COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali A e B, dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) La matrice AB è ortogonale.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Dal fatto che le matrici A e B sono ortogonali segue $A^{-1} = {}^tA$ e $B^{-1} = {}^tB$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $(AB)^{-1} = {}^t(AB)$.
Per dimostrare ciò usiamo i seguenti teoremi:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Abbiamo $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$.

2 (b) La matrice $A + B$ è ortogonale.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Consideriamo la matrice ortogonale $A = B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $A + B = 2A$ non è ortogonale poiché $\det(2A) = 4$ e sappiamo che le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $P_0 := (10,0,0,0)$, $P_1 := (9,1,0,0)$, $P_2 = (8,1,1,0)$ e $P_3 := (7,1,1,1)$.

2	

(a) Dimostrare che l'inviluppo affine Σ dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 è un iperpiano.

Dimostrazione:

Sappiamo che Σ è dato da $P_0 + E$, dove E è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A ha rango uguale a 3 poiché il suo minore ottenuto cancellando la prima riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 3$. Pertanto Σ è un iperpiano.

2	

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione cartesiana generica di un iperpiano
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + c = 0$
e imponiamo l'appartenenza dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 all'iperpiano. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 10a_1 + c = 0 \\ 9a_1 + a_2 + c = 0 \\ 8a_1 + a_2 + a_3 + c = 0 \\ 7a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ e $c = -10a_1$. Ponendo $a_1 = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana di $\Sigma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = 0$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato in $M(2,2,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$.

2	

(a) Determinare una base per E.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Per determinare una base poniamo $(a,b,c) = (1,0,0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(a,b,c) = (0,1,0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(a,b,c) = (0,0,1)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Queste tre matrici formano una base di E.

2	

(b) Determinare una base di $E \cap S(\mathbb{R},2)$ dove $S(\mathbb{R},2)$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Le matrici simmetriche di E sono le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ponendo prima $(a,b) = (1,0)$ e poi $(a,b) = (0,1)$ troviamo due matrici che formano una base di $E \cap S(\mathbb{R},2)$.

3	

(c) Determinare una base di $E + S(2,\mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Dalla formula $\dim(E + S(2,\mathbb{R})) = \dim E + \dim S(2,\mathbb{R}) - \dim(E \cap S(2,\mathbb{R}))$ segue $\dim(E + S(2,\mathbb{R})) = 3 + 3 - 2 = 4$. Quindi $E + S(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
Prendiamo quindi come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0)\}$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A$. La matrice A ha la seconda colonna nulla e la quarta colonna uguale all'opposto della prima colonna. Pertanto $\operatorname{rk} \leq 2$. Inoltre il minore di A formato dalle ultime due righe e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile e quindi $\operatorname{rk} A = 2$. I vettori aventi come coordinate la prima e la terza colonna di A formano una base dell'immagine di f.

2 (b) Determinare una base del nucleo di f.

$\{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Abbiamo $\dim \mathbb{R}^4 = \dim f(R^4) + \dim \ker f$ e quindi $\dim \ker f = 2$. Per trovare una base di $\ker f$ dobbiamo quindi trovare due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo. Abbiamo visto che la matrice A ha la seconda colonna nulla, quindi il vettore $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ è uno dei due vettori cercati. Abbiamo visto che la quarta colonna della matrice A è uguale all'opposto della prima colonna, possiamo quindi prendere come secondo vettore il vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 = (1, 0.0, 1)$. Esso è linearmente indipendente dal primo vettore scelto.

3 (c) Determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale A' tali che $A' = M^{-1}AM$.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli otteniamo $p_f(x) = \det(A - xI) = x^2(x-1)(x-2)$. E quindi gli autovalori sono $0, 1, 2$. Poiché la matrice A è simmetrica la dimensione dei relativi autospazi è uguale rispettivamente a 2,1,1. Abbiamo già trovato una base per l'autospazio $E(0) = \ker f$.
Osservando la matrice A capiamo che $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$ e quindi $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_3$ è una base di $E(1)$. I vettori di $E(2)$ sono le soluzioni dell'equazione $(A - 2I)X = 0$ e quindi: $\begin{cases} -x_1 - x_4 & = & 0 \\ -2x_2 & = & 0 \\ -x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_4 & = & 0 \end{cases}$.
Le soluzioni sono $(t, 0, 0, -t)$. Ponendo $t = 1$ otteniamo che il vettore $\mathbf{w}_4 = (1, 0, 0, -1)$ forma una base di $E(2)$. E quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è una base di R^4. Osserviamo che questi quattro vettori sono tutti perpendicolari tra loro. Abbiamo quindi una base di autovettori che è ortogonale. Per determinare una base ortonormale, dividiamo ogni vettore per la sua norma. E quindi abbiamo $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta r di equazione cartesiana $x + 2y - 4 = 0$, il punto $P := (3, 4)$ e il vettore $\mathbf{v} := (-1, -1)$.

