Questo documento riporta commenti, approfondimenti o metodi di soluzione alternativi per alcuni esercizi dell'esame. Ovviamente alcuni esercizi potevano essere risolti utilizzando metodi ancora diversi. I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 2 L'insieme dei punti del triangolo, bordo compreso, si ottiene considerando il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x + 3y - 7 \geq 0 \\ 6x - y - 23 \leq 0 \\ 5x - 4y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

In sostanza si sostituiscono le disuguaglianze strette con disuguaglianze deboli. In particolare i punti del bordo del triangolo sono quelli che soddisfano questo sistema e che soddisfano almeno una delle disequazioni con il segno uguale: ad esempio sostituendo le coordinate del punto $R := \left(3, \frac{4}{3}\right)$ nelle disequazioni troviamo $3 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 7 = 0$, $6 \cdot 3 - \frac{4}{3} - 23 = -\frac{19}{3}$ e $5 \cdot 3 - 4\frac{4}{3} + 3 = \frac{38}{3}$. Dunque il punto R soddisfa tutte e tre le disequazioni e la prima di esse con il segno uguale: pertanto appartiene al bordo. Il punto $Q := (-2, 3)$ invece, anche se soddisfa la disequazione $x + 3y - 7 \geq 0$ con il segno uguale non appartiene al bordo del triangolo: infatti, come visto nella soluzione dell'esercizio, le coordinate di Q non soddisfano la terza disequazione del sistema e, quindi, il punto Q è esterno al triangolo. Il fatto che $-2 + 3 \cdot 3 - 7 = 0$ non ci dice che Q appartiene al bordo del triangolo, ma solo che appartiene alla retta passante per i punti A e B.

Esercizio 3(b) Si noti che non è necessario calcolare preventivamente gli autovalori di f utilizzando il polinomio caratteristico.

Esercizio 3(c) Si poteva anche determinare esplicitamente f a partire dalla matrice ottenendo così

$$f(x, y, z) = (x - y + 4z, 2y + kz, x + 2z).$$

Ora il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se e solo se esistono x, y, z tali che

$$(x - y + 4z, 2y + kz, x + 2z) = (1, 2, 1),$$

il che equivale a dire che il sistema

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2y + kz = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

è risolubile. Per il teorema di Rouché-Capelli questo può essere espresso dicendo che il rango della matrice A è uguale al rango della matrice orlata

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo ora che, a parte il diverso modo di interpretare l'esercizio, rispetto alle soluzioni pubblicate nel testo i calcoli da fare sono essenzialmente i medesimi. Per calcolare il rango di A, infatti si può iniziare a calcolarne il determinante. Poiché questo determinante è $-4 - k$ si ha che per $k \neq -4$ la matrice A ha rango 3 e, quindi, necessariamente anche la matrice orlata ha lo stesso rango: il sistema è risolubile.

Nel caso in cui $k = -4$ si ha che il rango di A è 2 e un minore invertibile di A di ordine 2 è il minore B formato dalle prime due righe e due colonne. Il minore B ha in A' precisamente due orlati: uno è A, di cui è inutile calcolare il determinante perché sappiamo essere 0 (stiamo per l'appunto considerando il valore di k che annulla il determinante di A), l'altro è la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ che è esattamente la stessa matrice di cui abbiamo calcolato il determinante nelle soluzioni pubblicate nel testo: il determinante di questa matrice è -2 e, pertanto, la matrice A' ha rango 3. Dunque il sistema non è risolubile.

Esercizio 4(a) Si poteva anche determinare direttamente l'intersezione. Un vettore appartiene a E se e solo se si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(1, 0, 2, 1) + \beta(1, 2, -2, 3)$$

o, equivalentemente,

$$(\alpha+\beta, 2\beta, 2\alpha-2\beta, \alpha+3\beta).$$

Questo vettore generico di E appartiene a F se e solo se

$$(\alpha+\beta)+(2\beta)+(2\alpha-2\beta)-(\alpha+3\beta)=0$$

vale a dire

$$2\alpha-2\beta=0,$$

cioè se e solo se $\alpha=\beta$. Dunque i vettori di $E \cap F$ sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(\alpha+\alpha, 2\alpha, 2\alpha-2\alpha, \alpha+3\alpha),$$

cioè

$$(2\alpha, 2\alpha, 0, 4\alpha).$$

L'intersezione $E \cap F$ è dunque generata dal singolo vettore non nullo $(2,2,0,4)$.

