$ e $(2-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$.

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i piani $\alpha : x + y - 1 = 0$ e $\beta : x + y + 2z + 1 = 0$.

2 (a) Determinare i parametri direttori della retta r intersezione dei piani α e β.

$(-1, 1, 0)$.

Motivazione:

La retta r ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-1 & = & 0 \\ x+y+2z+1 & = & 0 \end{cases}$.
Dalla prima equazione si ottiene $x = 1 - y$, da cui, sostituendo nella seconda e risolvendo, si ha $z = -1$. La retta r ha quindi equazioni parametriche $\begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & -1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.
E quindi il vettore $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$ è un vettore direttore della retta r.

3 (b) Determinare le coordinate del punto B di intersezione della retta r con il piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e perpendicolare alla retta r.

$B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

Motivazione:

La retta r ha parametri direttori $(-1, 1, 0)$ e quindi il piano π, passante per l'origine e perpendicolare a r ha equazione $-x + y = 0$. Le coordinate del punto B, intersezione di π con r, si ottengono risolvendo il seguente sistema $\begin{cases} x+y-1 & = & 0 \\ x+y+2z+1 & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \end{cases}$. La soluzione di questo sistema è $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$.

2 (c) Descrivere la regione dello spazio delimitata dai piani α e β, contenente il punto C di coordinate $(1, 4, -4)$.

$$\begin{cases} x+y-1 & > & 0 \\ x+y+2z+1 & < & 0 \end{cases}$$

Motivazione:

Il piano α delimita i due sottospazi $x + y - 1 > 0$ e $x + y - 1 < 0$. Il punto C verifica la prima disequazione.
Il piano β delimita i due sottospazi $x + y + 2z + 1 > 0$ e $x + y + 2z + 1 < 0$. Il punto C verifica la seconda disequazione. E quindi la regione di spazio cercata è caratterizzata dal seguente sistema: $\begin{cases} x+y-1 & > & 0 \\ x+y+2z+1 & < & 0 \end{cases}$