2 (a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto P sulla retta r.

$H = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

Motivazione:

Un vettore ortogonale alla retta r è $\mathbf{v} = (1, 2)$, per cui la retta r' ortogonale a r e passante per P ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$. Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo la seguente equazione: $(3 + t) + 2(4 + 2t) - 4 = 0$. Si ha quindi $t = -\frac{7}{5}$, da cui le coordinate di H.

3 (b) Detta s la retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto P, determinare sulla retta s tutti i punti aventi distanza dalla retta r uguale a $\sqrt{5}$.

$P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$

Motivazione:

I punti sono due. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - t \end{cases}$.
Un punto sulla retta s ha quindi distanza da r uguale a $\frac{|(3-t)+2(4-t)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}$. Si ha quindi $\frac{|-3t+7|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, da cui i due valori per t: $t_1 = \frac{2}{3}$ e $t_2 = 4$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s si ottengono le coordinate dei punti richiesti.

2 (c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta r e dell'asse delle x.

$x + (2 - \sqrt{5})y - 4 = 0$, $x + (2 + \sqrt{5})y - 4 = 0$

Motivazione:

L'asse delle x ha equazione $y = 0$ e, quindi, le equazioni cartesiane delle due bisettrici si ottengono risolvendo l'equazione $\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = |y|$ ovvero $x+2y-4 = \sqrt{5}y$ e $x+2y-4 = -\sqrt{5}y$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (0, -2, 2)$, $B := (2, 2, 4)$ e $C := (3, 0, -3)$.

2	

(a) Determinare tutti i valori del parametro h per cui il punto $P := (h, 2h+1, 5h+4)$ è complanare con i punti A, B e C.

$h = 1$

Motivazione:

Usando la condizione di complanarità per quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$

abbiamo $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ h & 2h+3 & 5h+2 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la terza riga si ha $-32h + 32 = 0$, da cui $h = 1$.

3	

(b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti A, B e C e passante per il circocentro del triangolo ABC.

$$\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 5 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta è l'intersezione dei tre piani asse di ciascuno dei tre segmenti AB, AC e BC. Ne bastano due. Per determinare il piano asse del segmento AB si considera il punto medio $M_1 = (1, 0, 3)$ di AB e il vettore $\mathbf{v}_1 = (2, 4, 2)$ parallelo al segmento AB . Le coordinate del vettore $\mathbf{v}_1$ sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano cercato. Per cui i piani paralleli al piano asse cercato hanno equazione $x+2y+z+d = 0$. Imponendo il passaggio per M_1 si ha : $1 + 3 + d = 0$, da cui $d = -4$ e $x + 2y + z - 4 = 0$.
Analogamente, per determinare il piano asse del segmento AC, si ha $M_2 = (3/2, -1, -1/2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, -5)$ e $3x + 2y - 5z + d = 0$. Imponendo il passaggio per M_2 si ha $d = -5$ e $3x + 2y - 5z - 5 = 0$.

2	

(c) Determinare se il segmento AC interseca il piano π di equazione $x - y + 3z - 5 = 0$.

Sì.

Motivazione:

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione di π si ha $0 - (-2) + 3 \cdot 2 - 5 = 3$.
Il punto A appartiene al semipiano $x - y + 3z - 5 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione di π si ha $3 - 0 + 3 \cdot (-3) - 5 = -11$.
Il punto C appartiene al semipiano $x - y + 3z - 5 <0$.
I due punti appartengono quindi a semipiani diversi, per cui il segmento AC interseca il piano π.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali M e N, dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) La matrice MN è ortogonale.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Dal fatto che le matrici M e N sono ortogonali segue $M^{-1} = {}^tM$ e $N^{-1} = {}^tN$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $(MN)^{-1} = {}^t(MN)$.
Per dimostrare ciò usiamo i seguenti teoremi:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Abbiamo $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} = {}^tN\,{}^tM = {}^t(MN)$.