Esercizio 4(c) Vediamo in dettaglio la soluzione. Innanzitutto troviamo una base di F: risolvendo l'equazione che descrive tale sottospazio si ha che i vettori di F sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(x, y, z, x+y+z)$$

al variare dei parametri x, y e z in $\mathbb{R}$. Dunque una base per F è formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 := (0,1,0,1)$ e $\mathbf{v}_3 := (0,0,1,1)$. Applichiamo ora il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Poniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &:= \mathbf{v}_1,\\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{u}_1.\end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= (1,0,0,1) \times ((0,1,0,1) + \alpha\,(1,0,0,1)) =\\ &= (1,0,0,1) \times (0,1,0,1) + \alpha\,(1,0,0,1) \times (1,0,0,1) =\\ &= 1 + 2\alpha.\end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (1,0,0,1)\,,\\ \mathbf{u}_2 &= (0,1,0,1) - \frac{1}{2}\,(1,0,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$\mathbf{u}_3 := \mathbf{v}_3 + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2.$$

Cerchiamo allora β_1 e β_2 tali che $\mathbf{u}_3$ sia ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}_2$. Calcoliamo i prodotti scalari:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 &= (\mathbf{v}_3 + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_1 =\\ &= \mathbf{v}_3 \times \mathbf{u}_1 + \beta_1\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1 =\\ &= \mathbf{v}_3 \times \mathbf{u}_1 + \beta_1\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1 =\\ &= (0,0,1,1) \times (1,0,0,1) + \beta_1\,(1,0,0,1) \times (1,0,0,1) =\\ &= 1 + 2\beta_1.\end{aligned}$$

Si noti che abbiamo utilizzato il fatto che $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = 0$. Dunque se scegliamo $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = 0$. Analogamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2 &= (\mathbf{v}_3 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_2 = \\
&= \mathbf{v}_3 \times \mathbf{u}_2 + \beta_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + \beta_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2 = \\
&= \mathbf{v}_3 \times \mathbf{u}_2 + \beta_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2 = \\
&= (0,0,1,1) \times \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) + \\
&+ \beta_2 \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\beta_2.
\end{aligned}$$

Dunque se scegliamo $\beta_2 = -\frac{1}{3}$ abbiamo che $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2 = 0$. Abbiamo dunque una base ortogonale per E:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= (1,0,0,1)\,, \\
\mathbf{u}_2 &= \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right), \\
\mathbf{u}_3 &= (0,0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Prima di proseguire può essere utile, per escludere eventuali errori di calcolo, controllare che i vettori così ottenuti sono a due a due ortogonali facendo i vari prodotti scalari e che appartengono effettivamente a F verificando che soddisfano l'equazione che definisce F.

Se ora dividiamo ciascuno di questi vettori per la propria norma otteniamo una base ortonormale di E:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &:= \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \\
\mathbf{w}_2 &:= \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right), \\
\mathbf{w}_3 &:= \sqrt{\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Questa base è diversa da quella data nelle soluzioni pubblicate nel testo.

Esercizio 5(a) Per risolvere esplicitamente l'equazione omogenea $7a^2 - 6ab - b^2 = 0$ si può notare che per $b = 0$ si ottiene come corrispondente soluzione $a = 0$: poiché ponendo $a = b = 0$ nell'equazione del fascio di rette non si ottiene l'equazione di una retta ma l'identità $0 = 0$, possiamo supporre che $b \neq 0$. Dividendo allora per b^2 l'equazione omogenea otteniamo l'equazione di secondo grado nell'incognita $\frac{a}{b}$:

$$7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\frac{a}{b} - 1 = 0,$$

che può ora essere facilmente risolta.