2 (b) La matrice $M + N$ è ortogonale.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Consideriamo la matrice ortogonale $M = N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $M + N = 2M$ non è ortogonale poiché $\det(2M) = 4$ e sappiamo che le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $P_0 := (9,0,0,0)$, $P_1 := (8,1,0,0)$, $P_2 = (7,1,1,0)$ e $P_3 := (6,1,1,1)$.

2	

(a) Dimostrare che l'inviluppo affine Σ dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 è un iperpiano.

Dimostrazione:

Sappiamo che Σ è dato da $P_0 + E$, dove E è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A ha rango uguale a 3 poiché il suo minore ottenuto cancellando la prima riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 3$. Pertanto Σ è un iperpiano.

2	

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 9 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione cartesiana generica di un iperpiano
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + c = 0$
e imponiamo l'appartenenza dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 all'iperpiano. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 9a_1 + c = 0 \\ 8a_1 + a_2 + c = 0 \\ 7a_1 + a_2 + a_3 + c = 0 \\ 6a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ e $c = -9a_1$. Ponendo $a_1 = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana di $\Sigma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 9 = 0$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato in $M(2,2,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} h & h' \\ h'' & 2h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R}, h' \in \mathbb{R}, h'' \in \mathbb{R} \right\}$.

| 2 | |

(a) Determinare una base per E.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Per determinare una base poniamo $(h, h', h'') = (1, 0, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(h, h', h'') = (0, 1, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(h, h', h'') = (0, 0, 1)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Queste tre matrici formano una base di E.

| 2 | |

(b) Determinare una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$ dove $S(\mathbb{R}, 2)$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Le matrici simmetriche di E sono le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h & h' \\ h' & 2h \end{pmatrix}$.
Ponendo prima $(h, h') = (1, 0)$ e poi $(h, h') = (0, 1)$ troviamo due matrici che formano una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$.

| 3 | |

(c) Determinare una base di $E + S(2, \mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Dalla formula $\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = \dim E + \dim S(2, \mathbb{R}) - \dim(E \cap S(2, \mathbb{R}))$ segue
$\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = 3 + 3 - 2 = 4$. Quindi $E + S(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
Prendiamo quindi come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice
$$A_{:} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

| 2 | |

(a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 3, 0)\}$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A$. La matrice A ha la seconda colonna nulla e la quarta colonna uguale all'opposto della prima colonna. Pertanto $\operatorname{rk} \leq 2$. Inoltre il minore di A formato dalle ultime due righe e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile e quindi $\operatorname{rk} A = 2$. I vettori aventi come coordinate la prima e la terza colonna di A formano una base dell'immagine di f.

| 2 | |

(b) Determinare una base del nucleo di f.

$\{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Abbiamo $\dim \mathbb{R}^4 = \dim f(R^4) + \dim \ker f$ e quindi $\dim \ker f = 2$. Per trovare una base di $\ker f$ dobbiamo quindi trovare due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo. Abbiamo visto che la matrice A ha la seconda colonna nulla, quindi il vettore $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ è uno dei due vettori cercati. Abbiamo visto che la quarta colonna della matrice A è uguale all'opposto della prima colonna, possiamo quindi prendere come secondo vettore il vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 = (1, 0.0, 1)$. Esso è linearmente indipendente dal primo vettore scelto.

| 3 | |

(c) Determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale A' tali che $A' = M^{-1}AM$.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli otteniamo $p_f(x) = \det(A - xI) = x^2(x-3)(x+2)$. E quindi gli autovalori sono $0, 3, -2$. Poiché la matrice A è simmetrica la dimensione dei relativi autospazi è uguale rispettivamente a 2,1,1. Abbiamo già trovato una base per l'autospazio $E(0) = \ker f$.
Osservando la matrice A capiamo che $f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_3$ e quindi $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_3$ è una base di $E(3)$. I vettori di $E(-2)$ sono le soluzioni dell'equazione $(A + 2I)X = 0$ e quindi: $\begin{cases} x_1 + x_4 & = & 0 \\ -2x_2 & = & 0 \\ 5x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \end{cases}$.
Le soluzioni sono $(t, 0, 0, -t)$. Ponendo $t = 1$ otteniamo che il vettore $\mathbf{w}_4 = (1, 0, 0, -1)$ forma una base di $E(2)$. E quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è una base di R^4. Osserviamo che questi quattro vettori sono tutti perpendicolari tra loro. Abbiamo quindi una base di autovettori che è ortogonale. Per determinare una base ortonormale, dividiamo ogni vettore per la sua norma. E quindi abbiamo $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta r di equazione cartesiana $2x + y - 4 = 0$, il punto $P := (4, 3)$ e il vettore $\mathbf{v} := (-1, -1)$.

2	

(a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto P sulla retta r.

$H = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

Motivazione:

Un vettore ortogonale alla retta r è $\mathbf{v} = (2, 1)$, per cui la retta r' ortogonale a r e passante per P ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo la seguente equazione: $2(4 + 2t) + (3 + t) - 4 = 0$. Si ha quindi $t = -\frac{7}{5}$, da cui le coordinate di H.

3	

(b) Detta s la retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto P, determinare sulla retta s tutti i punti aventi distanza dalla retta r uguale a $\sqrt{5}$.

$P_1 = (0, -1)$, $P_2 = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3})$

Motivazione:

I punti sono due. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 - t \end{cases}$.
Un punto sulla retta s ha quindi distanza da r uguale a $\frac{|2(4-t)+(3-t)-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}$. Si ha quindi $\frac{|-3t+7|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, da cui i due valori per t: $t_1 = \frac{2}{3}$ e $t_2 = 4$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s si ottengono le coordinate dei punti richiesti.

2	

(c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta r e dell'asse delle x.

$2x + (1 - \sqrt{5})y - 4 = 0$, $2x + (1 + \sqrt{5})y - 4 = 0$

Motivazione:

L'asse delle x ha equazione $y = 0$ e, quindi, le equazioni cartesiane delle due bisettrici si ottengono risolvendo l'equazione $\frac{|2x+y-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = |y|$ ovvero $2x+y-4 = \sqrt{5}y$ e $2x+y-4 = -\sqrt{5}y$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (-2, 0, 2)$, $B := (2, 2, 4)$ e $C := (0, 3, -3)$.

2

(a) Determinare tutti i valori del parametro h per cui il punto $P := (2h+1, h, 5h+4)$ è complanare con i punti A, B e C.

$h = 1$

Motivazione:

Usando la condizione di complanarità per quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$ abbiamo $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2h+3 & h & 5h+2 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la terza riga si ha $-32h + 32 = 0$, da cui $h = 1$.

3

(b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti A, B e C e passante per il circocentro del triangolo ABC.

$$\begin{cases} 2x + y + z - 4 &= 0 \\ 2x + 3y - 5z - 5 &= 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta è l'intersezione dei tre piani asse di ciascuno dei tre segmenti AB, AC e BC. Ne bastano due. Per determinare il piano asse del segmento AB si considera il punto medio $M_1 = (0, 1, 3)$ di AB e il vettore $\mathbf{v}_1 = (4, 2, 2)$ parallelo al segmento AB . Le coordinate del vettore $\mathbf{v}_1$ sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano cercato. Per cui i piani paralleli al piano asse cercato hanno equazione $2x+y+z+d = 0$. Imponendo il passaggio per M_1 si ha : $1 + 3 + d = 0$, da cui $d = -4$ e $2x + y + z - 4 = 0$.
Analogamente, per determinare il piano asse del segmento AC, si ha $M_2 = (-1, 3/2, -1/2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -5)$ e $2x + 3y - 5z + d = 0$. Imponendo il passaggio per M_2 si ha $d = -5$ e $2x + 3y - 5z - 5 = 0$.

2

(c) Determinare se il segmento AC interseca il piano π di equazione $x - y - 3z + 5 = 0$.

Sì.