Esercizio 5(b) Notiamo che per risolvere questo esercizio non è stato necessario determinare esplicitamente i vertici del triangolo. In particolare si noti che si poteva dare risposta a questa domanda anche senza conoscere le risposta alla domanda (a).

Se non ci si fosse accorti di ciò si poteva procedere determinando l'intersezione tra una delle tangenti, ad esempio la retta $r : x + y + 6 = 0$, e la circonferenza:

$$\begin{cases} x + y + 6 = 0 \\ (x-4)^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è

$$(-6 - y - 4)^2 + y^2 = 50$$

ovvero
$$2y^2 + 20y + 50,$$
che ha come soluzione (doppia) $y = -5$. Sostituendo questo valore nell'equazione di r troviamo $R := (-1, -5)$. Ora abbiamo i tre vertici del triangolo CPR: la lunghezza del lato del lato PR è uguale a $\sqrt{(-11 - (-1))^2 + (5 - (-5))^2)} = 10\sqrt{2}$ (questo dato, ovviamente coincide con quello calcolato nelle soluzioni pubblicate nel testo). Per determinare l'altezza relativa a questo lato si può procedere in due modi:

- si nota che il triangolo CPR è rettangolo in R poiché PR è tangente alla circonferenza in P e CP è il raggio della circonferenza passante per il punto di tangenza. Grazie a questa osservazione, dunque, l'altezza non è altro che il raggio della circonferenza.
- se non si nota che il triangolo CPR è rettangolo in R, basta calcolare la distanza del punto C dalla retta r trovando ancora (ovviamente) lo stesso valore.

Esercizio 5(c) Questo esercizio è stato risolto in maniera semplice utilizzando proprietà geometriche della circonferenza: in particolare si poteva dare risposta alla domanda (c) anche senza conoscere la risposta alla domanda (a). Se non si fosse notato questo fatto si poteva procedere anche così: una volta trovate le rette tangenti rispondendo alla domanda (a), le bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s sono formate da tutti e soli i punti equidistanti da r e s, cioè da tutti i punti (x, y) che soddisfano la condizione:
$$\frac{|x + y + 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x - 7y + 46|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}}$$
vale a dire
$$5|x + y + 6| = |x - 7y + 46|.$$
Questo avviene se e solo se
$$5(x + y + 6) = x - 7y + 46,$$
o
$$-5(x + y + 6) = x - 7y + 46.$$
Sviluppando queste due equazioni otteniamo le equazioni delle bisettrici cercate.

Esercizio 6(b) Alternativamente questo esercizio poteva essere risolto anche così. Una volta trovato il punto P, ricordando che al punto (a) abbiamo determinato i parametri direttori di s (e, quindi, di l) le equazioni parametriche di l possono essere scritte così:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases}.$$
Ora è facile ottenere delle equazioni cartesiane di t, ad esempio $\begin{cases} 2x - y \qquad 4 = 0 \\ x \qquad - z + 6 = 0 \end{cases}$

Esercizio 6(c) La risposta a questa domanda è stata data con considerazioni unicamente geometriche senza bisogno di alcun calcolo. In particolare si noti che si poteva dare risposta a questa domanda anche senza conoscere le risposte alle domande (a) e (b).

Se non ci si fosse accorti di ciò si poteva procedere determinando l'intersezione tra la retta l e il piano π. Questo può essere fatto in due modi:

- Utilizzando le equazioni cartesiane della retta l si considera il sistema
$$\begin{cases} x \qquad - z + 6 = 0 \\ x - 2y + 3z - 10 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$
Risolvendo questo sistema con il metodo preferito si vede facilmente che le soluzioni dipendono da un parametro, cioè corrispondono ai punti di una retta. Dunque l'intersezione tra l e π è una retta (che deve necessariamente coincidere con l).

- Utilizzando le equazioni parametriche di l si considera l'equazione risolvente

  $$t - (4 + 2t) + (6 + t) - 2 = 0.$$

  Poiché questa è un'identità, ogni punto di l appartiene al piano π.