Motivazione:

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione di π si ha $-2 - 0 - 3 \cdot 2 + 5 = -3$.
Il punto A appartiene al semipiano $x - y - 3z + 5 < 0$.
Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione di π si ha $0 - 3 - 3 \cdot (-3) + 5 = 11$. Il punto C appartiene al semipiano $x - y - 3z + 5 > 0$.
I due punti appartengono quindi a semipiani diversi, per cui il segmento AC interseca il piano π.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali A e B, dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) La matrice $A + B$ è ortogonale.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Consideriamo la matrice ortogonale $A = B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $A + B = 2A$ non è ortogonale poiché $\det(2A) = 4$ e sappiamo che le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

2 (b) La matrice AB è ortogonale.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Dal fatto che le matrici A e B sono ortogonali segue $A^{-1} = {}^tA$ e $B^{-1} = {}^tB$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $(AB)^{-1} = {}^t(AB)$.
Per dimostrare ciò usiamo i seguenti teoremi:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Abbiamo $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $P_0 := (8,0,0,0)$, $P_1 := (7,1,0,0)$, $P_2 = (6,1,1,0)$ e $P_3 := (5,1,1,1)$.

| 2 | |

(a) Dimostrare che l'inviluppo affine Σ dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 è un iperpiano.

Dimostrazione:

Sappiamo che Σ è dato da $P_0 + E$, dove E è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A ha rango uguale a 3 poiché il suo minore ottenuto cancellando la prima riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 3$. Pertanto Σ è un iperpiano.

| 2 | |

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione cartesiana generica di un iperpiano
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + c = 0$
e imponiamo l'appartenenza dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 all'iperpiano. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 8a_1 + c = 0 \\ 7a_1 + a_2 + c = 0 \\ 6a_1 + a_2 + a_3 + c = 0 \\ 5a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ e $c = -8a_1$. Ponendo $a_1 = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana di $\Sigma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8 = 0$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato in $M(2,2,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} k & k' \\ k'' & 3k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R}, k'' \in \mathbb{R} \right\}$.

2	

(a) Determinare una base per E.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Per determinare una base poniamo $(k, k', k'') = (1, 0, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(k, k', k'') = (0, 1, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(k, k', k'') = (0, 0, 1)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Queste tre matrici formano una base di E.

2	

(b) Determinare una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$ dove $S(\mathbb{R}, 2)$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Le matrici simmetriche di E sono le matrici del tipo $\begin{pmatrix} k & k' \\ k' & 3k \end{pmatrix}$.
Ponendo prima $(k, k') = (1, 0)$ e poi $(k, k') = (0, 1)$ troviamo due matrici che formano una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$.

3	

(c) Determinare una base di $E + S(2, \mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Dalla formula $\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = \dim E + \dim S(2, \mathbb{R}) - \dim(E \cap S(2, \mathbb{R}))$ segue
$\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = 3 + 3 - 2 = 4$. Quindi $E + S(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
Prendiamo quindi come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $A_: = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 4, 0)\}$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A$. La matrice A ha la seconda colonna nulla e la quarta colonna uguale all'opposto della prima colonna. Pertanto rk ≤ 2. Inoltre il minore di A formato dalle ultime due righe e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile e quindi $\operatorname{rk} A = 2$. I vettori aventi come coordinate la prima e la terza colonna di A formano una base dell'immagine di f.

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

$\{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Abbiamo $\dim \mathbb{R}^4 = \dim f(R^4) + \dim \ker f$ e quindi $\dim \ker f = 2$. Per trovare una base di $\ker f$ dobbiamo quindi trovare due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo. Abbiamo visto che la matrice A ha la seconda colonna nulla, quindi il vettore $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ è uno dei due vettori cercati. Abbiamo visto che la quarta colonna della matrice A è uguale all'opposto della prima colonna, possiamo quindi prendere come secondo vettore il vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 = (1, 0.0, 1)$. Esso è linearmente indipendente dal primo vettore scelto.

3	

(c) Determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale A' tali che $A' = M^{-1}AM$.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli otteniamo $p_f(x) = \det(A - xI) = x^2(x-4)(x-2)$. E quindi gli autovalori sono $0, 1, 2$. Poiché la matrice A è simmetrica la dimensione dei relativi autospazi è uguale rispettivamente a 2,1,1. Abbiamo già trovato una base per l'autospazio $E(0) = \ker f$.
Osservando la matrice A capiamo che $f(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_3$ e quindi $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_3$ è una base di $E(4)$. I vettori di $E(2)$ sono le soluzioni dell'equazione $(A - 2I)X = 0$ e quindi: $\begin{cases} -x_1 - x_4 & = & 0 \\ -2x_2 & = & 0 \\ 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_4 & = & 0 \end{cases}$.
Le soluzioni sono $(t, 0, 0, -t)$. Ponendo $t = 1$ otteniamo che il vettore $\mathbf{w}_4 = (1, 0, 0, -1)$ forma una base di $E(2)$. E quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è una base di R^4. Osserviamo che questi quattro vettori sono tutti perpendicolari tra loro. Abbiamo quindi una base di autovettori che è ortogonale. Per determinare una base ortonormale, dividiamo ogni vettore per la sua norma. E quindi abbiamo $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta r di equazione cartesiana $x + 2y - 2 = 0$, il punto $P := (2, 3)$ e il vettore $\mathbf{v} := (-1, -1)$.

| 2 | |

(a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto P sulla retta r.

$H = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

Motivazione:

Un vettore ortogonale alla retta r è $\mathbf{v} = (1, 2)$, per cui la retta r' ortogonale a r e passante per P ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$. Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo la seguente equazione: $(2 + t) + 2(3 + 2t) - 2 = 0$. Si ha quindi $t = -\frac{6}{5}$, da cui le coordinate di H.

| 3 | |

(b) Detta s la retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto P, determinare sulla retta s tutti i punti aventi distanza dalla retta r uguale a $3\sqrt{5}$.

$P_1 = (5, 6)$, $P_2 = (-5, -4)$

Motivazione:

I punti sono due. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \end{cases}$.
Un punto sulla retta s ha quindi distanza da r uguale a $\frac{|(2-t)+2(3-t)-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$. Si ha quindi $\frac{|-3t+6|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$, da cui i due valori per t: $t_1 = -3$ e $t_2 = 7$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s si ottengono le coordinate dei punti richiesti.

| 2 | |

(c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta r e dell'asse delle x.

$x + (2 - \sqrt{5})y - 2 = 0$, $x + (2 + \sqrt{5})y - 2 = 0$

Motivazione:

L'asse delle x ha equazione $y = 0$ e, quindi, le equazioni cartesiane delle due bisettrici si ottengono risolvendo l'equazione $\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = |y|$ ovvero $x+2y-2 = \sqrt{5}y$ e $x+2y-2 = -\sqrt{5}y$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (2, -2, 0)$, $B := (4, 2, 2)$ e $C := (-3, 0, 3)$.

2

(a) Determinare tutti i valori del parametro h per cui il punto $P := (5h+4, 2h+1, h)$ è complanare con i punti A, B e C.

$h = 1$

Motivazione:

Usando la condizione di complanarità per quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$ abbiamo $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 5h+2 & 2h+3 & h \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la terza riga si ha $-32h + 32 = 0$, da cui $h = 1$.

3

(b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti A, B e C e passante per il circocentro del triangolo ABC.

$$\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 5x - 2y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta è l'intersezione dei tre piani asse di ciascuno dei tre segmenti AB, AC e BC. Ne bastano due. Per determinare il piano asse del segmento AB si considera il punto medio $M_1 = (3, 0, 1)$ di AB e il vettore $\mathbf{v}_1 = (2, 4, 2)$ parallelo al segmento AB . Le coordinate del vettore $\mathbf{v}_1$ sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano cercato. Per cui i piani paralleli al piano asse cercato hanno equazione $x+2y+z+d = 0$. Imponendo il passaggio per M_1 si ha : $3 + 1 + d = 0$, da cui $d = -4$ e $x + 2y + z - 4 = 0$.
Analogamente, per determinare il piano asse del segmento AC, si ha $M_2 = (-1/2, -1, 3/2)$, $\mathbf{v}_2 = (-5, 2, 3)$ e $5x - 2y - 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per M_2 si ha $d = 5$ e $5x - 2y - 3z + 5 = 0$.

2

(c) Determinare se il segmento AC interseca il piano π di equazione $3x - y + z - 5 = 0$.

Sì.

Motivazione:

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione di π si ha $3 \cdot 2 - (-2) + 0 - 5 = 3$.
Il punto A appartiene al semipiano $3x - y + z - 5 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione di π si ha $3 \cdot (-3) - 0 + 3 - 5 = -11$.
Il punto C appartiene al semipiano $3x - y + z - 5 < 0$.
I due punti appartengono quindi a semipiani diversi, per cui il segmento AC interseca il piano π.

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali M e N, dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2 (a) La matrice $M + N$ è ortogonale.

L'affermazione è falsa.

Motivazione:

Controesempio. Consideriamo la matrice ortogonale $M = N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $M + N = 2M$ non è ortogonale poiché $\det(2M) = 4$ e sappiamo che le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

2 (b) La matrice MN è ortogonale.

L'affermazione è vera.

Motivazione:

Dal fatto che le matrici M e N sono ortogonali segue $M^{-1} = {}^tM$ e $N^{-1} = {}^tN$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $(MN)^{-1} = {}^t(MN)$.
Per dimostrare ciò usiamo i seguenti teoremi:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Abbiamo $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} = {}^tN\,{}^tM = {}^t(MN)$.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $P_0 := (7,0,0,0)$, $P_1 := (6,1,0,0)$, $P_2 = (5,1,1,0)$ e $P_3 := (4,1,1,1)$.

2	

(a) Dimostrare che l'inviluppo affine Σ dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 è un iperpiano.

Dimostrazione:

Sappiamo che Σ è dato da $P_0 + E$, dove E è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. La dimensione di Σ è uguale al rango della matrice A avente come colonne le coordinate dei vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$. Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A ha rango uguale a 3 poiché il suo minore ottenuto cancellando la prima riga ha determinante diverso da 0. E quindi $\dim \Sigma = 3$. Pertanto Σ è un iperpiano.

2	

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 7 = 0$

Motivazione:

Consideriamo un'equazione cartesiana generica di un iperpiano
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + c = 0$
e imponiamo l'appartenenza dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 all'iperpiano. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 7a_1 + c = 0 \\ 6a_1 + a_2 + c = 0 \\ 5a_1 + a_2 + a_3 + c = 0 \\ 4a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ e $c = -7a_1$. Ponendo $a_1 = 1$ otteniamo l'equazione cartesiana di $\Sigma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 7 = 0$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato in $M(2,2,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$.

2	

(a) Determinare una base per E.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Per determinare una base poniamo $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ponendo $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Queste tre matrici formano una base di E.

2	

(b) Determinare una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$ dove $S(\mathbb{R}, 2)$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Le matrici simmetriche di E sono le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Ponendo prima $(a, b) = (1, 0)$ e poi $(a, b) = (0, 1)$ troviamo due matrici che formano una base di $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$.

3	

(c) Determinare una base di $E + S(2, \mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Motivazione:

Dalla formula $\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = \dim E + \dim S(2, \mathbb{R}) - \dim(E \cap S(2, \mathbb{R}))$ segue $\dim(E + S(2, \mathbb{R})) = 3 + 3 - 2 = 4$. Quindi $E + S(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.
Prendiamo quindi come base di $\mathbb{R}^4$ la base canonica.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 (a) Determinare una base dell'immagine di f.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 5, 0)\}$

Motivazione:

Sappiamo che si ha $\dim f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{rk} A$. La matrice A ha la seconda colonna nulla e la quarta colonna uguale all'opposto della prima colonna. Pertanto $\operatorname{rk} \leq 2$. Inoltre il minore di A formato dalle ultime due righe e dalla prima e dalla terza colonna è invertibile e quindi $\operatorname{rk} A = 2$. I vettori aventi come coordinate la prima e la terza colonna di A formano una base dell'immagine di f.

2 (b) Determinare una base del nucleo di f.

$\{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 1)\}$

Motivazione:

Abbiamo $\dim \mathbb{R}^4 = \dim f(R^4) + \dim \ker f$ e quindi $\dim \ker f = 2$. Per trovare una base di $\ker f$ dobbiamo quindi trovare due vettori linearmente indipendenti aventi come immagine il vettore nullo. Abbiamo visto che la matrice A ha la seconda colonna nulla, quindi il vettore $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ è uno dei due vettori cercati. Abbiamo visto che la quarta colonna della matrice A è uguale all'opposto della prima colonna, possiamo quindi prendere come secondo vettore il vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 = (1, 0.0, 1)$. Esso è linearmente indipendente dal primo vettore scelto.

3 (c) Determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale A' tali che $A' = M^{-1}AM$.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Motivazione:

Svolgendo i calcoli otteniamo $p_f(x) = \det(A - xI) = x^2(x-5)(x-2)$. E quindi gli autovalori sono $0, 1, 2$. Poiché la matrice A è simmetrica la dimensione dei relativi autospazi è uguale rispettivamente a 2,1,1. Abbiamo già trovato una base per l'autospazio $E(0) = \ker f$. Osservando la matrice A capiamo che $f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_3$ e quindi $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_3$ è una base di $E(5)$. I vettori di $E(2)$ sono le soluzioni dell'equazione $(A - 2I)X = 0$ e quindi: $\begin{cases} -x_1 - x_4 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Le soluzioni sono $(t, 0, 0, -t)$. Ponendo $t = 1$ otteniamo che il vettore $\mathbf{w}_4 = (1, 0, 0, -1)$ forma una base di $E(2)$. E quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è una base di R^4. Osserviamo che questi quattro vettori sono tutti perpendicolari tra loro. Abbiamo quindi una base di autovettori che è ortogonale. Per determinare una base ortonormale, dividiamo ogni vettore per la sua norma. Quindi $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta r di equazione cartesiana $2x + y - 2 = 0$, il punto $P := (3, 2)$ e il vettore $\mathbf{v} := (-1, -1)$.

| 2 | |

(a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto P sulla retta r.

$H = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

Motivazione:

Un vettore ortogonale alla retta r è $\mathbf{v} = (2, 1)$, per cui la retta r' ortogonale a r e passante per P ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo la seguente equazione: $2(3 + 2t) + (2 + t) - 2 = 0$. Si ha quindi $t = -\frac{6}{5}$, da cui le coordinate di H.

| 3 | |

(b) Detta s la retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto P, determinare sulla retta s tutti i punti aventi distanza dalla retta r uguale a $3\sqrt{5}$.

$P_1 = (6, 5)$, $P_2 = (-4, -5)$

Motivazione:

I punti sono due. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \end{cases}$.
Un punto sulla retta s ha quindi distanza da r uguale a $\frac{|2(3-t)+(2-t)-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}$. Si ha quindi $\frac{|-3t+6|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$, da cui i due valori per t: $t_1 = -3$ e $t_2 = 7$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s si ottengono le coordinate dei punti richiesti.

| 2 | |

(c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta r e dell'asse delle x.

$2x + (1 - \sqrt{5})y - 2 = 0$, $2x + (1 + \sqrt{5})y - 2 = 0$

Motivazione:

L'asse delle x ha equazione $y = 0$ e, quindi, le equazioni cartesiane delle due bisettrici si ottengono risolvendo l'equazione $\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = |y|$ ovvero $2x+y-2 = \sqrt{5}y$ e $2x+y-2 = -\sqrt{5}y$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (0, 2, -2)$, $B := (2, 4, 2)$ e $C := (3, -3, 0)$.

2	

(a) Determinare tutti i valori del parametro h per cui il punto $P := (h, 5h+4, 2h+1)$ è complanare con i punti A, B e C.

$h = 1$

Motivazione:

Usando la condizione di complanarità per quattro punti: $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$

abbiamo $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ h & 5h+2 & 2h+3 \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando lungo la terza riga si ha $-32h + 32 = 0$, da cui $h = 1$.

3	

(b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti A, B e C e passante per il circocentro del triangolo ABC.

$$\begin{cases} x + y + 2z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta è l'intersezione dei tre piani asse di ciascuno dei tre segmenti AB, AC e BC. Ne bastano due. Per determinare il piano asse del segmento AB si considera il punto medio $M_1 = (1, 3, 0)$ di AB e il vettore $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 4)$ parallelo al segmento AB . Le coordinate del vettore $\mathbf{v}_1$ sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano cercato. Per cui i piani paralleli al piano asse cercato hanno equazione $x+y+2z+d = 0$. Imponendo il passaggio per M_1 si ha : $1 + 3 + d = 0$, da cui $d = -4$ e $x + y + 2z - 4 = 0$.
Analogamente, per determinare il piano asse del segmento AC, si ha $M_2 = (3/2, -1/2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -5, 2)$ e $3x - 5y + 2z + d = 0$. Imponendo il passaggio per M_2 si ha $d = -5$ e $3x - 5y + 2z - 5 = 0$.

2	

(c) Determinare se il segmento AC interseca il piano π di equazione $x + 3y - z - 5 = 0$.

Sì.

Motivazione:

Sostituendo le coordinate del punto A nell'equazione di π si ha $0 + 3 \cdot 2 - (-2) - 5 = 3$.
Il punto A appartiene al semipiano $x + 3y - z - 5 > 0$.
Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione di π si ha $3 + 3 \cdot (-3) - 0 - 5 = -11$.
Il punto C appartiene al semipiano $x + 3y - z - 5 < 0$.
I due punti appartengono quindi a semipiani diversi, per cui il segmento AC interseca il piano π.